

Global phase portraits of planar autonomous half-linear systems

島根大学 総合理工学研究科 鬼塚政一 (Masakazu Onitsuka)
 島根大学 総合理工学部 山口亜矢 (Aya Yamaguchi)
 島根大学 総合理工学部 杉江実郎 (Jitsuro Sugie)

Department of Mathematics
 Shimane University

1 序文

本研究では, 2 階微分方程式

$$(\phi_p(\dot{x}))' + \alpha\phi_p(\dot{x}) + \beta\phi_p(x) = 0, \quad \cdot = \frac{d}{dt} \quad (1)$$

と同値な方程式系

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y), \quad \dot{y} = -\alpha y - \beta\phi_p(x) \quad (2)$$

を考え, この方程式系の解軌跡の挙動について考察する。ただし, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta (\neq 0) \in \mathbb{R}$ とし, 関数 $\phi_p(z)$ は $\phi_p(z) = |z|^{p-2}z$, ($p > 1$) で定義された実数値関数である。また, p^* は $1/p + 1/p^* = 1$ をみたす値とする。このとき, $\phi_{p^*}(y)$ は $y = \phi_p(\dot{x})$ の逆関数になる。もし, $p = 2$ ならば, 方程式 (1) と方程式系 (2) はそれぞれ線形微分方程式

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0 \quad (3)$$

と自励系

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - \beta x \quad (4)$$

になる。自励系 (4) は一般解を求めることができるので, その解の挙動は容易に知ることができる。このことは初歩的な書物で紹介されている。

方程式 (1) の非自明解を $x_1(t)$, $x_2(t)$ とするとき, 任意定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $cx_1(t)$ も方程式 (1) の解になることから, 方程式 (1) は半分線形微分方程式と呼ばれている。半分線形微分方程式の解の振動問題に関する研究は古くから行われている (例えば, [1, 2] を見よ)。本研究の目的は方程式系 (2) の解軌跡が自励系 (4) のそれと同様の挙動をとることを示すことである。

方程式系 (2) の原点の性質は次の 4 つに分類される。方程式系 (2) の原点が *saddle point* であるとは, 方程式系 (2) の原点近傍からはじまる正の半解軌跡 (resp., 負の半解軌跡) が原点に漸近する正の半解軌跡 (resp., 負の半解軌跡) と原点に漸近しない正の半解軌跡

(resp., 負の半解軌跡) を同時にもつことをいう。方程式系 (2) の原点が *center* であるとは、方程式系 (2) のすべての解軌跡が原点を含む閉軌跡になることをいう。方程式系 (2) の原点が *node* であるとは、方程式系 (2) の原点近傍からはじまるすべての解軌跡が原点の周囲を有限回まわって原点に漸近することをいう。方程式系 (2) の原点が *focus* であるとは、方程式系 (2) の原点近傍からはじまるすべての解軌跡が原点の周囲を無限回まわって原点に漸近することをいう。

よく知られているように、自励系 (4) の原点は次のように分類される。

Theorem A. 自励系 (4) の原点は次のように分類される:

- (i) $\beta < 0$ ならば, *saddle point* である;
- (ii) $\alpha = 0$ かつ $\beta > 0$ ならば, *center* である;
- (iii) $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha^2/4 \geq \beta > 0$ ならば, *node* である;
- (iv) $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha^2/4 < \beta$ ならば, *focus* である。

Theorem A の証明には、方程式 (3) に対する特性方程式

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \quad (5)$$

の判別式が重要な役割を果たす。すなわち、特性方程式 (5) の根を調べることによって、自励系 (4) の原点を分類することができる。この特性方程式 (5) は、一般に方程式 (3) に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入する方法と、自励系 (4) の原点でのヤコビ行列を求める方法の2つの手法により得ることができる。

