数理解析研究所講究録 1441 巻 2005 年 44-49

Stokes 極限波の一意性に対する数値的検証法

小林健太 (Kenta Kobayashi)
九州大学 数理学研究院
(Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 問題の概要

水面重力波の運動を記述した方程式として Nekrasov's eq.

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \theta(s) = \dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cot\frac{t-s}{2}\cdot\log\left(\mu^{-1}+\int_0^t \sin\theta(w)dw\right)dt, \\ \theta(-s) = -\theta(s), \\ \theta(s+2\pi) = \theta(s), \end{cases}$$

が知られている [4][5]. ここで, $\theta(s)$ は波の波面が水平面と為す角度である. この方程式は $\mu > 3$ のとき, 非自明な解を持ち得るが, 解のなかで $(0,\pi)$ で正値を取るものを Nekrasov's eq. の正値解ということにする.

Stokes 極限波は, μ を無限大へ持っていった時の(1.1) の解の極限として定義され

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \theta(s) = \dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cot\frac{t-s}{2}\cdot\log\left(\int_0^t \sin\theta(w)dw\right)dt, \\ \theta(-s) = -\theta(s), \\ \theta(s+2\pi) = \theta(s), \end{cases}$$

を満たす.

(1.2) の数値解を図 1 に示す. このとき, 元の波の概形は図 2 のようになる.

Toland[6] は $\mu \to \infty$ のとき(1.1) の解は収束する部分列を持ち, その極限が(1.2) を満たすことを証明した. 更に Amick et al.[2] は $\theta(s)$ が $(0,\pi]$ で無限回微分可能, かつ $\lim_{s\downarrow 0}\theta(s) = \pi/6$ となることを証明した. よって(1.2) の解の存在については証明されているのだが, 解の一意性については未解決である. 我々は数値的検証法 (中尾・山本 [7], 大石 [8]) を用いることによってこれを証明することができた.

なお, Nekrasov's eq. の正値解については我々は既に同様の方法を用いて一意性を証明している (小林 [3]). ただし, Stokes 極限波の方がその特異性ゆえに証明は難しい.

2 準備

まず, Stokes 極限波の上界関数と下解関数を与える以下の定理を証明する. なお, 特に断りが無いかぎり $0 \le s \le \pi$ とする.

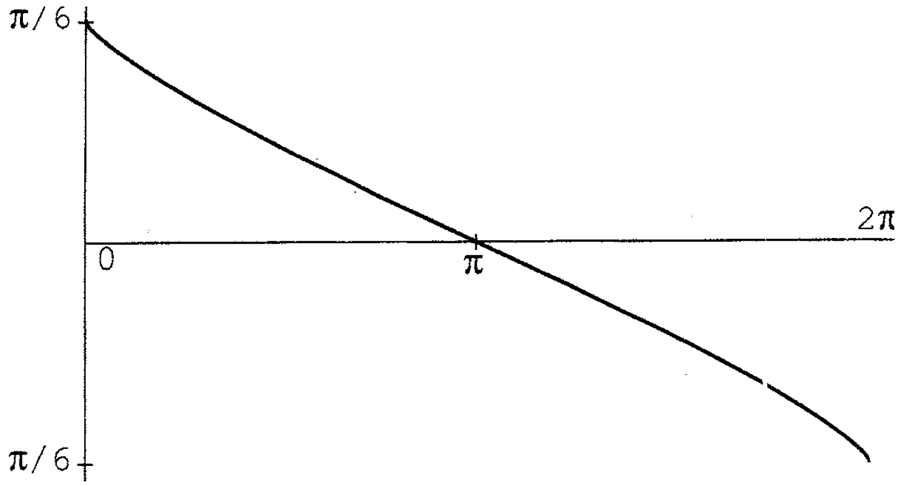

図 1: The shape of $\theta(s)$.

