

差分方程式における周期軌道の安定化法について

静岡大学・工学部 太田 年彦 (Toshihiko Ohta)
 高橋 康介 (Kousuke Takahashi)
 宮崎 倫子 (Rinko Miyazaki)
 Faculty of Engineering,
 Shizuoka University

1 序文

次のスカラー差分方程式を考えよう.

$$(E) \quad x(t+1) = f(x(t)).$$

ここで, f はある実数の区間 I から I への連続的微分可能な関数とする. また, 方程式 (E) が周期 m の不安定な周期軌道 $\mathcal{O}^m = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ を持つものと仮定する.

この不安定周期軌道を安定化する方法として, Delayed Feedback 制御 (DFC) が知られており, それは次の方程式によって与えられる.

$$(DF) \quad x(t+1) = f(x(t)) + u(t).$$

ここで, $u(t)$ は制御入力であり, K をゲイン係数として, 通常

$$(DF0) \quad u(t) = K(x(t) - x(t-m))$$

で与えられる. DFC は, 安定化したい軌道が未知であるような場合に特に有効である. 例えば, カオスシステムには無数の不安定周期軌道が存在するが, それを解析的もしくは数値的に求めることは非常に困難である. また, DFC は, 元来連続系の不安定周期軌道を安定化する方法として, Pyragas [4] によって提案されたものであるが, 近年, カオス制御の分野では差分方程式に対しても適用されるようになってきている [3].

一方, Buchner ら [1] は, ロジスティック写像に次の制御入力

$$(DF1) \quad u(t) = -K(f(x(t)) - x(t-m+1)), \quad K \neq 1$$

を加えて得られた軌道の性質を調べている. このような制御方法のことを彼らは “echo type feedback” (反響型フィードバック) と呼んでいる.

(E) の周期 m の不安定軌道を安定化するという考え方に立つと, (DF0) よりも (DF1) の方が理にかなっているように思える. しかし, 殆どの文献は (DF0) を採用し解析を行っている. 制御器を設計するといった観点からは, (DF1) は非現実的な設定なのかもしれないが, 本稿ではあえて (DF1) による安定化可能な条件について考え, (DF0) を採用した場合と比較することによりその有効性を示すことを目的としている. 実際, (E) の不安定軌道 \mathcal{O}^m の制御入力 (DF1) による安定化可能性に関して, $m = 1, 2, 3$ の場合について得られた結果が以下の定理 1, 2, 3 である. 本稿第 2 節では, これらの定理の証明を与え, 第 3 節では, 制御入力として (DF0) を採用した場合の比較

を行い, 限定された場合ではあるが (DF1) の方が有効であることを示す. なお, 各定理では次の共通の関数

$$\varphi(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

が用いられている.

定理 1. (E) の不動点 $\mathcal{O}^1 = \{x^*\}$ について, $q = f'(x^*)$ とおき, $|q| > 1$ を仮定する. このとき, 次のいずれかの条件が成り立てば (DF) & (DF1) によって \mathcal{O}^1 は安定化可能である.

(i) $q > 1$ のとき $1 < K < \varphi(-q)$.

(ii) $q < -1$ のとき $\varphi(-q) < K < 1$.

定理 2. (E) の 2 周期軌道 $\mathcal{O}^2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ について, $q = f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)$ とおき, $|q| > 1$ を仮定する. このとき, (DF) & (DF1) による \mathcal{O}^2 の安定化について以下が成り立つ.

(i) $q > 1$ のとき安定化できない.

(ii) $q < -1$ のとき $\varphi(\sqrt{-q}) < K < 1$ であれば安定化できる.

定理 3. (E) の 3 周期軌道 $\mathcal{O}^3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ について, $q = f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3)$ とおき, $|q| > 1$ を仮定する. このとき, (DF) & (DF1) による \mathcal{O}^3 の安定化について以下が成り立つ.

(i) $q > 1$ のとき安定化できない.

(ii) $-27 < q < -1$ のとき $\varphi(\sqrt[3]{-q}) < K < \min\{1, \frac{1}{\sqrt[3]{-q-1}}\}$ であれば安定化できる.

