数理解析研究所講究録 1445 巻 2005 年 19-28

ペキシダー化された波動型偏差分関数方程式と関連する関数方程式

Shigeru Haruki (岡山理科大学 春木 茂)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Okayama University of Science, JAPAN.

Shin-ichi Nakagiri (神戸大学工学部 中桐 信一)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, JAPAN.

1. 波動型偏差分関数方程式

次の波動型偏差分関数方程式を考える。

$$f(x+t,y)+f(x-t,y)=f(x,y+t)+f(x,y-t). \tag{W1}$$

論文 J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič 1968 [1, p.46] の出現以来、上の偏差分関数方程式 $(W1)$ 及びその類似の波動型関数方程式に対し、その代数的および幾何学構造が多くの文献で研究されている。例えば、論文 M. A. McKiernan 1972 [9]、D. Girod 1973 [2] 及び H. Haruki 1970 [4] とそこで引用されている文献を見られたい。

$(G,+)$ を 2 で割れるアーベル群とし、 C を複素数体とする。このノートの最初の目的は、次の 2 つの関数方程式が $f: G\times G \longrightarrow C$ なる仮定のもとで波動型関数方程式 $(W1)$ と同値である事を示す事である。

$$\begin{aligned} &f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)\\ &\qquad =f(x+2t,y)+f(x-2t,y)+2f(x,y). \end{aligned} \tag{W2}$$

$$\begin{aligned} &f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)\\ &\qquad =f(x,y+2t)+f(x,y-2t)+2f(x,y). \end{aligned} \tag{W3}$$

さて、論文 [4, p.118] 及び [9, p.263] において次のことが示されている。変換

$$g(x,y)=f(x+y,x-y) \tag{1.1}$$

により、波動型関数方程式 $(W1)$ は次の関数方程式に変換される。

$$g(x+t,y+t)+g(x-t,y-t)=g(x+t,y-t)+g(x-t,y+t). \qquad (W4)$$

それ故、方程式 $(W1)$ と $(W4)$ は変換 (1.1) により同じものと見なせる。

未発表ノート H. Haruki [3]（日付 Jan. 24, 1969）において、彼は次の未解決問題を提示している。

(H-1) 次の関数方程式の解を求めよ。

$$f_1(x+t,y+t)+f_2(x-t,y-t)=f_1(x+t,y-t)+f_2(x-t,y+t). \qquad (P1)$$

このノートの次の目的は、上の問題 (H-1) を以下の４節で得られる一般的な結果を用いる事なく解く事である。即ち、３節において $f_1,\ f_2 : G\times G \longrightarrow C$ なる仮定のもとで、$(P1)$ の一般解を求める。H. Haruki はまた [3]（日付 March 14, 1968）において次の未解決問題を挙げている。

(H-2) 次の関数方程式を満足する関数 f_1, f_2, f_3 及び f_4 を、全ての f_1, f_2, f_3, f_4 が連続であるという仮定のもとで決定せよ。

$$f_1(x+t,y)+f_2(x-t,y)=f_3(x,y+t)+f_4(x,y-t). \qquad (P2)$$

このノートでは、更に一般的に $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 : G\times G \longrightarrow C$ なる仮定のもとで上の未解決問題 (H-2) を解く。その際我々は、f_1, f_2, f_3, f_4 の連続性を仮定しない。方程式 $(P1)$ と $(P2)$ は波動型関数方程式 $(W1)$ のペキシダー化である。最終第４節で、ペキシダー化された一般的な波動型関数方程式 $(P2)$ を解く事がこのノートの３番目のそして主たる目的である。

2. 関数方程式 (W2) および (W3)

まず、任意の $t\in G$ に対して次のシフト作用素 X^t 及び Y^t を導入しよう。

$$X^t f(x,y)=f(x+t,y), \quad Y^t f(x,y)=f(x,y+t).$$

特に $I=X^0=Y^0$ は、恒等作用素を表す。ここで、シフト作用素の族で生成された線形変換の環は、結合的かつ分配的である事を注意しておく。

このノートの最初の結果は、次の定理で与えられる。

定理 2.1. 仮定 $f : G\times G \longrightarrow C$ のもとで、関数方程式 $(W2)$ および $(W3)$ は、共に波動型関数方程式 $(W1)$ と同値である。