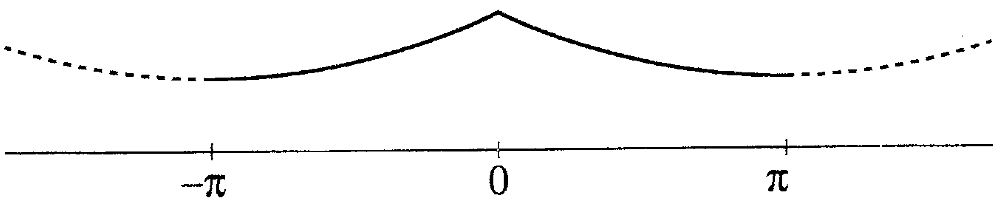

図 2: The wave profiles.

定理 2.1 いま, $\theta(s)$ の上界関数と下解関数が

$$0 \leq \underline{\theta}(s) \leq \theta(s) \leq \overline{\theta}(s),$$

と与えられているとき

$$J(\underline{\theta}, \overline{\theta})(s) \leq \theta(s) \leq J(\overline{\theta}, \underline{\theta})(s),$$

が成立する.

ここで

$$J(\phi, \varphi)(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{\pi} \cot \frac{t}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin \phi(w) dw}{\int_0^{\min(s,|s-t|)} \sin \varphi(w) dw + \int_{\min(s,|s-t|)}^{|s-t|} \sin \phi(w) dw} \right) dt.$$

証明　(1.2) より,

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \frac{1}{3\pi}\int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s-\cos t}\cdot\log\left(\int_0^t \sin\theta(w)dw\right)dt \\
&\le \frac{1}{3\pi}\int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s-\cos t}\cdot\log\left(\int_0^t \sin\left(1_{w<s}\cdot\theta(w)+1_{w\ge s}\cdot\overline{\theta}(w)\right)dw\right)dt \\
&= \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \cot\frac{t}{2}\cdot\log\left(\frac{\int_0^{\pi-|s+t-\pi|}\sin\left(1_{w<s}\cdot\theta(w)+1_{w\ge s}\cdot\overline{\theta}(w)\right)dw}{\int_0^{|s-t|}\sin\left(1_{w<s}\cdot\theta(w)+1_{w\ge s}\cdot\overline{\theta}(w)\right)dw}\right)dt \\
&= \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \cot\frac{t}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|}\sin\left(1_{w<s}\cdot\theta(w)+1_{w\ge s}\cdot\overline{\theta}(w)\right)dw}{\int_0^{\min(s,|s-t|)}\sin\theta(w)dw+\int_{\min(s,|s-t|)}^{|s-t|}\sin\overline{\theta}(w)dw}\right)dt \\
&\le \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \cot\frac{t}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|}\sin\overline{\theta}(w)dw}{\int_0^{\min(s,|s-t|)}\sin\underline{\theta}(w)dw+\int_{\min(s,|s-t|)}^{|s-t|}\sin\overline{\theta}(w)dw}\right)dt.
\end{aligned}$$

よって, $J(\overline{\theta},\underline{\theta})(s)$ は $\theta(s)$ の上界関数となる. 同じようにして, $J(\underline{\theta},\overline{\theta})(s)$ が下界関数となることも示される. □

3　解の存在範囲の限定

我々はまず, メインの証明に取り掛かる前の準備として, $0<s\le\pi$ において

(3.1)
$$0.0005\cdot 1_{s\le\pi/2}\le\theta(s)\le\pi/2,$$

なる不等式を用意した. ここで 1_A は条件 A が正のとき 1 を, 偽のときに 0 を取る関数である. これらは, 正値解の上界と下界を与えるものである.

右側の不等式は [1] による. 左側の不等式については以下で証明を与える.

補題 3.1 $0<s\le\pi/2$ なる s で $\theta(s)\ge 0.0005$ が成立する

証明　$a\le 0.99\cdot\pi/2$ を $0<s\le a$ なる s で $\theta(s)\ge 0.0005$ が成立するような正数とする. Amick et al.[2] により $\lim_{s\downarrow 0}\theta(s)=\pi/6$ が証明されているので. このような a は必ず存在する.