本研究で対象とする方程式系 (2) は非線形である。本来、非線形な方程式系に対しては、原点でのヤコビ行列を求め、方程式系を線形(近似)化する手法がとられる。しかし、方程式系 (2) に対してこの手法を用いることはできない。なぜなら、 $p \neq 2$ のとき、方程式系 (2) の原点でのヤコビ行列を定義できないからである。本研究では、方程式系 (2) が線形化できないにもかかわらず、方程式系 (2) の解軌跡は自励系 (4) のそれと同様の挙動をとることを示す。そのため、方程式 (1) に対する特性方程式

$$(p-1)\phi_p(\lambda)\lambda + \alpha\phi_p(\lambda) + \beta = 0 \quad (6)$$

を考察する。この特性方程式は方程式 (1) に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入することにより得られる。もし、 $p = 2$ ならば、方程式 (6) は方程式 (5) になる。特性方程式 (6) の判別式を以下に示す。

Proposition 1.1. 方程式 (6) の根は次のように判別される:

- (i) $\beta < 0$ ならば, 異符号の2実根をもつ;
- (ii) $(|\alpha|/p)^p > \beta > 0$ の下で, $\alpha > 0$ ならば, 異なる負の2実根をもち, $\alpha < 0$ ならば, 異なる正の2実根をもつ;

- (iii) $(|\alpha|/p)^p = \beta$ の下で, $\alpha > 0$ ならば, 負の重根をもち, $\alpha < 0$ ならば, 正の重根をもつ;
- (iv) $(|\alpha|/p)^p < \beta$ ならば, 実根をもたない。

本研究では, この判別式を用いて方程式系 (2) の解軌跡の挙動を判定することにより, 次の主定理を得ることができる。

Theorem 1.2. 方程式系 (2) の原点は次のように分類される:

- (i) $\beta < 0$ ならば, *saddle point* である;
- (ii) $\alpha = 0$ かつ $\beta > 0$ ならば, *center* である;
- (iii) $\alpha \neq 0$ かつ $(|\alpha|/p)^p \geq \beta > 0$ ならば, *node* である;
- (iv) $\alpha \neq 0$ かつ $(|\alpha|/p)^p < \beta$ ならば, *focus* である。

Theorem 1.2 は完全に Theorem A を含んでいる。

準備として, 方程式系 (2) の解軌跡の大まかな挙動をとらえる。方程式系 (2) の第 1 式より, 方程式系 (2) の正の半解軌跡は上半平面では右側へ, 下半平面では左側へ流れる。よって, 方程式系 (2) の解軌跡が上半平面と下半平面の境界である x -軸と交わるかどうかに興味深い点になる。もし, 方程式系 (2) のある解軌跡が x -軸にあたるならば, 方程式系 (2) の第 1 式より, $y = 0$ で $\dot{x} = 0$ となるので, その解軌跡は x -軸と垂直に交わらなければならない。一方, 方程式系 (2) のある解軌跡が x -軸にあたらないならば, その解軌跡は方程式

$$(p-1) \frac{d}{dx} \phi_{p^*}(y) = -\alpha - \beta \frac{\phi_p(x)}{y} \quad (7)$$

の解 $y(x)$ に対応する。このとき, 方程式 (7) は解 $y(x)$ の傾きの度合を表している。

都合のため, 第 i 象限 ($i = 1, 2, 3, 4$) を Q_i と表し, 方程式系 (2) の解軌跡が垂直漸近線をもたないことを示す。方程式系 (2) の解軌跡が上半平面で垂直漸近線をもつと仮定する。下半平面の場合も同様に示すことができる。このとき, その解軌跡に対応する方程式 (7) の解を $y(x)$ とすれば, ある値 $x_1 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$y(x) \rightarrow +\infty \quad \text{as } x \rightarrow x_1$$

をみताす。すなわち

$$(p-1) \frac{d}{dx} \phi_{p^*}(y) = -\alpha - \beta \frac{\phi_p(x)}{y} \rightarrow -\alpha \quad \text{as } x \rightarrow x_1$$

である。ところが, 方程式 (7) の左辺の関数が解 $y(x)$ の傾きの度合いを表していることを考えると

$$(p-1) \frac{d}{dx} \phi_{p^*}(y) \rightarrow +\infty \quad \text{as } x \rightarrow x_1$$

となり、これに矛盾する。よって、方程式系 (2) の解軌跡は垂直漸近線をもたない。

本研究では、点 $P \in \mathbb{R}^2$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡と負の半解軌跡をそれぞれ $\gamma^+(P)$ と $\gamma^-(P)$ と表す。

