数理解析研究所講究録 1448 巻 2005 年 162-171

「生物数学イッキ読み」講義録：河内担当分

河内　一樹*

概要

"The Golden Age of Thoretical Ecology: 1923-1940" [1] の p.p.209-228 の要旨を説明する.

有限の時間遅れを取り込んだ捕食-被食者系を考える. 1 節（テキストの §2）[2]では,「変動の基本性質」の 2 番目（平均の保存）, 3 番目（平均の摂動）に相当する性質が成り立つことを証明する. 2 節（テキストの §3）では, 平衡点の近くを振動する振動解が非周期的であることを 2 通りの方法で証明する.

1　有限の時間遅れがある場合への「変動の基本性質」2, 3の拡張

1.1　有限の時間遅れを入れた捕食-被食系の方程式とその平衡解

有限の時間遅れを取り込んだ捕食-被食系の方程式として

$$\begin{cases} N_1'(t) = N_1(t)\{\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)\} \\ N_2'(t) = N_2(t)\left\{-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)N_1(\tau)\,d\tau\right\} \end{cases} \tag{1}$$

を考えるが, これを対称性がよくなるように拡張した

$$\begin{cases} N_1'(t) = N_1(t)\left\{\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)N_2(\tau)\,d\tau\right\} \\ N_2'(t) = N_2(t)\left\{-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)N_1(\tau)\,d\tau\right\} \end{cases} \tag{2}$$

の方が解析しやすいので, 以下では後者について解析することにする. ここで, $F_j(\tau)(j=1,2)$ [3]は時間遅れを表す関数であるが, 有限の時間遅れを仮定する. すなわち, ある有限の正数 T_0 が存在して

$$F_j(\tau) \geqq 0\ (\forall\tau \geqq 0), \qquad F_j(\tau) = 0\ (\forall\tau \geqq T_0)$$

であるとする. これにより, 上の方程式の積分項は実質的には有界閉区間 $[t-T_0, t]$ 上の積分であり, 次のように書き直される：

$$N_1'(t) = N_1(t)\left\{\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{t-T_0}^{t} F_1(t-\tau)N_2(\tau)\,d\tau\right\} \tag{3}$$

$$N_2'(t) = N_2(t)\left\{-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{t-T_0}^{t} F_2(t-\tau)N_1(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{4}$$

また, 積分区間が $[0, T_0]$ となるように積分変数を取り替えれば, 次のように表される：

$$N_1'(t) = N_1(t)\left\{\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{0}^{T_0} F_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau\right\} \tag{5}$$

$$N_2'(t) = N_2(t)\left\{-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{0}^{T_0} F_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau\right\}. \tag{6}$$

---

*東京大学数理科学研究科修士 1 年（2004 年 9 月現在）. 連絡先は kkawachi@ms.u-tokyo.ac.jp

[1] Francesco M. Scudo & James R. Ziegler(1978) The Golden Age of Theoretical Ecology: 1923–1940. *Lecture Notes in Biomathematics* **22**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

[2] 節の番号を含めて, 以下の講義録ではテキストと少々構成が異なるので注意されたい.

[3] 以下, 断りがない限り, 添え字で j が現れた場合は 1, 2 のどちらかを表すものとする.

方程式 (3)(4)，または (5)(6) の非自明な平衡解を $N_j(t) \equiv K_j(>0)$ とおくと，

$$K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2}, \qquad K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1}$$

である．ここで

$$\Gamma_j := \int_0^{T_0} F_j(\xi)\, d\xi$$

である[4]．また，$\varepsilon_j > 0, \gamma_1 > 0$ および「$\gamma_2 > 0$ または $\Gamma_2 > 0$」を仮定する．

1.2 変動の基本性質２—漸近平均の一意性—

以下では，非自明解について考察する．したがって $N_1(t), N_2(t)$ は初期時刻 t_0 より先では常に正[5]である．

補題 1.1. $t = \hat{t}$ で $N_1(t)$ が極値をとるならば，次が成り立つ：

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}} \leqq N_2(\hat{t}) \leqq \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

証明． $N_j(t) > 0$ であるから，方程式 (5)(6) の両辺をそれぞれ $N_1(t), N_2(t)$ で割って，左辺を変形して

$$\frac{d}{dt}\log N_1(t) = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t-\tau)\, d\tau$$
$$\frac{d}{dt}\log N_2(t) = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(t-\tau)\, d\tau$$

