数理解析研究所講究録 1441 巻 2005 年 198-203

平板曲げ有限要素の開発と改良

東京大学・数理科学研究科 菊地 文雄 (Fumio Kikuchi)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

1 はじめに

平板の曲げ解析用の有限要素は，最も基本的で重要な有限要素の一つであり，長い開発と解析の歴史を持っている．初期には，薄板に対する Kirchhoff 理論に基づく要素が主に開発されたが，次第にやや厚い平板にも適用可能な Reissner-Mindlin 理論に基づく要素がもっぱら扱われるようになった．ちなみに，前者は後者の薄板極限となっているが，しばしば特異摂動問題になり，数学的にも多くの興味深い課題を提供している [2, 3, 4, 5, 7, 12]. また，これらの平板理論のより具体的な比較やそれぞれの理論の有効性などについても，研究が続けられている [1].

筆者は，かなり初期の段階から平板要素に関心を持ち，開発や解析を実施してきた．その間，海外における発展もめざましく，初期には問題点の多かった Reissner-Mindlin 要素にも工夫が加えられ，また，筆者自身では Kirchhoff 要素を Reissner-Mindlin 要素に拡張する手法を提案し解析した [10, 11]. それら近年の結果を概観すると，多くの手法でほぼ共通して横せん断ひずみに対して辺要素近似を用いるなど，論点がかなり収束してきたように感じる．ここでは，自己の結果を中心にして，主な論点，結果等についてまとめる．紙数の関係で概略しか述べないので，詳細については前述の論文を参照されたい．

2 平板の曲げ問題

平板の中央面の占める 2 次元多角形領域を Ω とし，周辺固定境界条件の場合について，薄板およびやや厚い板厚（ただし，一様板厚とする）の場合を想定した Reissner-Mindlin 平板の曲げ問題を簡略化した形で示す [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 16].

$[\mathbf{PB}]_t$ “横荷重 $f^* \in L_2(\Omega)$ と板厚 $t \in (0, t_0]$ $(t_0 > 0)$ を与えたとき，変位 $u = \{\theta, w\} \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ として，$\forall\{\phi, \mu\} \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ に対して次を満たすものを求めよ．”

$$\sum_{i,j=1}^{2} (k_{ij}(\theta), k_{ij}(\phi)) + t^{-2}(\nabla w - \theta, \nabla\mu - \phi) = (f^*, \mu) \tag{1}$$

ここで，∇ は勾配作用素，$\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ は板の回転，w は横たわみ，$k_{ij}(\theta) = \frac{1}{2}(\partial_i\theta_j + \partial_j\theta_i)$ $(1 \le i, j \le 2,\ \partial_i = \partial/\partial x_i)$ は板の曲率変化，$(\cdot,\cdot)$ は $L_2(\Omega)$ またはその直積空間の内積を表す．特に Kirchhoff 平板では $\theta = \nabla w$ であり，その結果，$k_{ij}(\theta) = \partial_i\partial_j w$ となり，また，t の入った項（ペナルティ項とも見なせる）は除かれる．この弱定式化は最小型変分問題に等価で，最小条件の一部として 2 階の連立偏微分方程式が得られ，Kirchhoff 平板の場合には w に関する単独の偏微分方程式 $\Delta^2 w = f^*$ が得られる．なお，境界条件としては，単純支持条件なども同様に考察できる．

混合法による定式化[4]を示すため，Hilbert 空間として，$V = H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$，$W = L_2(\Omega)^2$，$Q' = H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ を考え，V，Q' の共役空間は V', Q と記す．W の共役空間 W' を W と同一視したとき，Q は $Q = H^{-1}(\mathrm{div};\Omega) = \{q \in H^{-1}(\Omega)^2 \mid \mathrm{div}\, q \in H^{-1}(\Omega)\}$ とみなせる．このとき，$Q' \subset W = W' \subset Q$ であり（包含関係は稠密），また共役対 $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ は $(\cdot,\cdot)_W$ の拡張にとれる．

有界対称な双1次形式 $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$a(u,v) := \sum_{i,j=1}^{2} (k_{ij}(\theta), k_{ij}(\phi)) \quad (u = \{\theta, w\},\ v = \{\phi, \mu\} \in V) \tag{2}$$

により定義する．変位に横せん断ひずみを対応させる有界線形作用素 $B \in L(V, Q')$ は $Bu := \nabla w - \theta$ $(u = \{\theta, w\} \in V)$ とし，$B^* \in L(Q, V')$ はその共役とする：$\langle Bv, q\rangle_Q = \langle B^* q, v\rangle_V$; $\forall v \in V$, $\forall q \in Q$. さらに，有界線形汎関数 $f \in V'$ は与えられた荷重 $f^* \in L_2(\Omega)$ により次のように定義する．$\langle f, v\rangle_V := (f^*, \mu)$ $(v = \{\phi, \mu\} \in V)$.