方程式系 (2) の原点近傍における解軌跡の性質を定義する。方程式系 (2) が *property* (Z_i^+) , $i = 2, 4$ (resp., (Z_i^-) , $i = 1, 3$) をもつとは、 Q_i に接する x -軸上のある点 P_0 からはじまる $\gamma^+(P_0)$ (resp., $\gamma^-(P_0)$) が Q_i 内を通過して直接原点に漸近することをいう。

本論文では、第 2 節で、 $\beta > 0$ の場合の方程式系 (2) の解軌跡の大域的挙動について考察する。第 3 節では、方程式系 (2) が *property* (Z_i^-) , $i = 1, 3$ (resp., (Z_i^+) , $i = 2, 4$) をもつ、もしくはもたないための十分条件を与える。第 4 節では、第 2 節と第 3 節で得られた結果をもとに、Theorem 1.2 に証明を与える。

2 リヤプノフ関数

この節では、条件 $\beta > 0$ の下、方程式系 (2) に対するリヤプノフ関数を用いて、方程式系 (2) の解軌跡の大域的挙動について考察する。

$\beta > 0$ とする。このときの方程式系 (2) のリヤプノフ関数

$$V(x, y) = \int_0^y \phi_{p^*}(\eta) d\eta + \beta \int_0^x \phi_p(\xi) d\xi \quad (8)$$

を考える。方程式系 (2) の形より

$$\dot{V}_{(2)}(x, y) = \phi_{p^*}(y)\dot{y} + \beta\phi_p(x)\dot{x} = -\alpha|y|^{p^*} \quad (9)$$

である。 $V(x, y) = c \in \mathbb{R}$ とすれば、これは原点を含む卵型の閉曲線を描く。 $\alpha > 0$ のとき、 $\dot{V}_{(2)}(t, x, y) \leq 0$ となるので、閉曲線からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡はすべてこの閉曲線の内側に流れる。一方 $\alpha < 0$ のとき、 $\dot{V}_{(2)}(t, x, y) \geq 0$ となるので、閉曲線からはじまる方程式系 (2) のすべての正の半解軌跡はすべてこの閉曲線の外側に流れる。また、 $\alpha = 0$ のときは $\dot{V}_{(2)}(t, x(t), y(t)) \equiv 0$ となり、方程式系 (2) の解軌跡はすべて閉曲線になる。すなわち、方程式系 (2) の原点は *center* である。

次に、 $\alpha > 0$ または $\alpha < 0$ のときの方程式系 (2) の解の大域的漸近挙動について考察する。

Lemma 2.1. 定係数 $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ とする。このとき、方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定である。

証明の準備として、ラサールの不変性原理を紹介する。方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(0) = 0 \quad (10)$$

を考える。ただし、 $x, f \in \mathbb{R}^n$ で、 $f(x)$ は \mathbb{R}^n 上で連続であるとする。また、方程式 (10) の初期値に関する解の一意性は保障されているものとする。

Theorem B (ラサールの不変性原理). 方程式系 (10) に対するリヤプノフ関数 $V(\mathbf{x})$ を考え、 D_l を $V(\mathbf{x}) < l$ をみたす点 \mathbf{x} の集合とする。さらに、 D_l は空でない有界集合であり、 D_l の中で

$$V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{and} \quad \dot{V}_{(10)}(\mathbf{x}) \leq 0$$

をみたす。このとき、 R を D_l 中の $\dot{V}_{(10)}(\mathbf{x}) = 0$ となる点 \mathbf{x} の集合、 M を R に含まれる最大の不変集合とすると、 $\xi \in D_l$ なる (10) の解は時間が増加するにつれて、 M に漸近する。

Proof of Lemma 2.1. 条件 $\alpha > 0$ の下で、方程式系 (2) は方程式系 (10) に完全に含まれている。方程式系 (2) に対するリヤプノフ関数 (8) を考える。このとき、(9) より、 $\dot{V}_{(2)}(x, y) \leq 0$ であることから、 $V(x, y) = c \in \mathbb{R}$ とすれば、Theorem B の D_l に対応する空でない有界集合 D_c をとることができる。また、Theorem B の R には x -軸が対応し、 $\dot{V}_{(2)}(x, y) = 0$ をみたす最大の不変集合 M には $(0, 0)$ が対応している。よって、Theorem B より、方程式系 (2) のすべての解は原点に漸近する。また、(8) と (9) から、方程式系 (2) の原点は安定である。故に、方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定である。□