となるが，$\varepsilon_j > 0$ などを用いて $\frac{d}{dt}\log N_1(t), \frac{d}{dt}\log N_2(t)$ の値の評価をすると次のようになる：

$$-\gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t-\tau)\, d\tau < \frac{d}{dt}\log N_1(t) < \varepsilon_1 \tag{7}$$

$$-\varepsilon_2 < \frac{d}{dt}\log N_2(t) < \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(t-\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

この t を ξ に置き換える．上の２式は $\forall \xi \in [\tau, t]$ に対して成り立つから，辺々を積分することにより，(7) は次のように変形される：

$$-\gamma_1 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi - \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(\xi - \eta) d\eta < \log\frac{N_1(t)}{N_1(\tau)} < \varepsilon_1 (t - \tau).$$

辺々を -1 倍して e の指数にすることで次が得られる：

$$e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} < \frac{N_1(\tau)}{N_1(t)} < \exp\left(\gamma_1 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(\xi - \eta) d\eta\right). \tag{9}$$

同様の式変形を (8) に施して，次が得られる：

$$\exp\left(-\gamma_2 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi - \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_2(\eta) N_1(\xi - \eta) d\eta\right) < \frac{N_2(\tau)}{N_2(t)} < e^{\varepsilon_2(t-\tau)}. \tag{10}$$

次に，不等式 (9) の最右辺を評価する[6]．$\xi \in [\tau, t]$ に対して，不等式 (10) の右側の不等式を用いて

$$\gamma_1 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(\xi - \eta) d\eta$$
$$< \gamma_1 \int_\tau^t N_2(t) e^{\varepsilon_2(t-\xi)}\, d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(t) e^{\varepsilon_2(t-\xi+\eta)}\, d\eta$$

---

[4] 数式中で := という記号を，「左辺を右辺によって定義する」という意味で用いる．
[5] 「正」「負」は 0 を含まないものとする．また「非負」は正または 0 を表すものとする．
[6] この評価は次の補題を証明する際に用いるものであり，本補題では必要ない．

となるが，この右辺は

$$N_2(t)\int_\tau^t e^{\varepsilon_2(t-\xi)}\left\{\gamma_1+\int_0^{T_0}F_1(\eta)e^{\varepsilon_2\eta}\,d\eta\right\}d\xi$$

とまとめられる．さらに，{} 内について，$\varepsilon_2>0, T_0>0$ を利用して

$$\begin{aligned}\gamma_1+\int_0^{T_0}F_1(\eta)e^{\varepsilon_2\eta}\,d\eta &< \gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}+\int_0^{T_0}F_1(\eta)e^{\varepsilon_2 T_0}d\eta\\ &= e^{\varepsilon_2 T_0}(\gamma_1+\Gamma_1)\end{aligned}$$

と評価でき，これと

$$\int_\tau^t e^{-\varepsilon_2\xi}\,d\xi=-\frac{1}{\varepsilon_2}(e^{-\varepsilon_2 t}-e^{-\varepsilon_2\tau})<\frac{1}{\varepsilon_2}e^{-\varepsilon_2\tau}$$

とを利用して

$$\gamma_1\int_\tau^t N_2(\xi)\,d\xi+\int_\tau^t d\xi\int_0^{T_0}F_1(\eta)N_2(\xi-\eta)d\eta<N_2(t)\frac{e^{\varepsilon_2(t-\tau+T_0)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)$$

が得られる．これと不等式 (9) とから，次のような評価が出来る：

$$N_1(t)e^{-\varepsilon_1(t-\tau)}<N_1(\tau)<N_1(t)\exp\left(N_2(t)\frac{e^{\varepsilon_2(t-\tau+T_0)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)\right) \tag{11}$$

t,τ が $t-\tau\leqq T_0$ を満たすならば，不等式 (10)(11) から次のように評価できる：

$$N_1(t)e^{-\varepsilon_1 T_0}<N_1(\tau)<N_1(t)\exp\left(N_2(t)\frac{e^{2\varepsilon_2 T_0}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)\right) \tag{12}$$

$$0<N_2(\tau)<N_2(t)e^{\varepsilon_2 T_0} \tag{13}$$

さて，$t=\tilde{t}$ において $N_1(t)$ が極値をとることから，$\dfrac{dN_1}{dt}(\tilde{t})=0$ である．これと (5) とから

$$\varepsilon_1-\gamma_1 N_2(\tilde{t})-\int_0^{T_0}F_1(\tau)N_2(\tilde{t}-\tau)\,d\tau=0 \tag{14}$$