混合法では，正規化（かつ簡略化した）した横せん断力 $\zeta := (\nabla w - \theta)/t^2$ を Lagrange の未定乗数として用いる．対応する横せん断ひずみは $\gamma := \nabla w - \theta = t^2 \zeta$ である．

まず Reissner-Mindlin 平板に対する混合型定式化は，ζ_t を Lagrange の未定乗数として次のようになる．

$[\mathbf{P}]_{t>0}$ $f^* \in L_2(\Omega)$，$t \in (0, t_0]$ を与えたとき，$\{u_t, \zeta_t\} \in V \times W$ として次を満たすものを求めよ．

$$a(u_t, v) + \langle Bv, \zeta_t\rangle_Q = \langle f, v\rangle_V \quad (\forall v \in V),\quad \langle Bu_t, q\rangle_Q - t^2(\zeta_t, q)_W = 0 \quad (\forall q \in W) \tag{3}$$

また Kirchhoff 平板については，次のようになる．

$[\mathbf{P}]_{t=0}$ $f^* \in L_2(\Omega)$ を与えたとき，$\{u_0, \zeta_0\} \in V \times Q$ として次を満たすものを求めよ．

$$a(u_0, v) + \langle Bv, \zeta_0\rangle_Q = \langle f, v\rangle_V \quad (\forall v \in V),\quad \langle Bu_0, q\rangle_Q = 0 \quad (\forall q \in Q) \tag{4}$$

ここで，(4) は形式的には (3) で $t = 0$ と置いただけのように見えるが，$\zeta_t \in W$ $(t > 0)$ に対し $\zeta_0 \in Q$ という差がある．また，前者の ζ_t は変位から決定することもできる（その場合は，ζ_t を消去して，変位のみによる先の定式化 (1) に戻る）が，後者の ζ_0 は Lagrange 未定乗数と見なして，変位とともに未知関数として (4) を連立して解くことにより初めて決定される．

これらの定式化の妥当性は，主に下記の双1次形式の強圧性と B の閉値域性から示すことができる：$\exists\, \alpha > 0, \beta > 0$; $\forall v \in V$;

$$a(v,v) + \|Bv\|_W^2 \geq \alpha \|v\|_V^2\ ,\quad \|Bv\|_{Q'} \geq \beta \|v\|_{V/N(B)} \tag{5}$$

さらに，解の正則性（なめらかさ）やノルムの板厚への依存性についての結果については，[4] などに与えられている．特に，Kirchhoff 平板が Reissner-Mindlin 平板の薄板極限として特徴づけられること，ただし，しばしば特異摂動になることなどが知られている．また，単連結な多角形形状の Kirchhoff 平板については，[13] の結果などがある．

3 平板の曲げ要素：主な手法

平板の曲げ有限要素を作成する手法としては，各種のものが考えられる [2, 4, 5, 12]. 一番基本的なのは，変位だけを用いる手法で，分類すれば適合法と非適合法等になる. Kirchhoff 平板では，適合な横たわみ場を構成しにくいので，非適合法や離散 Kirchhoff 法も工夫されている. Reissner-Mindlin 平板では，一見，近似変位場を見出すのは容易であるが，実際はロッキングや数値的不安定性などの問題点があり，その後，混合法や安定化技法などが研究され，次第に成果をあげて今日に至っている. 混合法では，先の混合型変分原理を利用するが，その際に下限・上限条件を満たすのが難しいが，せん断力，せん断ひずみに辺要素を利用して満たすことも（ある程度まで，しばしば弱い意味であるが）可能になった. 安定化技法でも，辺要素もしくはその補間技法（変位から得られるせん断ひずみを，辺要素の補間関数を用いて修正する）を利用することが多い [5, 8, 12, 15].

なお，平板の1次元版ともいえる はりについては，Bernoulli-Euler はりと Timoshenko はり の問題があるが，この場合は前者は後者の連続的な極限とみなせ，平板ほどの困難さはない. それでも，有限要素の開発においてロッキングの問題に遭遇したことはよく知られている.

このような研究の結果，板曲げ要素に関する近似技法はかなり収束し一定の水準に達したように思われ，さらに Kirchhoff 要素と Reissner-Mindlin 要素の統合も実現できる場合が生じてきている.

例えば著者らが開発した三角形要素では，基礎となる Kirchhoff 要素として代表的なもの（例：HCT 要素）を用い，せん断ひずみ仮定に辺要素を利用して変位場を構成する [10]. 横たわみ場としては適合なものも非適合なものも利用できるが，理論的には適合の場合が基本である. この場合，せん断ひずみに関する自由度が新たに必要になり，その点で不利であるが，消去する手法も考案されており [8, 15]，それは安定化技法とも関連すると思われる. なお，これらの手法では，(Kirchhoff 平板を除けば）せん断力はせん断ひずみから直接に求められるので，計算は変位法として実行できる.