（証明） 方程式 $(W1)$ を作用素で書き直せば

$$(X^t + X^{-t})f(x,y) = (Y^t + Y^{-t})f(x,y) \tag{2.1}$$

となる。これに作用素 $Y^t + Y^{-t}$ を掛けると次のようになる。

$$(X^t + X^{-t})(Y^t + Y^{-t})f(x,y) = (Y^t + Y^{-t})^2 f(x,y).$$

展開すると

$$(X^tY^t + X^tY^{-t} + X^{-t}Y^t + X^{-t}Y^{-t})f(x,y) = (Y^{2t} + Y^{-2t} + 2)f(x,y) \tag{2.2}$$

となり、これは $(W2)$ の作用素形になっている。よって、方程式 $(W1)$ から方程式 $(W2)$ が導かれた。逆に、(2.2) の両辺を２乗して

$$\begin{aligned}(X^{2t}Y^{2t} + X^{2t}Y^{-2t} + X^{-2t}Y^{2t} + X^{-2t}Y^{-2t} + 2X^{2t} + 2X^{-2t} + 2Y^{2t} + 2Y^{-2t} + 4)f(x,y)\\ = (Y^{4t} + Y^{-4t} + 4Y^{2t} + 4Y^{-2t} + 6)f(x,y)\end{aligned} \tag{2.3}$$

が得られる。次に $(W2)$ において t を $2t$ に置き換えると次式が得られる。

$$\begin{aligned}(X^{2t}Y^{2t} + X^{2t}Y^{-2t} + X^{-2t}Y^{2t} + X^{-2t}Y^{-2t})f(x,y)\\ = (Y^{4t} + Y^{-4t} + 2)f(x,y).\end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.3) から (2.4) をひくと

$$(2X^{2t} + 2X^{-2t})f(x,y) = (2Y^{2t} + 2Y^{-2t})f(x,y)$$

となる。ここで $2t$ を t で置き換えると方程式 $(W1)$ が得られる。よって $(W2)$ から $(W1)$ が従う。これで $(W1)$ と $(W2)$ の同値性が示された。

他方、$(W1)$ に $Y^t + Y^{-t}$ の替りに作用素 $X^t + X^{-t}$ を掛ける。このとき先ほどと同様にして $(W1)$ と $(W3)$ とが同値である事が示される。かくして、定理 2.1 が証明された。

$(K,+)$ を 2 で割れるアーベル群とする。定理 2.1 において、C を K に置き換えても定理 2.1 はそのまま成り立つ。$(W1)$ に関する M. A. McKiernan [9, p.264, THEOREM]（もしくは、D. Girod [2, pp.157-158, (2.2) THEOREM]）の結果より、定理 2.1 から次の事がわかる。

$f : G \times G \longrightarrow K$ が方程式 $(W2)$ もしくは $(W3)$ を満足するための必要かつ十分条件は、次の３つの条件で与えられる：

(i) ２つの関数 $\alpha,\ \beta : G \longrightarrow K$ が存在する。

(ii) 歪対称かつ双加法的関数 $A: G \times G \longrightarrow K$ が存在する。
(即ち、$A(x,y) = -A(y,x)$ 及び $A(x,y+z) = A(y,x) + A(x,z)$ が成り立つ。)

(iii) 解 $f: G \times G \longrightarrow K$ は (i) と (ii) の関数を用いて

$$f(x,y) = \alpha(x+y) + \beta(x-y) + A(x,y), \quad \forall x,y,t \in G \tag{2.5}$$

と表現される。

$G = K = \mathbf{R}$ (実数体) の場合は、D. Girod [2, p.163, (3.4) THEOREM] の結果より $(W2)$ (もしくは $(W3)$) の有界可測な一般解は、

$$f(x,y) = \alpha(x+y) + \beta(x-y) \tag{2.6}$$

で与えられる。ここで、α と β は正のルベーグ測度集合で有界な任意関数である。

3. 関数方程式 (P1)