となる．$\tau\in[0,T_0]$ に対して，$\tilde{t}-(\tilde{t}-\tau)\leqq T_0$ であるから，(13) の t,τ をそれぞれ $\tilde{t},\tilde{t}-\tau$ に置き換え，辺々に $F_1(\tau)$ $(\geqq 0)$ をかけて $\tau\in[0,T_0]$ について積分すると

$$0\leqq\int_0^{T_0}F_1(\tau)N_2(\tilde{t}-\tau)\,d\tau\leqq N_2(\tilde{t})e^{\varepsilon_2 T_0}\Gamma_1$$

となり，(14) を用いて書き換えて

$$0\leqq\varepsilon_1-\gamma_1 N_2(\tilde{t})\leqq N_2(\tilde{t})e^{\varepsilon_2 T_0}\Gamma_1$$

となる．$\gamma_1>0, \gamma_1+\Gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}>0$ に注意して上式を変形すると結論が成り立つことが分かる．■

補題 1.2. $t=\tilde{t}$ で $N_2(t)$ が極値をとり，その値が K_2 より小さいとすると

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2+e^{\varepsilon_1 m}\Gamma_2}\leqq N_1(\tilde{t})\leqq\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2+e^{-\varepsilon_1 T_0}\Gamma_2}$$
$$\text{where}\qquad m:=\frac{1}{\varepsilon_2}e^{2\varepsilon_2 T_0}.$$

証明． $\dfrac{dN_2}{dt}(\tilde{t})=0$ である．これと (6) とから次が成り立つ：

$$\varepsilon_2-\gamma_2 N_1(\tilde{t})-\int_0^{T_0}F_2(\tau)N_1(\tilde{t}-\tau)\,d\tau=0. \tag{15}$$

仮定により $N_2(\tilde{t}) < K_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1}$ である．これと (12) とから，$\tau \in [0, T_0]$ に対して上の補題と同様の議論を行って

$$N_1(\tilde{t}) e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2 \leqq \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(\tilde{t} - \tau)\, d\tau \leqq N_1(\tilde{t}) e^{\varepsilon_1 m} \Gamma_2$$

となる．これに (15) を用いて変形すれば，結論が成り立つことが分かる．■

補題 1.3. $t = t_j$ で $N_j(t)$ が K_j より小さい極値をとるとすると，

$$N_j(\tau) < p_j K_j, \quad \forall \tau \in [t_j - T_0,\, t_j]$$
$$\text{where} \qquad p_1 := \exp\left(\frac{\varepsilon_1(\gamma_1 + \Gamma_1)}{\varepsilon_2 \gamma_1} e^{2\varepsilon_2 T_0}\right),\ p_2 := e^{\varepsilon_2 T_0}.$$

証明． $j = 1$ のときは，不等式 (12) と補題 1.1 および $N_1(t_1) < K_1$ とから直ちに成り立つ．
$j = 2$ のときは不等式 (13) と $N_2(t_2) < K_2$ から直ちに成り立つ．■

以上の準備の下に，次の定理を証明する．

定理 1.4. 初期時刻 t_0 を任意にとり，$N_1(t_0)$, $N_2(t_0)$ を任意の正数とする．

(a) $t > t_0$ で $N_1(t)$ が K_1 より小さい極値をとる t を

$$t = t_1,\, t_2,\, \cdots, \quad \lim_{j \to \infty} t_j = \infty$$

とおく[7]．このとき次が成り立つ：

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{t_j - t_0} \int_{t_0}^{t_j} N_1(t)\, dt = K_1.$$

(b) $t > t_0$ で $N_2(t)$ が K_2 より小さい極値をとる t を

$$t = t_1,\, t_2,\, \cdots, \quad \lim_{j \to \infty} t_j = \infty$$

とおく．このとき次が成り立つ：

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{t_j - t_0} \int_{t_0}^{t_j} N_2(t)\, dt = K_2.$$