$\alpha < 0$ のとき、次のことが成り立つ。

Lemma 2.2. 定係数 $\alpha < 0$ かつ $\beta > 0$ とする。このとき、方程式系 (2) の任意の非自明解は非有界である。

Proof. 背理法により証明を与える。方程式系 (2) が有界な解 $(x(t), y(t))$ をもつと仮定する。よって、 $K > 0, t_0 > 0$ s.t.

$$x(t)^2 + y(t)^2 \leq K^2 \quad \text{for } t \geq t_0 \quad (11)$$

である。リヤプノフ関数 (8) を考えれば、(9) より

$$\dot{V}_{(2)}(x, y) > 0 \quad \text{if } y \neq 0$$

となるので、この不等式の両辺を t_0 から t まで積分すれば

$$V(x(t), y(t)) > V(x(t_0), y(t_0)) \quad \text{for } t > t_0$$

となる。すなわち、 $(x(t), y(t))$ は領域

$$\{(x, y) : V(x, y) \leq V(x(t_0), y(t_0))\}$$

for $t > t_0$ 内に入らない。したがって、 $\varepsilon_0 > 0$ (十分小) s.t.

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\varepsilon_0^2\} \subset \{(x, y) : V(x, y) \leq V(x(t_0), y(t_0))\}$$

となるように ε_0 を選ぶと条件 (11) より、解 $(x(t), y(t))$ は円環領域

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : 2\varepsilon_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq K^2\}$$

for $t \geq t_0$. 内にとどまりつづける。原点が方程式系 (2) の唯一の平衡点であることから、円環領域 R 内に平衡点は存在しない。したがって、方程式系 (2) のベクトル場を考えれば、解 $(x(t), y(t))$ に対応する方程式系 (2) の正の半解軌跡は原点の周囲を時計回りにする。これらのことと条件 (11) から、 $\{\tau_n\}, \{\sigma_n\}$ with $s_0 < \tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$ and $\tau_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ s.t.

$$\begin{aligned} x(\tau_n) = 0, \quad \sqrt{2}\varepsilon_0 < y(\tau_n) < K; \quad \varepsilon_0 < x(\sigma_n) < K, \quad y(\sigma_n) = \varepsilon_0; \\ \varepsilon_0 < y(t) < K \quad \text{for } \tau_n < t < \sigma_n \end{aligned} \quad (12)$$

となる 2 つの数列を選ぶことができる。よって

$$\varepsilon_0 < x(\sigma_n) - x(\tau_n) = \int_{\tau_n}^{\sigma_n} \phi_{p^*}(y(t)) dt < K^{p^*-1}(\sigma_n - \tau_n)$$

となり

$$\sigma_n - \tau_n > \frac{\varepsilon_0}{K^{p^*-1}} \quad (13)$$

である。(9) と (12), (13) より

$$\begin{aligned} V(x(\sigma_n), y(\sigma_n)) - V(x(t_0), y(t_0)) &= -\alpha \int_{t_0}^{\sigma_n} |y(t)|^{p^*} dt > -\alpha \sum_{k=1}^n \int_{\tau_k}^{\sigma_k} |y(t)|^{p^*} dt \\ &> -\alpha \varepsilon_0^{p^*} \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \tau_k) \\ &> -\frac{\alpha \varepsilon_0^{p^*+1}}{K^{p^*-1}} n \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

なる評価が得られる。ところが、解 $(x(t), y(t))$ が円環領域 R 内にとどまることから、 $V(x(t), y(t))$ も $t \geq t_0$ で有界となり、これに矛盾する。故に、方程式系 (2) の任意の非自明解は非有界である。□

Lemma 2.1 と Lemma 2.2 は、方程式系 (2) の正の半解軌跡が α の符号によって原点に漸近するか、無限遠点に流れるかが決まることを示している。当然、負の半解軌跡では逆の動きをすることになる。