この節では、ペキシダー化された波動型関数方程式 $(P2)$ の興味ある特殊例として関数方程式 $(P1)$ を考察する。

定理 3.1. 2つの関数 f_1, $f_2: G \times G \longrightarrow C$ が方程式 $(P1)$ を満足するための必要かつ十分条件は、次で与えられる。即ち、3つの関数 α, β, $\gamma: G \longrightarrow C$ と歪対称かつ双加法的関数 $A: G \times G \longrightarrow C$ が存在して、全ての $x, y \in G$ に対して

$$f_1(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) + A(x,y) \tag{3.1}$$

$$f_2(x,y) = \gamma(x) + \beta(y) + A(x,y) \tag{3.2}$$

と書ける事である。

(証明) (P1) を作用素形で表現すると次のようになる。

$$(X^tY^t - X^tY^{-t})f_1(x,y) = (X^{-t}Y^t - X^{-t}Y^{-t})f_2(x,y). \tag{3.3}$$

(3.3) の両辺に作用素 $X^tY^t + X^{-t}Y^{-t} + X^{-t}Y^t + X^tY^{-t}$ を掛けると、($2t$ を t に置き換えて)

$$(X^tY^t - X^tY^{-t})f_1(x,y) + (Y^t - Y^{-t})f_1(x,y)$$

$$= (X^{-t}Y^t - X^{-t}Y^{-t})f_2(x,y) + (Y^t - Y^{-t})f_2(x,y)$$

が得られる。この式と (3.3) から

$$(Y^t - Y^{-t})f_1(x,y) = (Y^t - Y^{-t})f_2(x,y),$$

即ち、 $f_1(x,y+t) - f_1(x,y-t) = f_2(x,y+t) - f_2(x,y-t)$ 及び

$$f_1(x,y+t) - f_2(x,y+t) = f_1(x,y-t) - f_2(x,y-t) \tag{3.4}$$

が従う。さて、関数 $h : G \times G \longrightarrow C$ を $h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$, $\forall x,y \in G$ により定義する。この時、(3.4) は

$$h(x,y+t) = h(x,y-t)$$

と書ける。ここで、$t = y$ とおくと $h(x,2y) = h(x,0)$、つまり $h(x,y) = k(x)$ と書ける。ここで、$k : G \longrightarrow C$ は $k(x) = h(x,0)$, $\forall x,y \in G$ で定義される関数である。よって、$f_2(x,y) = f_1(x,y) - k(x)$ となる。この $f_2(x,y)$ を $(P1)$ に代入すると、$f_1(x,y)$ についての関数方程式

$$f_1(x+t,y+t) + f_1(x-t,y+t) = f_1(x-t,y+t) + f_1(x-t,y-t) \tag{3.5}$$

が導かれる。即ち、1節の方程式 $(W4)$ である。従って再び [9, p.264, THEOREM] もしくは [2, pp.157-158, (2.2) THEOREM] の結果(2節の式 (2.5) と変換 (1.1) を用いる)から、$f_1(x,y)$ は (3.1) で与えられる事がわかる。ここで、変換 (1.1) により歪対称性と双加法性は変化しない事を注意する。よって、(3.1) と $f_2(x,y) = f_1(x,y) - k(x)$ から (3.2) が従う。ここで、$\gamma : G \longrightarrow C$ は $\gamma(x) = \alpha(x) - k(x)$ により定義される関数である。逆は明らかであり、これで 定理 3.1 の証明は終わった。

定理 3.1 は、2 で割れるアーベル群 K 上でも成り立つ事を注意しておく。

4. 関数方程式 (P2)

この節の目的は、ペキシダー化された波動型関数方程式 $(P2)$ に対して、次の主定理を証明する事である。未知関数 f_1, f_2, f_3, f_4 について、何らの正則性の仮定なしで主定理が成り立つ事を注意する。

定理 4.1. 関数 f_1, f_2, f_3, $f_4 : G \times G \longrightarrow C$ が全ての $x,y,t \in G$ に対して関数方程式 $(P2)$ を満たすと仮定する。この時、