基礎となる Kirchhoff 要素が適合型の場合について，手法の概要を説明しておく. Kirchhoff 要素は3節点の三角形要素とするが，その節点自由度は横たわみ w の値とその2つの1階導関数値である. Kirchhoff 要素では導関数までの連続性（C^1 連続性）が要求されるが，Reissner-Mindlin 要素では横たわみ w および回転 θ 自体の連続性で十分である. ただし，ここでの Reissner-Mindlin 要素では，変位 w と θ のみでなく，最低次の Nedelec の三角形辺要素 [14] を用いて，横せん断ひずみ（2成分）γ も仮定する. これは，とりあえずは変位とは独立であるが，以下に説明するように，最終的には変位と練成する. また，Reissner-MIndlin 要素での変位の自由度として，3節点での w と θ の値を，γ の自由度として，各辺での辺方向成分（辺上では一定，要素間の向きはそろえる）を採用する. したがって，Kirchhoff 要素での w の導関数値はここでは最終的な自由度としては残らないことに注意する.

近似仮定変位の作成にあたって基本的なのは，次の横せん断ひずみと変位の関係式で

ある.

$$\gamma = \nabla w - \theta \tag{6}$$

w の節点自由度中，1階導関数については，上式に基づき，各節点での θ と γ の値から決定する．ただし，θ の節点値は自由度として隣の要素と連続（共通）になるが，γ の方は節点で連続である必要はない（各辺で辺方向成分が連続であればよい）．これにより，各要素内での w は，その節点値と θ および γ の自由度から決定される．

他方，θ については，節点値は最終的な自由度として意味を持っているが，要素内の関数形は未定である．既に γ と w は規定されているので，θ は (6) に基づいて，$\theta = \nabla w - \gamma$ により定める．

以上により，近似変位が規定された．横せん断ひずみはここでは変位と練成して，変位の一部となっている．また，w と θ も練成するので，通常の有限要素法での近似変位よりも複雑である．他方，横せん断力は変位と独立に（せん断ひずみと同じ形で）仮定してもよいが，$t > 0$（t は定数）の場合には，(3) の第2式を用いて，せん断ひずみを t^2 で割ることにより，変位で表して消去できる．この手順は，横せん断力を未知関数に残しておいても，最終的には同じ結果になる（近似関数の選び方が特殊なので，近似問題でも (2) の第2式あるいはせん断力－変位関係式は厳密に満たされるため）．ただし，$t \to 0$ に相当する Kirchhoff 平板では，この消去法は利用できないので，Lagrange 未定乗数として変位とは独立に残す必要がある．

このようにして得られた仮定変位が，要素間で連続になること（したがって V に属すこと）は，若干の考察で確認できる．ただし，w が適合変位であるとして，要素間の辺上で，w の1階の法線方向導関数が1次関数になると仮定している．

また，変位間の練成の結果，w の関数形が複雑になるので，線形汎関数 $< f, v >$ に起因する節点荷重ベクトルの計算もそのままでは複雑になるが，w について集中化近似を行って計算を簡略化することも可能である．

なお，ここでの せん断ひずみの消去法は，[8, 15] に依った．そこでは，変位から ひずみ－変位関係式 $\gamma = Bu$ により せん断ひずみを求め，さらに辺要素 [14] を用いて補間する．せん断力の方は，t^2 で割るだけでなく，補正の係数を掛けたものを用いる．補正係数の求め方は上記文献に依るが，安定化技法 [12] でも類似のものが得られるように思う．

上記の手法は，Kirchhoff 型の3節点の三角形要素を基礎として，Reissner-Mindlin 要素を作成するものである．高次の辺要素（共変要素）で適当なものがあれば，高次三角形要素へも拡張できよう．四辺形要素については，四辺形の辺要素の使用が考えられるが，実は長方形，平行四辺形以外の一般の四辺形形状の Kirchhoff 要素で適当なものは，あまり知られていない．そのため，今のところ，十分に理論を展開できないでいる．

4 誤差解析

このような有限要素の誤差解析は，混合法や安定化法の原理を利用して実行できる．我々の導いた混合法 [10] では，下限・上限条件を厳密に満足することができるので，せん断力

についても，先に述べたような非常に弱い位相（$Q = H^{-1}(\mathrm{div};\Omega)$）でではあるが，収束を示すことができた[11]．ただし，収束のオーダーも低いが，この点を改良できるかどうかは今後の課題である．また，変位が複雑に練成しているので，下限・上限条件のみならず，近似関数の近似能力解析（補間誤差評価）なども通常の要素の場合よりも面倒になる．その際，辺要素に関する理論解析で確認された性質を利用した[9]．