証明． (a)(b) はどちらも同様に証明できるので，以下では (b) のみ示す．

$$\frac{d}{dt} \log N_1(t) = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t - \tau)\, d\tau$$

の両辺を $t \in [t_0, t_j]$ で積分して次のようになる：

$$\log \frac{N_1(t_j)}{N_1(t_0)} = \varepsilon_1 (t_j - t_0) - \gamma_1 \int_{t_0}^{t_j} N_2(t)\, dt - \int_{t_0}^{t_j} dt \int_{t - T_0}^{t} F_1(t - \tau) N_2(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

t_j を十分大きく取る[8]．(16) の右辺第 3 項を I とおき，$\tau - t$ 平面において積分領域を

$$D_1 := \{(\tau, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t_0 - T_0 \leqq \tau \leqq t_0,\ t_0 \leqq t \leqq \tau + T_0\}$$
$$D_2 := \{(\tau, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t_0 \leqq t \leqq t_j,\ \tau \leqq t \leqq \tau + T_0\}$$
$$D_3 := \{(\tau, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t_j - T_0 \leqq \tau \leqq t_j,\ \tau \leqq t \leqq t_j\}$$

[7] このような数列 $\{t_j\}$ が存在することは前節で示されている．
[8] ここの j は 1, 2 とは限らず，十分大きい自然数である．

の 3 つに分ける.

$$I_k := \int_{D_k} F_1(t-\tau)N_2(\tau)\,dtd\tau$$

とおくと，$I = I_1 + I_2 + I_3$ となることが分かる．I_1, I_2, I_3 のそれぞれにわけて積分順序を交換する[9]．まず，I_1 について

$$I_1 = \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau \int_{t_0}^{\tau+T_0} F_1(t-\tau)\,dt$$

となるが，$F_1(\xi)$ は非負で，$(\tau, t) \in D_1$ なら $\tau \leqq T_0$ なので

$$0 \leqq \int_{t_0}^{\tau+T_0} F_1(t-\tau)\,dt \leqq \int_{\tau}^{\tau+T_0} F_1(t-\tau)\,dt = \Gamma_1$$

となり，

$$0 \leqq I_1 \leqq \Gamma_1 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau$$

となるので，$0 \leqq \theta_0 \leqq 1$ なる定数 θ_0 が存在して

$$I_1 = \theta_0 \Gamma_1 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau$$

と表せる．I_3 についても同様に，積分順序を交換して値の評価をすることで

$$I_3 = \theta_j \Gamma_1 \int_{t_j-T_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau$$

なる定数 $\theta_j \in [0, 1]$ が存在する．

I_2 に関しては積分順序を交換して次のようになる：

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_j-T_0} N_2(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{\tau+T_0} F_1(t-\tau)\,d\tau = \Gamma_1 \int_{t_0}^{t_j-T_0} N_2(\tau)\,d\tau.$$

$I = I_1 + I_2 + I_3$ なので

$$\begin{aligned} I &= \Gamma_1 \left\{ \theta_0 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_j-T_0} N_2(\tau)\,d\tau + \theta_j \int_{t_j-T_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau \right\} \\ &= \Gamma_1 \left\{ \theta_0 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau - (1-\theta_j) \int_{t_j-T_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau \right\}. \end{aligned}$$

これと (16) を用いて

$$\begin{aligned} \log \frac{N_1(t_j)}{N_1(t_0)} &= \varepsilon_1 (t_j - t_0) - (\gamma_1 + \Gamma_1) \int_{t_0}^{t_j} N_2(t)\,dt \\ &\qquad - \Gamma_1 \left\{ \theta_0 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau - (1-\theta_j) \int_{t_j-T_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau \right\} \end{aligned}$$

となるので，これを変形して

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_j - t_0} \int_{t_0}^{t_j} N_2(t)\,dt &= \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} - \frac{1}{(t_j - t_0)(\gamma_1 + \Gamma_1)} \\ &\quad \times \left[\log \frac{N_1(t_j)}{N_1(t_0)} - \Gamma_1 \left\{ \theta_0 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau)\,d\tau - (1-\theta_j) \int_{t_j-T_0}^{t_j} N_2(\tau)\,d\tau \right\} \right] \end{aligned}$$