このとき定理 2.1 を用いると $a\le s\le\frac{100}{99}a$ なる s について

$$\begin{aligned}
\theta(s) &\geq \frac{1}{6\pi}\int_{s-a}^{s+a} \cot\frac{t}{2}\cdot\log\left(1+\frac{(a-|s-t|)\sin 0.0005}{|s-t|}\right)dt \\
&= \frac{1}{6\pi}\int_{0}^{a} \frac{\sin s}{\sin\frac{s-t}{2}\sin\frac{s+t}{2}}\cdot\log\left(1+\frac{a-t}{t}\sin 0.0005\right)dt \\
&= \frac{1}{6\pi}\int_{0}^{a} \frac{2}{s-t}\cdot\log\left(1+\frac{a-t}{t}\sin 0.0005\right)dt \\
&= \frac{1}{3\pi}\int_{0}^{1} \frac{1}{\frac{100}{99}-t}\cdot\log\left(1+\frac{1-t}{t}\sin 0.0005\right)dt = 0.000501\cdots \geq 0.0005.
\end{aligned}$$

よって帰納的に $0 < s \leq \pi/2$ なる s で $\theta(s) \geq 0.0005$.
なお, 最後の積分の計算には精度保証を用いている. □

次に我々は, (3.1) を初期値とし, 定理2.1を反復して用いることにより解の存在範囲を限定した.
その際, 汎関数 J はそのままでは計算機に乗せられないので

$$J(\phi,\varphi)(s) = \frac{1}{6\pi}\int_0^1 s\cot\frac{st}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\int_{1-t}^{\frac{\pi}{s}-\left|1+t-\frac{\pi}{s}\right|}\sin\phi(sw)dw}{\int_0^{1-t}\sin\varphi(sw)dw}\right)dt$$

$$+\frac{1}{6\pi}\int_{\frac{s}{\pi}}^{1}\frac{s}{t^2}\cot\frac{s}{2t}\cdot\log\left(1+\frac{\int_{\frac{1}{t}-1}^{\frac{\pi}{s}-\left|1+\frac{1}{t}-\frac{\pi}{s}\right|}\sin\phi(sw)dw}{\int_0^{\min\left(1,\frac{1}{t}-1\right)}\sin\varphi(sw)dw+\int_{\min\left(1,\frac{1}{t}-1\right)}^{\frac{1}{t}-1}\sin\phi(sw)dw}\right)dt,$$

と変形し, 小積分区間ごとに

$$\int_x^{x+\Delta x}\frac{p_3}{p_1+p_2(t-x)}\cdot\log\left(1+\frac{p_6+p_7(t-x)}{p_4+p_5(x+\Delta x-t)}\right)dt,$$

という形で評価して精度保証に持ち込んでいる.

これらの計算は全て浮動小数点演算の丸め誤差まで厳密に評価しながら行うので, 得られた計算結果は数学的にも正しいといえる.

4 解の一意性の証明

Stokes 極限波の解の存在範囲が十分に限定された後, 我々は縮小写像を評価する事により解の一意性を示すことができた.

まず, 以下のようにしてStokes極限波の解を挟み込む関数列を作る

$$\begin{cases} \overline{\theta}_{k+1}(s) = \min\left(\overline{\theta}_k(s),\ J(\overline{\theta}_k, \underline{\theta}_k)(s)\right) & (k = 0, 1, \cdots), \\ \underline{\theta}_{k+1}(s) = \max\left(\underline{\theta}_k(s),\ J(\underline{\theta}_k, \overline{\theta}_k)(s)\right) & (k = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