注意 1. 定理 1 における仮定 $|q| > 1$ は, それぞれ, (E) の双曲型周期軌道 \mathcal{O}^1 が不安定となるための必要十分条件であることに注意しよう. 同様に, 定理 2 においては \mathcal{O}^2 , 定理 3 においては, \mathcal{O}^3 が不安定となるための必要十分条件である.

2 定理の証明

定理 1 の証明

(DF) & (DF1) において $m = 1$ の場合であるから,

$$x(t+1) = (1-K)f(x(t)) + Kx(t).$$

ここで, $g(x) = (1-K)f(x) + Kx$ とおくと,

$$g'(x) = (1-K)f'(x) + K$$

である. (DF) & (DF1) において,

$$|g'(x^*)| = |(1-K)q + K| < 1$$

を満たすとき, 不動点 x^* は漸近安定である. つまり, (E) の不安定軌道 \mathcal{O}^1 が制御項 (DF1) によって安定化されたことになる. これより, 定理のふたつの条件 (i) および (ii) が得られることは明らかである. □

定理 2 の証明

(DF) & (DF1) において $m = 2$ の場合であるから,

$$x(t+1) = f(x(t)) - K(f(x(t)) - x(t-1)).$$

これを

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x(t-1) \end{cases}$$

とおき, 2次元化すると,

$$(DF2) \quad \begin{cases} x_1(t+1) = f(x_1(t)) - K(f(x_1(t)) - x_2(t)) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{cases}$$

となる. 以下の証明では, JF を (DF2) の右辺のヤコビアン行列を表すものとする. (E) の 2 周期軌道 \mathcal{O}^2 は (DF) & (DF1) の 2 周期軌道でもあり, これに対応する (DF2) の 2 周期軌道は,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right\}$$

となり, これを $\tilde{\mathcal{O}}^2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ とおく. $\tilde{\mathcal{O}}^2$ が漸近安定であれば, (DF) & (DF1) の軌道 \mathcal{O}^2 漸近安定であることは明らかであり, これは, (E) の不安定軌道 \mathcal{O}^2 が安定化できたことになる. 一方, $\tilde{\mathcal{O}}^2$ の安定性は, 行列 $\prod_{i=1}^2 JF(\beta_i) = JF(\beta_2)JF(\beta_1)$ の固有値の大きさによって判断できることに注意しよう. 具体的には, 全ての固有値の大きさが 1 より小さいときに漸近安定となり, 1 より大きな固有値が存在すれば不安定である.

$$\prod_{i=1}^2 JF(\beta_i) = JF(\beta_2)JF(\beta_1) = \begin{pmatrix} (1-K)^2q + K & K(1-K)f'(\alpha_2) \\ (1-K)f'(\alpha_1) & K \end{pmatrix}$$

より, 固有方程式は,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \{(1-K)^2q + 2K\}\lambda + K^2 = 0$$

となる. Jury の安定判別法 ([2] 参照) より, 全ての固有値の大きさが 1 より小さくなるための必要十分条件は以下の 3 つの条件を満たすことである.

$$(2.1) \quad q < 1,$$

$$(2.2) \quad (1-K)^2q > -(1+K)^2,$$

$$(2.3) \quad -1 < K < 1.$$

(i) $q > 1$ のとき, $P(1) = -(1-K)^2q < 0$ であり, これは 1 より大きな実固有値を持つことを意味している. したがって, 安定化できない.

(ii) $q < -1$ のとき, (2.1) は満たしている. また, (2.2) かつ (2.3) と同値な条件として $\varphi(\sqrt{-q}) < K < 1$ が得られることは容易に分る. \square

定理 3 の証明

(DF) & (DF1) において $m = 3$ の場合であるから,

$$x(t+1) = f(x(t)) - K(f(x(t)) - x(t-2))$$

これを,

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x(t-1) \\ x_3(t) = x(t-2) \end{cases}$$

とおき, 3次元化すると,

$$(DF3) \quad \begin{cases} x_1(t+1) = f(x_1(t)) - K(f(x_1(t)) - x_3(t)) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases}$$

となる. 以下の証明では, JF を (DF3) の右辺のヤコビアン行列を表すものとする. (E) の 3 周期軌道 \mathcal{O}^3 は (DF) & (DF1) の 3 周期軌道でもあり, これに対応する (DF3) の 3 周期軌道は,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right\}$$