[9] 非積分関数は非負なので，Fubini-Tonelli の定理が適用できる．

が成り立つ．$\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1+\Gamma_1}=K_2$ に注意すると，題意を示すには上の右辺の [] 内が t_j に関して有界であることを示せば十分である．補題 1.2 により

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\log\frac{N_1(t_j)}{N_1(t_0)}\right|<\infty$$

が分かる．$\theta_0\int_{t_0-T_0}^{t_0}N_2(\tau)\,d\tau$ は j によらない定数である．さらに，$0\leqq 1-\theta_j\leqq 1$ と補題 1.3 から

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|(1-\theta_j)\int_{t_j-T_0}^{t_j}N_2(\tau)\,d\tau\right|<\infty$$

が成り立ち，これで題意が示された．■

ここで，$N_1(t)$, $N_2(t)$ の**漸近平均**を，定理 1.4 の各結論における左辺

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k-t_0}\int_{t_0}^{t_k}N_j(t)\,dt,\quad j=1,2$$

と定義する[10]．これが，初期時刻，初期条件によらずに平衡解に等しいことを定理 1.4 は主張しており，これが「変動の基本法則」 2 の拡張に当たる．

1.3 有限の時間遅れがある場合の「変動の基本性質」

前節[11]で議論したことと，以上の議論をあわせると，有限の時間遅れがある場合の「変動の基本性質」として，次の 3 つが挙げられる[12]：

(1) **Property of the Fluctuations（変動の性質）**

$N_1(t)$, $N_2(t)$ は，平衡解 K_1, K_2 の周りを振動する．さらに，おのおのの極値を与える時刻 t_j は $j\to\infty$ で $+\infty$ に発散する．

(2) **Conservation of the Averages（漸近平均の一意性）**

1.2 節の最後で定義した，$N_1(t)$, $N_2(t)$ の漸近平均は，初期時刻，初期条件によらず平衡解に一致する．

(3) **Perturbation of the Averages（漸近平均の摂動）**

$N_1(t)$, $N_2(t)$ の漸近平均 K_1, K_2 に関して，個体数密度に比例してあらかじめ一様に個体数を減らしておくと[13]，K_1 は増加し，K_2 は減少する[14]．

2 有限の時間遅れがある場合の，小さな変動の非周期性

2.1 非自明平衡解の周りでの線形化方程式

方程式 (5)(6) の非負解 $N_1(t)$, $N_2(t)$ に対して，$n_j(t):=N_j(t)-K_j$ とおくと，$n_j(t)$ の満たすべき方程式は次のようである：

$$\frac{d}{dt}(n_1(t)+K_1)=(n_1(t)+K_1)\left\{\varepsilon_1-\gamma_1(n_2(t)+K_2)-\int_0^{T_0}F_1(\tau)(n_2(t-\tau)+K_2)\,d\tau\right\}$$
$$\frac{d}{dt}(n_2(t)+K_2)=(n_2(t)+K_2)\left\{-\varepsilon_2+\gamma_2(n_1(t)+K_1)+\int_0^{T_0}F_2(\tau)(n_1(t-\tau)+K_1)\,d\tau\right\}.$$

[10] $\{t_k\}$ は $N_1(t)$, $N_2(t)$ のどちらかを指定した上で，それを $N_j(t)$ とおいて，$N_j(t)$ の K_j より小さい極値を与える t の値を順にとっていったものである．$N_1(t)$, $N_2(t)$ で共通してとるわけではない．

[11] テキストの p.p.199-209 に相当する．

[12] もちろん，平衡解でない場合を考えている．

[13] これは，ε_1 を小さくし，ε_2 を大きくするという操作に相当する．

[14] K_1, K_2 の定義を見れば明らか．

$n_j(t)$ が 0 に十分に近いとして，右辺において $n_j(t)$ の一次の項のみを残して得られる線形化方程式は

$$\frac{d}{dt}n_1(t) = -K_1\left(\gamma_1 n_2(t) + \int_0^{T_0} F_1(\tau)n_2(t-\tau)\,d\tau\right)$$
$$\frac{d}{dt}n_2(t) = K_2\left(\gamma_2 n_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)n_1(t-\tau)\,d\tau\right)$$