他方，多くの手法では，(変位はともかく）せん断力については格子依存のノルムでの収束が示されているにすぎないようである．これは，下限・上限条件を厳密に満たす要素の作成がきわめて困難なことによると考えている．たとえば下限・上限条件は弱い形でのみ保証される場合が多いようである．一方，前記の手法では，練成した複雑な近似関数を導入するという犠牲のもとで，下限・上限条件を達成できたわけである．

5 今後の課題：せん断力の計算など

前項でものべたように，板曲げ要素でのせん断力の収束は理論的にはきわめて微妙である．また，Kirchhoff 平板でせん断力をどのように求めるかは実用上も重要であるが，特に低次要素では決定的な手法がないようである（よく知られているように，Kirchhoff 平板では，せん断力は横たわみ w の３階導関数を用いて決定することもできる[6, 16]．ただし，これは厳密解についてであり，有限要素近似解でしかも低次の要素を用いた場合は不可能に近い）．辺要素を利用すると，Lagrange の未定乗数としてせん断力を計算できる．さらに場合によっては，通常の Kirchhoff 要素での有限要素解析で実施するように変位 w のみを求め，その後で（事後的に）せん断力を決定することも工夫次第で可能かと思われる．この点ついては，さらに検討を加えたい．

せん断力に関する若干の計算例は [10] に与えられている．それを見ると，混合法による結果は一応妥当だが，要素での平均値を利用して厳密解と比較している（本来の近似せん断力だと，やや数値的振動が入る）．他方，せん断ひずみ自由度を近似的に消去した要素では，変位についてはともかく，せん断力については，それよりも悪い結果が得られている．したがって，ここでの消去法については，自由度を減らせる利点はあるにしても，実用上も検討の余地がある．

この他にも，若干触れたように，高次要素や四辺形要素の問題など，いまだ残された課題もあるように思われる．いずれにせよ，板の曲げ問題はきわめて古い歴史を持ち，一見，既に解決済みの分野にも思われるが，実は必ずしもそうではなく，それに対する有限要素についても，地道な改善努力が継続される必要があろう．

参考文献

[1] D.N. Arnold, A.L. Madureira and S. Zhang. On the range of applicability of the Reissner-Mindlin and Kirchhoff-Love plate bending models. *J. Elasticity*, **67**, 171–185, 2002.

[2] D.N. Arnold and R.S. Falk. A uniformly accurate finite element method for the Mindlin-Reissner plate. *SIAM J. Numer. Anal.*, **26**, 1276–1290, 1989.

[3] K.-J. Bathe. *Finite element procedures.* Prentice-Hall, 1996.

[4] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer-Verlag, 1991.

[5] D. Chapelle and K.-J.Bathe. *The finite element analysis of shells - Fundamentals.* Springer-Verlag, 2003.

[6] C. L. Dym and I. H. Shames. *Solid mechanics : A variational approach.* McGraw-Hill, 1973.

[7] T. J. R. Hughes. *Finite element method : Linear static and dynamic finite element analysis.* Prentice-Hall, 1987. Dover Publications, 2000.

[8] I. Katili. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields– Part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **36**, 1859-1883, 1993.

[9] F. Kikuchi. On a discrete compactness property for the Nedelec finite elements. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo.*, Sect. IA, Math., **36**, 479–490, 1989.

[10] F. Kikuchi, K. Ishii and H. Takahashi. Reissner-Mindlin extensions of Kirchhoff elements for plate bending. to appear in Int. J. Comput. Meth., 2005.

[11] F. Kikuchi and H. Takahashi. Analysis of a Kirchhoff-based Reissner-Mindlin element for plate bending. Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, P. Neittaanmäki, T. Rossi, K. Majava, and O. Pironneau (eds.), O. Nevanlinna and R. Rannacher(assoc. eds.), Jÿvaskylä, 24-28 July 2004.

[12] Lyly, M. and Stenberg. R. A survey of stabilized plate elements. in *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics.* Springer, pp. 11-21, 2001.

[13] A. Mizutani. On the finite element method for the biharmonic Dirichlet problem in polygonal domains; Quasi-optimal rate of convergence. to appear in JJIAM.

[14] Nedelec, J.-C.: Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$. *Numer. Math.*, **35**, 315-341, 1980.

[15] A.K. Soh, Z.F. Long and S. Cen. A new nine DOF triangular element for analysis of thick and thin plates. *Computat. Mech.*, **24**, 408-417, 1999.

[16] K. Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity.* 2nd ed. Pergamon, 1975.