となり, これを $\tilde{\mathcal{O}}^3 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ とおく. 定理 2 の証明と同様, $\tilde{\mathcal{O}}^3$ が漸近安定であれば, (E) の不安定軌道 \mathcal{O}^3 が安定化できたことになる. そこで, 行列 $\prod_{i=1}^3 JF(\beta_i) = JF(\beta_3)JF(\beta_2)JF(\beta_1)$ を求めると,

$$\prod_{i=1}^3 JF(\beta_i) = \begin{pmatrix} (1-K)^3 q + K & K(1-K)f'(\alpha_3) & K(1-K)^2 f'(\alpha_2)f'(\alpha_3) \\ (1-K)^2 f'(\alpha_1)f'(\alpha_2) & K & K(1-K)f'(\alpha_2) \\ (1-K)f'(\alpha_1) & 0 & K \end{pmatrix}$$

が得られる. これより, 固有方程式は,

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \{3K + (1-K)^3 q\} \lambda^2 + 3K^2 \lambda - K^3$$

となる. Jury の安定判別法より,

$$(2.4) \quad q < 1,$$

$$(2.5) \quad (1-K)^3 q > -(1+K)^3,$$

$$(2.6) \quad -1 < K < 1,$$

$$(2.7) \quad \frac{(K^2 - 1)(K^4 + 4K^2 + 1)}{(1-K)^3} < -K^3 q < (1+K)^3.$$

(i) $q > 1$ のとき, $P(\lambda) = 0$ の解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (重解も数える) と,

$$P(0) = (-1)^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (-K)^3$$

より, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = K^3$ を得る. これより, $|K| > 1$ とすると, $|\lambda_j| > 1$ なる j が存在することとなる. したがって, $|K| > 1$ のときは安定化できない. $-1 \leq K < 1$ とすると, $P(1) = (1-K)^3(1-q) < 0$ であるから, $P(\lambda) = 0$ は 1 より大きな実固有値を少なくともひとつもつ. つまり, この場合にも安定化できない. 以上より, いかなる $K \neq 1$ に対しても安定化はできない.

(ii) $q < -1$ のとき, (2.4) は満たしている. また, (2.5), (2.6) かつ (2.7) と同値な条件が

$$-8 \leq q < -1 \quad \text{かつ} \quad \varphi(\sqrt[3]{-q}) < K < 1$$

または

$$-27 < q < -8 \quad \text{かつ} \quad \varphi(\sqrt[3]{-q}) < K < \sqrt[3]{\frac{1}{-q-1}}$$

を満たすこと, すなわち

$$-27 < q < -1 \quad \text{かつ} \quad \varphi(\sqrt[3]{-q}) < K < \min\left\{1, \sqrt[3]{\frac{1}{-q-1}}\right\}$$

であることは容易に分る. □

3 2つの手法の比較

本節では (DF) & (DF0) による制御法を**通常の DFC**, (DF) & (DF1) による制御法を**反響型 DFC**と呼ぶことにする. 通常の DFC における安定化については, Morgül ら [3] が一般の周期 m に対して固有方程式を与えている. その結果を利用して, 反響型 DFC による安定化法の有効性について考察しよう.

3.1 不動点の安定化

通常の DFC に対しては, 固有方程式が

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (f'(x^*) + K)\lambda + K$$

で与えられる. $f'(x^*) = q$, $|q| > 1$ のもとでは, 通常の DFC による (E) の不安定不動点 \mathcal{O}^1 の安定化について以下の結果が導かれる.

命題 1. (E) の不動点 $\mathcal{O}^1 = \{x^*\}$ について, $q = f'(x^*)$ とおき, $|q| > 1$ を仮定する. このとき, 通常の DFC による \mathcal{O}^1 の安定化について以下が成り立つ.

- (i) $q > 1$ または $q < -3$ のとき安定化できない.
- (ii) $-3 < q < -1$ のとき $\frac{-q-1}{2} < K < 1$ であれば安定化できる.