であり，さらに

$$\nu_j(t) := \frac{n_j(t)}{K_j},$$
$$\alpha_1 := \gamma_1 K_2, \quad \alpha_2 := \gamma_2 K_1, \quad \Phi_1(t) := K_2 F_1(t), \quad \Phi_2(t) := K_1 F_2(t)$$

と書き直すと，上の線形化方程式を $\nu_j(t)$ に関する線形化方程式と見て次のように表される：

$$\frac{d}{dt}\nu_1(t) = -\alpha_1\nu_2(t) - \int_0^{T_0}\Phi_1(t)\nu_2(t-\tau)\,d\tau \tag{17}$$
$$\frac{d}{dt}\nu_2(t) = \alpha_2\nu_1(t) + \int_0^{T_0}\Phi_2(t)\nu_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

ここで，遅れの効果を表す関数 $\Phi_j(t)$ が適切な条件を満たしていれば，方程式 (17)(18) は同じ周期を持つ周期解を持たないことを証明する．その一つの方法は解を Fourier 級数展開して議論するものである．もう一つの方法は，エネルギー関数を利用するものである．

2.2 Fourier 級数展開による証明

方程式 (17)(18) が周期 $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ の周期解を持つと仮定する．$\nu_j(t)$ を Fourier 級数展開して

$$\nu_j(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^{(j)}\sin m\lambda t + b_m^{(j)}\cos m\lambda t)$$

となる．

注意 2.1. $\nu_j(t)$ の Fourier 級数展開における定数項が 0 になるが，これは以下の議論と同じ手続きを行えばわかる．

注意 2.2. $\nu_j(t)$ が微分可能ならば，上の方程式から無限回微分可能となるから，方程式の積分項において項別積分や項別微分が可能である．

$\nu_1(t)$ の Fourier 展開を方程式 (17) に代入して，次のようになる：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_m^{(1)}m\lambda\cos m\lambda t - b_m^{(1)}m\lambda\sin m\lambda t + \alpha_1 a_m^{(2)}\sin m\lambda t + \alpha_1 b_m^{(2)}\cos m\lambda t\right.$$
$$\left. + \int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)a_m^{(2)}\sin m\lambda(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)b_m^{(2)}\cos m\lambda(t-\tau)\,d\tau\right\} = 0.$$

$\sin m\lambda t, \cos m\lambda t$ の係数を 0 とおくと，

$$M_{m,s}^{(j)} := \int_0^{T_0}\Phi_j(\tau)\sin m\lambda\tau\,d\tau, \quad M_{m,c}^{(j)} := \int_0^{T_0}\Phi_j(\tau)\cos m\lambda\tau\,d\tau$$

と略記することにより，次の方程式を得る：

$$a_m^{(1)}m\lambda + \alpha_1 b_m^{(2)} - M_{m,s}^{(1)}a_m^{(2)} + M_{m,c}^{(1)}b_m^{(2)} = 0 \tag{19}$$
$$-b_m^{(1)}m\lambda + \alpha_1 a_m^{(2)} + M_{m,c}^{(1)}a_m^{(2)} + M_{m,s}^{(1)}b_m^{(2)} = 0. \tag{20}$$

$\nu_2(t)$ の Fourier 展開を方程式 (18) に代入して同様の議論を行って，次の方程式を得る：

$$a_m^{(2)} m\lambda - \alpha_2 b_m^{(1)} + M_{m,s}^{(2)} a_m^{(1)} - M_{m,c}^{(2)} b_m^{(1)} = 0 \tag{21}$$

$$-b_m^{(2)} m\lambda - \alpha_2 a_m^{(1)} - M_{m,c}^{(2)} a_m^{(1)} - M_{m,s}^{(2)} b_m^{(1)} = 0. \tag{22}$$