ここで n を固定し, $g(s)$ を $0 \leq s \leq \pi$ で正値を取る関数とすると, $k \geq n$ なる k について

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\theta}_{k+1} - \underline{\theta}_{k+1}}{g(s)} &\leq \frac{J(\overline{\theta}_k, \underline{\theta}_k)(s) - J(\underline{\theta}_k, \overline{\theta}_k)(s)}{g(s)} \\
&\leq \frac{1}{6\pi g(s)} \int_0^\pi \cot\frac{t}{2} \cdot \left(\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin\overline{\theta}_k(w)dw \cdot \int_0^{\min(s,|s-t|)} \left(\overline{\theta}_k(w) - \underline{\theta}_k(w)\right)dw}{\int_0^{\min(s,|s-t|)} \sin\underline{\theta}_k(w)dw + \int_{\min(s,|s-t|)}^{|s-t|} \sin\overline{\theta}_k(w)dw} \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \left(\overline{\theta}_k(w) - \underline{\theta}_k(w)\right)dw \right) \\
&\qquad \times \frac{dt}{\int_0^{\min(s,|s-t|)} \sin\overline{\theta}_k(w)dw + \int_{\min(s,|s-t|)}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin\underline{\theta}_k(w)dw} \\
&\leq \frac{1}{6\pi g(s)} \int_0^\pi \cot\frac{t}{2} \cdot \left(\frac{\int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} \sin\overline{\theta}_n(w)dw \cdot \int_0^{\min(s,|s-t|)} g(w)dw}{\int_0^{|s-t|} \sin\underline{\theta}_n(w)dw} \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|s-t|}^{\pi-|s+t-\pi|} g(w)dw \right) \cdot \frac{dt}{\int_0^{\pi-|s+t-\pi|} \sin\underline{\theta}_n(w)dw} \cdot \sup_{0<s\leq\pi} \frac{\overline{\theta}_k(s) - \underline{\theta}_k(s)}{g(s)}.
\end{aligned}$$

右辺を

$$\frac{G(\overline{\theta}_n, \underline{\theta}_n, g)(s)}{g(s)} \cdot \sup_{0<s\leq\pi} \frac{\overline{\theta}_k(s) - \underline{\theta}_k(s)}{g(s)},$$

と書くと

$$\sup_{0<s\leq\pi} \frac{\overline{\theta}_{k+1} - \underline{\theta}_{k+1}}{g(s)} \leq \sup_{0<s\leq\pi} \frac{G(\overline{\theta}_n, \underline{\theta}_n, g)(s)}{g(s)} \cdot \sup_{0<s\leq\pi} \frac{\overline{\theta}_k(s) - \underline{\theta}_k(s)}{g(s)},$$

が成立する. つまり, ある n に対して

$$\sup_{0<s\leq\pi} \frac{G(\overline{\theta}_n, \underline{\theta}_n, g)(s)}{g(s)} < 1$$

となるような $g(s)$ を見つけることができれば一意性が証明されたことになる.

どのようにしてこのような $g(s)$ は以下のような反復によって求めた.

$$\begin{cases} g_0(s) = 1, \\ g_{p+1}(s) = \dfrac{G(\overline{\theta}_n, \underline{\theta}_n, g_p)(s)}{\sup\limits_{0<s\leq\pi} G(\overline{\theta}_n, \underline{\theta}_n, g_p)(s)}. \end{cases}$$

実際に G の評価を行う際には J を計算した時と同様に, 積分範囲を $0 < t \leq s$ と $s \leq t \leq \pi$ に分けて計算している.

分点数 20000 で計算したところ, $n = 54$, $p = 18$ で一意性の証明に成功した.

参考文献

[1] C. J. Amick, Bounds for water waves, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 99(1987), pp. 91-114.

[2] C. J. Amick, L. E. Fraenkel, and J. F. Toland, On the Stokes' conjecture for the wave of extreme form, Acta Math., vol. 148(1982), pp. 193-214.

[3] K. Kobayashi, Numerical verification of the global uniqueness of a positive solution for Nekrasov's equation, J.J.I.A.M., Vol. 21 (2004). No. 2, pp. 181-218.

[4] A. I. Nekrasov, On waves of permanent type I, Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politc. Inst., vol. 3(1921), pp. 52-65. (in Russian)

[5] H. Okamoto and M. Shōji, The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific Publ. Co., Singapore (2001).

[6] J. F. Toland, On the existence of waves of greatest height and Stokes' conjecture, Proc. R. Soc. Lond., vol. A 363(1978), pp. 469-485.

[7] 中尾 充宏, 山本 野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.

[8] 大石 進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.