3 原点近傍における解軌跡の挙動

この節では、方程式系 (2) が *property* (Z_j^-) , $j = 1, 3$ と (Z_k^+) , $k = 2, 4$ をもつ、もしくは、もたないための十分条件を与える。

Lemma 3.1. 条件

$$(|\alpha|/p)^p \geq \beta > 0 \quad (14)$$

の下で、方程式系 (2) は次のように区別される:

- (i) $\alpha > 0$ ならば、*property* (Z_2^+) と (Z_4^+) をもつ;

(ii) $\alpha < 0$ ならば, $property(Z_1^-)$ と (Z_3^-) をもつ。

Proof. (i) の前者のみ示す。他の場合も同様の議論をすることにより証明することができる。 $\alpha > 0, \beta > 0$ であるので, Lemma 2.1 より, 方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定である。背理法で示すため, 方程式系 (2) が $property(Z_2^+)$ をもたないと仮定する。すなわち, x -軸の負の部分上の任意の点 $P = (x_0, 0), x_0 < 0$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P)$ が Q_2 内を通過して y -軸の正の部分にあたるとする。このとき, $\gamma^+(P)$ は $y(x_0) = 0$ をみたす方程式 (7) の解 $y(x)$ に対応している。また, 条件 (14) と $\alpha > 0$ が成り立つことから, Proposition 1.1 の (ii), (iii) より, 方程式 (6) は少なくとも一つ負の実根をもつ。その根を $\lambda_0 < 0$ とおく。そこで, $\gamma^+(P)$ との比較のため関数

$$y = \phi_p(\lambda_0 x) \quad \text{for } x < 0$$

を考える。この関数は Q_2 内で x -軸に沿って原点に漸近する。よって, $\gamma^+(P)$ が x -軸の負の部分上からはじまり, y -軸の正の部分にあたることを考慮すると, $\gamma^+(P)$ は必ず $y = \phi_p(\lambda_0 x)$ と交わる。そこで, $\gamma^+(P)$ と $y = \phi_p(\lambda_0 x)$ の最後の交点を $(x_1, y(x_1)), x_0 < x_1 < 0$ とおく。このとき, x_1 は次をみたす。

$$y(x_1) = \phi_p(\lambda_0 x_1) \quad \text{and} \quad y(x) > \phi_p(\lambda_0 x) \quad \text{for } x_1 < x < 0.$$

よって, このことと方程式 (6) から

$$\begin{aligned} -(p-1)\lambda_0 x_1 &< (p-1)\phi_{p^*}(y(0)) - (p-1)\phi_{p^*}(y(x_1)) = -\alpha \int_{x_1}^0 dx - \beta \int_{x_1}^0 \frac{\phi_p(x)}{y(x)} dx \\ &< \alpha x_1 - \beta \int_{x_1}^0 \frac{\phi_p(x)}{\phi_p(\lambda_0 x)} dx = \alpha x_1 + \frac{\beta}{\phi_p(\lambda_0)} x_1 = -(p-1)\lambda_0 x_1 \end{aligned}$$

を得る。これは矛盾である。故に, 方程式系 (2) は $property(Z_2^+)$ をもつ。 \square

Lemma 3.2. 条件

$$(|\alpha|/p)^p < \beta \tag{15}$$

の下で, 方程式系 (2) は次のように区別される:

- (i) $\alpha > 0$ ならば, $property(Z_2^+)$ と (Z_4^+) をもたない;
- (ii) $\alpha < 0$ ならば, $property(Z_1^-)$ と (Z_3^-) をもたない。

Proof. (i) の前者のみ示す。他の場合も同様の議論をすることにより示すことができる。背理法で示すため, 方程式系 (2) が $property(Z_2^+)$ をもつと仮定する。すなわち, x -軸の負の部分上のある点 $P_0 = (x_0, 0), x_0 < 0$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_0)$ が Q_2 内を通過して原点に漸近すると仮定する。このとき, $\gamma^+(P_0)$ は $y(x_0) = 0$ をみたす方程式 (7) の解 $y(x)$ に対応している。