方程式 (19)(20)(21)(22) は $a_m^{(1)}$, $b_m^{(1)}$, $a_m^{(2)}$, $b_m^{(2)}$ に関する連立方程式であり，行列で表すと次のようになる：

$$A_m \begin{bmatrix} a_m^{(1)} \\ b_m^{(1)} \\ a_m^{(2)} \\ b_m^{(2)} \end{bmatrix} = 0, \qquad A_m := \begin{bmatrix} m\lambda & 0 & -M_{m,s}^{(1)} & \alpha_1 + M_{m,c}^{(1)} \\ 0 & -m\lambda & \alpha_1 + M_{m,c}^{(1)} & M_{m,s}^{(1)} \\ M_{m,s}^{(2)} & -\alpha_2 - M_{m,c}^{(2)} & m\lambda & 0 \\ -\alpha_2 - M_{m,c}^{(2)} & -M_{m,s}^{(2)} & 0 & -m\lambda \end{bmatrix}. \tag{23}$$

係数行列の行列式を計算すると，

$$\begin{aligned} \det A_m = \{m^2\lambda^2 - (\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)})(\alpha_2 + M_{m,c}^{(2)})\}^2 + 2(m\lambda)^2 M_{m,s}^{(1)} M_{m,s}^{(2)} + (M_{m,s}^{(1)} M_{m,s}^{(2)})^2 \\ + \{M_{m,s}^{(2)}(\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)})\}^2 + \{M_{m,s}^{(1)}(\alpha_2 + M_{m,c}^{(2)})\}^2 \end{aligned}$$

となり，右辺第 2 項のみ，非負かどうかがすぐにはわからない．ここで次の補題が成り立つことに着目する．

補題 2.3. 関数 $f(x)$ が区間 $[0, a]$ $(a > 0)$ で狭義単調減少で $f(a) = 0$ とする．さらに $k > 0$ ならば

$$\int_0^a f(x) \sin kx \, dx > 0.$$

証明． $\frac{2\pi}{k} n < a \leqq \frac{2\pi}{k}(n+1)$ なる $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ をとる．$\omega := \frac{2\pi}{k}$ とおくと，

$$\int_{l\omega}^{y+l\omega} f(x) \sin kx \, dx > 0 \tag{24}$$

が成り立つ．ただし，$l = 0, 1, \cdots, n-1$ のときは $y \in (0, \omega]$ で，$l = n$ のときは $y \in (0, a - n\omega]$ である．

(24) の証明：$0 < y \leqq \omega/2$ のとき，

$$f(x) \geqq 0, \quad \sin kx \geqq 0, \quad \forall x \in [l\omega, y + l\omega]$$

であるが，等号を成立させる x は有限個しかないので，(24) が成り立つ．$\omega/2 < y \leqq w$ のとき

$$\begin{aligned} &\int_{l\omega}^{y+l\omega} f(x) \sin kx \, dx \\ &= \int_{l\omega}^{y+(l-1/2)\omega} f(x) \sin kx \, dx + \int_{y+(l-1/2)\omega}^{(l+1/2)\omega} f(x) \sin kx \, dx + \int_{(l+1/2)\omega}^{y+l\omega} f(x) \sin kx \, dx \\ &= \int_{l\omega}^{y+(l-1/2)\omega} \{f(x) - f(x + \omega/2)\} \sin kx \, dx + \int_{y+(l-1/2)\omega}^{(l+1/2)\omega} f(x) \sin kx \, dx > 0 \end{aligned}$$

となり，やはり成り立つ．■

(24) を用いて

$$\int_0^a f(x) \sin kx \, dx = \sum_{l=0}^{n-1} \int_{l\omega}^{(l+1)\omega} f(x) \sin kx \, dx + \int_{n\omega}^a f(x) \sin kx \, dx > 0$$

となる[15]．これで証明できた．■

そこで，$\Phi_j(\tau)$ に関して次のいずれか一つが成り立つと仮定する：

(a) $j = 1, 2$ に対して，$[0, T_0)$ において $\Phi_j(\tau)$ は正かつ狭義単調減少．

[15] $n = 0$ のときは右辺第 1 項を 0 とおけばよい．

(b) $\Phi_1(\tau) \equiv 0$ で，$[0, T_0)$ において $\Phi_2(\tau)$ は正かつ狭義単調減少．

(c) $\Phi_2(\tau) \equiv 0$ で，$[0, T_0)$ において $\Phi_1(\tau)$ は正かつ狭義単調減少．

補題 2.4. 上の $\Phi_j(\tau)$ の条件が成り立つならば，$\det A_m > 0$ となる．

証明． 条件 (a) が成り立つとする．補題 2.3 により，$M_{m,s}^{(1)} > 0$, $M_{m,s}^{(2)} > 0$ である．これと $(m\lambda)^2 > 0$ とから，$\det A_m > 0$ が成り立つ．