(i) 歪対称かつ双加法的関数 $A : G \times G \longrightarrow C$

(ii) 双加法的関数 $B_1,\ B_2 : G \times G \longrightarrow C$

(iii) 関数 $\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \chi_1,\ \chi_2 : G \longrightarrow C$

が存在し、全ての $x, y \in G$ に対して

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x,y) &= A(x,y) + B_1(x+y, x-y)\\
&\quad + \alpha(x+y) + \beta(x-y) + \varphi_1(x+y) + \psi_1(x-y) + \chi_1(2y),\\
f_2(x,y) &= A(x,y) - B_1(x+y, x-y)\\
&\quad + \alpha(x+y) + \beta(x-y) - \varphi_1(x+y) - \psi_1(x-y) - \chi_1(2y),\\
f_3(x,y) &= A(x,y) + B_2(x+y, 2x)\\
&\quad + \alpha(x+y) + \beta(x-y) + \varphi_2(x+y) + \psi_2(2x) + \chi_2(-x+y),\\
f_4(x,y) &= A(x,y) - B_2(x+y, 2x)\\
&\quad + \alpha(x+y) + \beta(x-y) - \varphi_2(x+y) - \psi_2(2x) - \chi_2(-x+y)
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

と書ける。

定理 4.1 の証明には、次の 2 つの補題が必要になる。

補題 4.1. 定理 4.1 の全ての仮定が満たされているとする。関数 $S : G \times G \longrightarrow C$ を、$S(x,y) = \frac{1}{2}(f_1(x,y) + f_2(x,y)),\ \forall x, y \in G$ により定義する。この時、S は関数方程式 $(W1)$ を満たす。さらに、 関数 $\alpha, \beta : G \longrightarrow C$ 及び歪対称かつ双加法的関数 $A : G \times G \longrightarrow C$ が存在し

$$\begin{aligned}
S(x,y) &= \tfrac{1}{2}(f_1(x,y) + f_2(x,y))\\
&= \tfrac{1}{2}(f_3(x,y) + f_4(x,y))\\
&= \alpha(x+y) + \beta(x-y) + A(x,y), \quad \forall x, y \in G
\end{aligned} \tag{4.2}$$

と書ける。

(証明) $(P2)$ において $t = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) + f_2(x,y) &= f_3(x,y) + f_4(x,y)\\
&= 2S(x,y)
\end{aligned}$$

が得られる。次に $(P2)$ において t を $-t$ と置き換えて、それと $(P2)$ とを加えると次式が得られる。

$$S(x+t, y) + S(x-t, y) = S(x, y+t) + S(x, y-t).$$

この式は、方程式 $(W1)$ に他ならない。従って M. A. McKcernan [9, p.264, THEOREM] の結果を再び使う事により、先に述べた形の関数 α, β, A が存在して、全ての $x, y, t \in G$ に対して (4.2) がなりたつ。これで証明は終わる。

次のステップは、関数 $f_1(x,y)-f_2(x,y)$ 及び $f_3(x,y)-f_4(x,y)$ の形を決定する事である。これが出来れば補題 4.1 から全ての f_1, f_2, f_3, f_4 が決定できる事になる。

補題 4.2. 定理 4.1 の全ての仮定が満たされているとし、関数 $T, U : G\times G \longrightarrow C$ を

$$T(x,y)=\frac{1}{2}(f_1(x,y)-f_2(x,y)),\quad U(x,y)=\frac{1}{2}(f_3(x,y)-f_4(x,y)),\quad \forall x,y\in G$$