定理 1 の結果と比較すると, $-3 < q < -1$ の場合には安定化可能なゲイン係数 K の範囲が広くなると言う利点はあるが, $q > 1$ や $q < -3$ のときには反響型フィードバックでは安定化できたことを考え合わせると, 反響型フィードバックの方が適用範囲が広いと言う点で有効であると言える.

3.2 2周期軌道の安定化

通常のDFCに対しては、固有方程式が

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (f'(\alpha_1) + K)(f'(\alpha_2) + K)\lambda^2 + K\{(f'(\alpha_1) + K) + (f'(\alpha_2) + K)\}\lambda - K^2$$

で与えられる.

$$q = f'(\alpha_1)f'(\alpha_2), \quad p = f'(\alpha_1) + f'(\alpha_2)$$

とおくと, Jury の安定判別条件から全ての固有値の大きさが 1 より小さくなるための必要十分条件は以下の通りである.

$$(3.1) \quad q < 1,$$

$$(3.2) \quad 4K^2 + 2pK + 1 + q > 0,$$

$$(3.3) \quad -1 < K < 1,$$

$$(3.4) \quad |K^4 + pK^3 + (q - 2)K^2 - pK| < 1 - K^4.$$

$|q| > 1$ を仮定しよう. まず, $q > 1$ のとき, $P(1) = 1 - q < 0$ となり 1 より大きな実固有値を持つこととなり, 反響型DFCと同様安定化できないことは明らかである.

$q < -1$ のとき, これ以上一般論を展開することにより安定化可能な領域を反響型DFCの結果と比較するのは困難であると思われる. そこで, パラメータ $p = f'(\alpha_1) + f'(\alpha_2)$ を -2 に固定して考えることとする. すなわち, 以下では

$$(3.5) \quad p = -2$$

を仮定する. (3.2) より,

$$0 > 1 + q > -4K(K - 1)$$

が成り立つことに注意すると, $K < 0$ または $1 < K$ であるから, (3.3) は

$$(3.6) \quad -1 < K < 0$$

と書き換えることができる. また, (3.4) については, 左辺の絶対値の中身は,

$$K^4 - 2K^3 + (q - 2)K^2 + 2K = -K^4 + qK^2 + 2K(K - 1)^2(K + 1) < 0.$$

となる. したがって, (3.4) は,

$$(3.7) \quad -2K^3 + (q - 2)K^2 + 2K + 1 > 0$$

と書き換えることができる. つまり, $q < -1$ のとき, (3.5) のもとでは, Jury の条件は (3.2), (3.6), (3.7) で置き換えることができる. 以上をまとめたものが次の命題である.

命題 2. (E) の 2 周期軌道 $\mathcal{O}^2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ について, $q = f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)$ とおき, $|q| > 1$ を仮定する. 通常のDFCによる \mathcal{O}^2 の安定化について以下が成り立つ.

(i) $q > 1$ のとき安定化できない.

(ii) $q < -1$, $p = f'(\alpha_1) + f'(\alpha_2) = -2$ のとき (3.2), (3.6), (3.7) を全て満たせば安定化できる.

命題 2 の条件 (ii) が与えるパラメータ領域は, 図 1 において曲線 $C_1: 4K^2 - 4K + 1 + q = 0$, $C_2: -2K^3 + (q-2)K^2 + 2K + 1 = 0$ および直線 $l: q = -1$ によって囲まれる領域である. ちなみに, 2つの曲線 C_1, C_2 が交わるのは, $q = -2.61803\dots$, $K = 0.309017\dots$ のときである. 一方, 定理 2 の条件 (ii) を図示すると, 図 2 において曲線 $C_3: K = \varphi(\sqrt{-q})$, 直線 l および直線 $K = 1$ によって囲まれる領域である. なお, 通常の DFC では K が負の値で与えられるのに対して, 反響型 DFC では正で与えられるので, 比較の便宜を図り, 図 2 における縦軸は $-K$ にとっている. 図 3 は図 1 と図 2 を重ね合わせたものである. 図 3 より明らかに反響型 DFC の方が有効であることが分る.