あるパラメータ $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$C_2(\lambda) = \{(x, y) : x < 0 \text{ and } y = \phi_p(\lambda x)\}$$

を定義すれば, $C_2(0)$ は x -軸の負の部分, $C_2(-\infty)$ は y -軸の正の部分になる。このとき

$$\bigcup_{\lambda=0}^{-\infty} C_2(\lambda) = Q_2$$

である。関数 $W_2(x, y)$ を

$$W_2(x, y) = \lambda \quad \text{if } (x, y) \in C_2(\lambda)$$

と定義する。また, Proposition 1.1 (iv) と条件 (15) より, 特性方程式 (6) は実根をもたないので, 不等式

$$(p-1)\phi_p(\lambda)\lambda + \alpha\phi_p(\lambda) + \beta > 0 \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R} \quad (16)$$

が成り立つ。注意として, (i) の証明において考える範囲は Q_2 のみである。よって, $C_2(\lambda)$ の定義から, λ は Q_2 上で常に負の値をとる。したがって, 方程式 (7) と不等式 (16) より

$$(p-1)\frac{d}{dx}\phi_{p^*}(\phi_p(\lambda x)) = (p-1)\lambda < -\alpha - \beta\frac{\phi_p(x)}{\phi_p(\lambda x)} = (p-1)\frac{d}{dx}\phi_{p^*}(y)\Big|_{y=\phi_p(\lambda x)}$$

が得られる。この不等式は, $C_2(\lambda)$ 上のすべての点において, $C_2(\lambda)$ の傾きが $\gamma^+(P_0)$ の傾きより常に小さいことを示している。 $\gamma^+(P_0)$ は領域 $\{(x, y) : x_0 \leq x < 0 \text{ and } 0 < y < \phi_p(\lambda x)\}$ から領域 $\{(x, y) : x_0 \leq x < 0 \text{ and } \phi_p(\lambda x) < y\}$ へ移動した後, 再び $C_2(\lambda)$ の曲線とは交わらない。したがって, x が増加すれば, $W_2(x, y(x))$ は減少する。これは, ある負の値 λ^* が存在して

$$W_2(x, y(x)) \searrow \lambda^* \quad \text{as } x \nearrow -0 \quad (17)$$

をみたすことを示している。このとき, 実は $\lambda^* = -\infty$ である。なぜなら, もし, $\lambda^* > -\infty$ と仮定すれば, 不等式 (16) と (17) から

$$\alpha < -(p-1)(\lambda^* + \varepsilon) - \frac{\beta}{\phi_p(\lambda^*)} \quad (18)$$

となるようなある正の値 ε を選ぶことができる。さらに, (17) と (18) より

$$W_2(x_1, y(x_1)) = \lambda^* + \varepsilon \quad \text{and} \quad \lambda^* < W_2(x, y(x)) < \lambda^* + \varepsilon \quad \text{for } x_1 < x < 0$$

をみたす値 $x_0 < x_1 < 0$ が決まる。これをいい換えると

$$y(x_1) = \phi_p((\lambda^* + \varepsilon)x_1) \quad \text{and} \quad \phi_p((\lambda^* + \varepsilon)x) < y(x) < \phi_p(\lambda^*x) \quad \text{for } x_1 < x < 0$$

である。よって、このことと方程式 (7) から

$$\begin{aligned} (p-1)\lambda^*x - (p-1)(\lambda^* + \varepsilon)x_1 &> (p-1)\phi_{p^*}(y(x)) - (p-1)\phi_{p^*}(y(x_1)) \\ &> -\alpha(x-x_1) - \beta \int_{x_1}^x \frac{\phi_p(\xi)}{\phi_p(\lambda^*\xi)} d\xi \\ &= -\alpha(x-x_1) - \frac{\beta}{\phi_p(\lambda^*)}(x-x_1) \quad \text{for } x_1 < x < 0 \end{aligned}$$