により定義する。この時、T, U は次の関数方程式を満たす。

$$U(x,y+2t)+U(x+t,y-t)+U(x-t,y-t)=U(x,y-2t)+U(x-t,y+t)+U(x+t,y+t). \tag{E1}$$

$$T(x+2t,y)+T(x-t,y+t)+T(x-t,y-t)=T(x-2t,y)+T(x+t,y+t)+T(x+t,y-t). \tag{E2}$$

(証明) (P) において t を $-t$ に置き換え、この式から $(P2)$ を引くと次式が得られる。

$$T(x+t,y)-T(x-t,y)=U(x,y+t)-U(x,y-t). \tag{4.3}$$

次に (4.3) において x を $x+t$ に置き換えて

$$T(x+2t,y)-T(x,y)=U(x+t,y+t)-U(x+t,y-t) \tag{4.4}$$

を得る。さらに、t を $-t$ に置き換えると次のようになる。

$$T(x-2t,y)-T(x,y)=U(x-t,y-t)-U(x-t,y+t). \tag{4.5}$$

式 (4.3) において y を $y+t$ に置き換えると

$$T(x+t,y+t)-T(x-t,y+t)=U(x,y+2t)-U(x,y) \tag{4.6}$$

となり、ついで t を $-t$ に置き換えると

$$T(x-t,y-t)-T(x+t,y-t)=U(x,y-2t)-U(x,y) \tag{4.7}$$

が得られる。式 (4.4) から 式 (4.5) を引き、さらに式 (4.6) から 式 (4.7) を引くと、次の２つの関数方程式が得られる。

$$T(x+2t,y)-T(x-2t,y)=U(x+t,y+t)-U(x+t,y-t)-U(x-t,y-t)+U(x-t,y+t). \tag{4.8}$$

$$U(x,y+2t)-U(x,y-2t)=T(x+t,y+t)-T(x-t,y+t)-T(x-t,y-t)+T(x+t,y-t). \tag{4.9}$$

さて、(4.3) において t を $2t$ に置き換えると

$$T(x+2t,y)-T(x-2t,y)=U(x,y+2t)-U(x,y-2t) \tag{4.10}$$

が従う。よって、(4.8) と (4.10) から $(E1)$ が従い、一方 (4.9) と (4.10) から $(E2)$ が従う。これで補題 4.2 の証明が終わった。

(定理 4.1 の証明) 次の変換により、方程式 $(E1)$ と $(E2)$ をそれぞれ下の方程式 (4.12) と (4.13) に変換しよう。即ち、新しい関数 $V, W : G \times G \longrightarrow C$ を

$$V(u,v) = U(x,y), \quad W(u,v) = T(x,y), \quad \forall x,y \in G$$
$$\text{ここで } u = x+y, \ v = x-y \tag{4.11}$$

により定義する。この時、$(E1)$ と $(E2)$ は $2t$ を t、u と v をそれぞれ x と y に置き換える事により次の２つの関数方程式に変わる。

$$V(x+t,y-t)+V(x,y+t)+V(x-t,y) = V(x-t,y+t)+V(x,y-t)+V(x+t,y). \tag{4.12}$$

$$W(x+t,y+t)+W(x,y-t)+W(x-t,y) = W(x-t,y-t)+W(x+t,y)+W(x,y+t). \tag{4.13}$$

従って、$W(x,y)$ は次の方程式 $(E3)$ を満たす。

$$f(x+t,y+t)+f(x,y-t)+f(x-t,y) = f(x-t,y-t)+f(x,y+t)+f(x+t,y). \tag{E3}$$

関数方程式 $(E3)$ は、既に文献 [5, p.5, (23)], [10], [6, p.213, (87)] に現れている。しかしこの方程式は、文献 [6, pp.256-260, Problem (7)] において未解決問題として挙げられており、部分的な解やその考察は文献 [6, pp.213-216] や [8, p.207, (3.25)] において与えられていた。最近この方程式 $(E3)$ は、P. K. Sahoo and L. Székelyhidi [11, p.282, Theorem 1] により完全に解かれた。 彼らの結果は次の通りである。関数 $f : G \times G \longrightarrow C$ が方程式 $(E3)$ を満たすための必要十分条件は、ある双加法的関数 $B : G \times G \longrightarrow C$ 及び関数 $\varphi, \psi, \chi : G \longrightarrow C$ が存在して

$$f(x,y) = B(x,y) + \varphi(x) + \psi(y) + \chi(x-y) \tag{4.14}$$

と書ける事である。従って、(4.14) と (4.11) より

$$T(x,y) = B_1(x+y, x-y) + \varphi_1(x+y) + \psi_1(x-y) + \chi_1(2y) \tag{4.15}$$