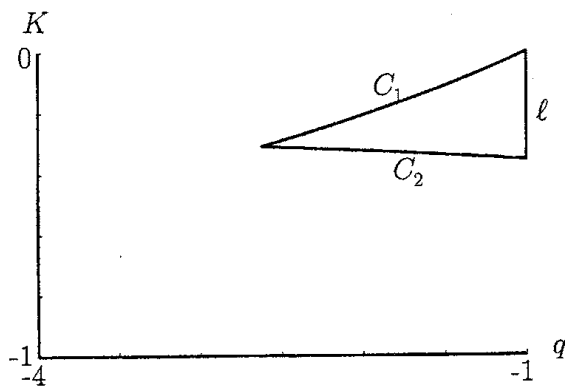


図 1. 通常の DFC による安定化可能領域.

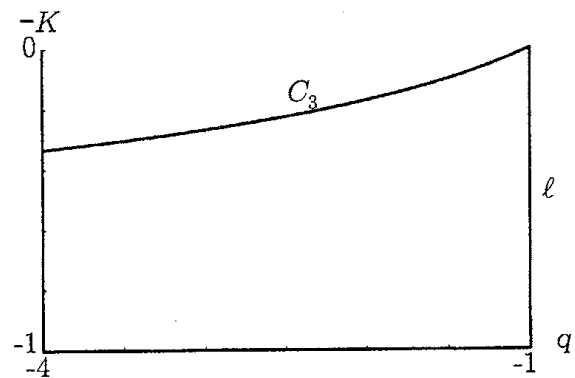


図 2. 反響型 DFC による安定化可能領域.

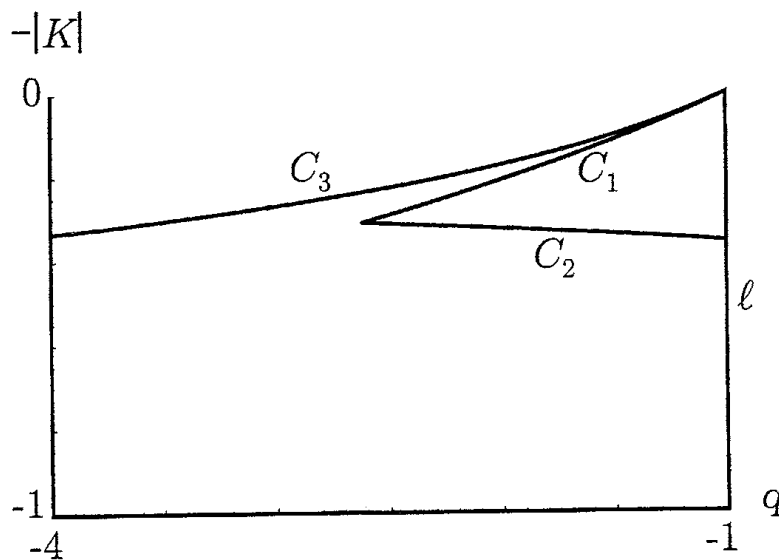


図 3. 2つの安定化可能領域の比較.

注意 2. 命題 2 の (ii) では, $p = f'(\alpha_1) + f'(\alpha_2) = -2$ と固定したが, それ以外の場合についてももちろん調べる必要はある. 非線形差分方程式の代表的な例としてロジスティック写像 $f(x) = \mu x(1-x)$, ($0 \leq x \leq 1$, $0 < \mu \leq 4$) が知られているが, この場合, $1 + \sqrt{6} < \mu \leq 4$ で不安定な 2 周期

軌道 $\mathcal{O}^2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ($\alpha_1 = \{\mu+1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}\}/(2\mu)$, $\alpha_2 = \{\mu+1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}\}/(2\mu)$) が存在する。そして、 μ の値に関わらず、 $p = (\mu - 2\mu\alpha_1) + (\mu - 2\mu\alpha_2) = -2$ であることも容易に確認できる。

参考文献

- [1] Buchner, T. & Żebrowski, J. J., Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos, *Phys. Rev. E*, **63**, (2000), 6210.
- [2] Elaydi, S., *An Introduction to Difference Equations, 1st. Ed.*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] Morgül, Ö, On the stability of delayed feedback controllers, *Phys. Lett. A*, **314**, (2003), 278-285.
- [4] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, **170**, (1992), 421-428.