なる評価が得られる。しかしながら、(18) より、十分小さい $|x|$ に対して、この不等式は成り立たない。これは矛盾である。故に

$$W_2(x, y(x)) \searrow -\infty \quad \text{as } x \nearrow -0$$

であることがわかった。以上のことと、 $\gamma^+(P_0)$ が Q_2 内を通って原点に漸近することから、 $\gamma^+(P_0)$ は Q_2 内で y -軸の正の部分に沿って原点に漸近することになる。よって、 $\gamma^+(P_0)$ の傾きは原点に近づくにつれて $-\infty$ になる。すなわち

$$(p-1) \frac{d}{dx} \phi_{p^*}(y(x)) \searrow -\infty \quad \text{as } x \nearrow -0$$

である。しかしながら、方程式 (7) より

$$(p-1) \frac{d}{dx} \phi_{p^*}(y(x)) = -\alpha - \beta \frac{\phi_p(x)}{y(x)} > -\alpha \quad \text{for } x_0 \leq x < 0$$

であるので、これに矛盾する。故に、 $\gamma^+(P_0)$ は y -軸の正の部分と交わり、*property* (Z_2^+) をもたない。□

4 主定理の証明

この節では、第2節、第3節で得られた結果をもとに、方程式系 (2) の原点が *node* である、もしくは *focus* であるための十分条件を与え、最後に主定理の証明をする。

Theorem 4.1. 条件 (14) の下で、方程式系 (2) の原点は次のように分類される:

- (i) $\alpha > 0$ ならば、*stable node* である;
- (ii) $\alpha < 0$ ならば、*unstable node* である。

Proof. (i) のみを証明する。(ii) も同様の議論をすることにより証明することができる。条件 (14) と $\alpha > 0$ が成り立つことから、Proposition 1.1 の (ii), (iii) より、方程式 (6) は実根 $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ (重根の場合は等号成立) をもつ。このとき、 $\phi_p(\lambda_i x)$, $i = 1, 2$ は方程式 (7) の解になる。6つの領域

$$D_1 = \{(x, y): x \leq 0, y > \phi_p(\lambda_1 x)\}, \quad D_2 = \{(x, y): x \geq 0, \phi_p(\lambda_2 x) < y < 0\},$$

$$D_3 = \{(x, y) : x \geq 0, y < \phi_p(\lambda_1 x)\}, \quad D_4 = \{(x, y) : x \leq 0, 0 < y < \phi_p(\lambda_2 x)\},$$

$$D_5 = \{(x, y) : x > 0, \phi_p(\lambda_1 x) < y < \phi_p(\lambda_2 x)\} \subset Q_4 \quad \text{if } \lambda_1 < \lambda_2,$$

$$D_6 = \{(x, y) : x < 0, \phi_p(\lambda_2 x) < y < \phi_p(\lambda_1 x)\} \subset Q_2 \quad \text{if } \lambda_1 < \lambda_2,$$

を考える。条件 (14) と $\alpha > 0$ が成り立つことから、Lemma 2.1 より、方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定である。したがって、 $\lambda_1 < \lambda_2$ のとき、方程式系 (2) のベクトル場と解の一意性より、領域 D_5 (D_6) からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡はすべて領域 D_5 (D_6) 内を通過して原点に漸近する。

さて、背理法で示すため、原点近傍上のある点 $P_0 \in D_1 \cup Q_2 \cup D_2$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_0)$ が原点の周囲を無限回まわって原点に漸近すると仮定する。 $D_3 \cup Q_3 \cup D_4$ からはじまる場合も同様に証明できる。 $P_0 \in D_1 \cup Q_2$ のとき、 $\gamma^+(P_0)$ は必ず x -軸の正の部分と交わることになる。条件 (14) と $\alpha > 0$ が成り立つので、Lemma 3.1 (i) より、方程式系 (2) は *property* (Z_4^+) をもつ。すなわち、 x -軸の正の部分上のある点 $P_1 = (x_1, 0)$, $x_1 > 0$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_1)$ は領域 Q_4 内を通過して原点に漸近する。もし、 $\gamma^+(P_0)$ が点 P_1 を通るならば、方程式系 (2) の解の一意性より、領域 Q_4 内を通過して原点に直接漸近する。これは、背理法の仮定に矛盾する。一方、 $\gamma^+(P_0)$ が点 P_1 以外の x -軸の正の部分と横切るならば、方程式系 (2) のベクトル場と解の一意性から、領域 Q_4 内を通過して原点に直接漸近する。これも、背理法の仮定に矛盾する。同様の理由から、 $P_0 \in D_2$ のときも領域 Q_4 内を通過して原点に直接漸近することになるので、矛盾。よって、方程式系 (2) の原点近傍からはじまる任意の正の半解軌跡は領域 Q_4 内を通過して原点に漸近するかもしれないが、領域 Q_2 内を通過して原点に漸近する。故に、方程式系 (2) の原点は *stable node* である。