が言える。ここで、$B_1 : G \times G \longrightarrow C$ は双加法的であり $\varphi_1, \psi_1, \chi_1 : G \longrightarrow C$ である。 他方、関数 $M : G \times G \longrightarrow C$ を

$$M(u,v) = V(x,y), \quad \forall x,y \in G, \quad \text{ここで } u = x, \ v = x+y \tag{4.16}$$

により定義しよう。この時 (4.12) は M に関する方程式

$$M(x+t,y)+M(x-t,y-t)+M(x,y+t)=M(x-t,y)+M(x+t,y+t)+M(x,y-t)$$

に変わる。かくして $M(x,y)$ は再び 方程式 $(E3)$ を満たす。よって、(4.14) と (4.16) から次の事が言える。即ち、双加法的関数 $\tilde{B}_2 : G\times G \longrightarrow C$ と関数 $\tilde{\varphi}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\chi}_2 : G \longrightarrow C$ が存在して

$$V(x,y)=\tilde{B}_2(x,x+y)+\tilde{\varphi}_2(x)+\tilde{\psi}_2(x+y)+\tilde{\chi}_2(-y) \tag{4.17}$$

と書ける。さらに、(4.17) と (4.11) から双加法的関数 $B_2 : G\times G \longrightarrow C$ と関数 $\varphi_2, \psi_2, \chi_2 : G \longrightarrow C$ が存在して

$$U(x,y)=B_2(x+y,2x)+\varphi_2(x+y)+\psi_2(2x)+\chi_2(-x+y) \tag{4.18}$$

と書ける。

一方、補題 4.1 と 補題 4.2 から

$$\begin{aligned}
f_1(x,y)+f_2(x,y)&=2S(x,y)\\
f_3(x,y)+f_4(x,y)&=2S(x,y)\\
f_1(x,y)-f_2(x,y)&=2T(x,y)\\
f_3(x,y)-f_4(x,y)&=2U(x,y)
\end{aligned}$$

が従う。ここで、$2S$ は方程式 $(W1)$ の任意の解であり、$2T$, $2U$ はそれぞれ方程式 $(E1)$ 及び $(E2)$ の任意の解である。方程式 $(W1)$, $(E1)$, $(E2)$ の一般解は補題 4.1 と定理 4.1 の証明中に得られている。f_1, f_2, f_3 及び f_4 に関する上の方程式系の解を S, T, 及び U で表し、それらの解の表示を用いれば、最終的な解の表示式 (4.1) が得られる。これで定理 4.1 の証明が終わった。

参考文献

[1] J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič, *General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials*, Aequationes Math. *1*(1968), 37-53.

[2] D. Girod, *On the functional equation* $\Delta_{T_{1y}}\Delta_{T_{2y}}f=0$, Aequationes Math. *9*(1973), 157-164.

[3] H. Haruki, *Notebooks of open problems* (unpublished).

[4] H. Haruki, *On the functional equation* $f(x+t,y)+f(x-t,y) = f(x,y+t)+f(x,y-t)$, Aequationes Math. *5*(1970), 118-119.

[5] S. Haruki, *The general solution of finite difference-functional equations analogous to the wave equation with several unknown functions* (unpublished). A manuscript to Prof. M. A. McKiernan from the first author dated on May 12, 1975.

[6] S. Haruki, *Particular difference and mean value type functional equations*, University of Waterloo, Ph.D. Thesis, 1977 (266 pages).

[7] S. Haruki, *On the general solution of a nonsymmetric partial difference functional equation analogous to the wave equation*, Aequationes Math. *36*(1988), 20-31.

[8] S. Haruki, *A wavelike functional equation of Pexider type*, Aequationes Math. *63*(2002), 201-209.

[9] M. A. McKiernan, *The general solution of some finite difference equations analogous to the wave equation*, Aequationes Math. *8*(1972), 263-266.

[10] M. A. McKiernan, Comments to the first author concerning the manuscript of the above reference [5] dated on July 7, 1975.

[11] P. K. Sahoo and L. Székelyhidi, *On a functional equation related to digital filtering*, Aequationes Math. *62*(2001), 280-285.