Theorem 4.2. 条件 (15) の下で、方程式系 (2) の原点は次のように分類される：

- (i) $\alpha > 0$ ならば、*stable focus* である；
- (ii) $\alpha < 0$ ならば、*unstable focus* である。

Proof. (i) のみを証明する。そのほかの場合も同様の議論をすることにより、証明することができる。ある原点近傍上の点 $P_0 = (x_0, y_0) \in Q_1$ からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_0)$ を考える。その他の象限の点からはじまる正の半解軌跡の場合も同様に証明できる。Lemma 2.1 と $\alpha > 0$ より、方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定である。このことと、方程式系 (2) のベクトル場から、 $\gamma^+(P_0)$ は Q_1 内で原点に漸近することなく、必ず x -軸の正の部分と垂直に交わる。このとき、 $\gamma^+(P_0)$ は Q_1 から Q_4 へ移動することになる。また、Lemma 3.2 (i) より、 Q_4 へ移動した $\gamma^+(P_0)$ は y -軸の負の部分にあたる。よって、方程式系 (2) のベクトル場を考慮すれば、 $\gamma^+(P_0)$ は Q_4 から Q_3 へ動く。同じ要領で $\gamma^+(P_0)$ は Q_3 から Q_2 へ移り、さらに、 Q_2 から Q_1 へ戻ってくる。ただし、方程式系 (2) の原点は大域的漸近安定であることから、 Q_1 へ戻ってきた $\gamma^+(P_0)$ は初期点 P_0 よりも原点に近い場所を通る。これを繰り返せば、 $\gamma^+(P_0)$ は無限回時計まわりしながら原点に漸近することがわかる。故に、方程式系 (2) の原点は *stable focus* である。 \square

Proof of Theorem 1.2. (i) を証明する。 $\beta < 0$ のとき, Proposition 1.1 の (i) より, 方程式 (6) は異符号の 2 実根 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ をもつので, 方程式 (1) は関数 $e^{\lambda_1 t}$ と関数 $e^{\lambda_2 t}$ を解にもつ。したがって, $(e^{\lambda_1 t}, \lambda_1 e^{\lambda_1 t})$ と $(e^{\lambda_2 t}, \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$ は方程式系 (2) の解になる。 $\lambda_1 < 0$ であることから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = 0$$

となるので, 解 $(e^{\lambda_1 t}, \lambda_1 e^{\lambda_1 t})$ に対応し, 原点近傍上の点 P_1 からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_1)$ は原点に漸近する。一方, $\lambda_2 > 0$ であることから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = \infty$$

となるので, 解 $(e^{\lambda_2 t}, \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$ に対応し, 原点近傍上の点 P_2 からはじまる方程式系 (2) の正の半解軌跡 $\gamma^+(P_2)$ は無限遠点に流れる。すなわち, $\gamma^+(P_2)$ は原点に漸近しない。よって, 方程式系 (2) は原点に漸近する正の半解軌跡と漸近しない正の半解軌跡を同時にもつので, 方程式系 (2) の原点は *saddle point* である。

(ii) は 2 節前半ですでに証明した通りである。(iii), (iv) は Theorem 3.3 と Theorem 3.4 の結果より明らかである。よって, 証明終わり。 \square

References

- [1] R. P. Agarwal, S. R. Grace and D. O'regan. *Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations* (Kluwer, 2002).
- [2] Á. Elbert and A. Schneider. Perturbations of the half-linear Euler differential equation, *Results Math.* **37** (2000), 56–83.
- [3] J. Sugie, Homoclinic orbits in generalized Liénard systems, *J. Math. Anal. Appl.* (2005), in press.