条件 (b) が成り立つとする．このとき $M_{m,s}^{(1)} = 0$, $M_{m,s}^{(2)} > 0$ である．$\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)} \neq 0$ ならば $\{M_{m,s}^{(2)}(\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)})\}^2 > 0$ なので $\det A_m > 0$ が成り立つ．また，$\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)} = 0$ ならば $\{m^2\lambda^2 - (\alpha_1 + M_{m,c}^{(1)})(\alpha_2 + M_{m,c}^{(2)})\}^2 > 0$ なので $\det A_m > 0$ が成り立つ．

条件 (c) が成り立つときは，条件 (b) のときと同様に証明できる．■

定理 2.5. 上の $\Phi_j(\tau)$ の条件が成り立つならば，方程式 (17)(18) は同じ周期を持つ周期解 $\nu_1(t), \nu_2(t)$ を持たない．

証明． 補題 2.4 により，A_m は逆行列を持つので，方程式 (23) は自明解

$$(a_m^{(1)}, b_m^{(1)}, a_m^{(2)}, b_m^{(2)}) = (0, 0, 0, 0)$$

しか持たない．これが $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので，$\nu_1(t), \nu_2(t)$ は恒等的に 0 に等しくなり，矛盾．■

2.3 エネルギー関数の導入による証明

方程式 (17)(18) の解 $\nu_1(t), \nu_2(t)$ に対して，

$$H(t) := (\alpha_2 + A_2)\nu_1(t)^2 + (\alpha_1 + A_1)\nu_2(t)^2 - \int_0^{T_0} \{\Phi_2(\tau)(\nu_1(t) - \nu_1(t-\tau))^2 + \Phi_1(\tau)(\nu_2(t) - \nu_2(t-\tau))^2\}\, d\tau$$

と定義する．ここで $A_j := \int_0^{T_0} \Phi_j(\tau)\, d\tau$ である．

前の小節の「$\Phi_j(\tau)$ の条件」が成り立つことを以下では仮定する．また，簡単のため，$\Phi_j(\tau)$ は C^1 級であるとする．

補題 2.6. $H(t)$ は広義単調増加である．

証明． $H'(t) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
H'(t) &= 2(\alpha_2 + A_2)\nu_1(t)\nu_1'(t) + 2(\alpha_1 + A_1)\nu_2(t)\nu_2'(t) \\
&\quad - 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)(\nu_1(t) - \nu_1(t-\tau)) \left\{\nu_1'(t) - \frac{\partial}{\partial t}\nu_1(t-\tau)\right\} d\tau \\
&\quad - 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)(\nu_2(t) - \nu_2(t-\tau)) \left\{\nu_2'(t) - \frac{\partial}{\partial t}\nu_2(t-\tau)\right\} d\tau \\
&= 2\alpha_2\nu_1(t)\nu_1'(t) + 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\nu_1(t)\nu_1'(t)\, d\tau + 2\alpha_1\nu_2(t)\nu_2'(t) + 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\nu_2(t)\nu_2'(t)\, d\tau \\
&\quad - 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\nu_1(t)\nu_1'(t)\, d\tau + 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\nu_1(t-\tau)\nu_1'(t)\, d\tau \\
&\quad - 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\nu_2(t)\nu_2'(t)\, d\tau + 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\nu_2(t-\tau)\nu_2'(t)\, d\tau \\
&\quad + 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)(\nu_1(t) - \nu_1(t-\tau))\frac{\partial}{\partial t}\nu_1(t-\tau)\, d\tau + 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)(\nu_2(t) - \nu_2(t-\tau))\frac{\partial}{\partial t}\nu_2(t-\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

ここで，最後の式に着目すると，第 *2* 項と第 *5* 項，第 *4* 項と第 *7* 項がキャンセルすることが分かる．第 *1* 項の $\alpha_2\nu_1(t)$ を方程式 (18) で変形し，第 *3* 項の $\alpha_1\nu_2(t)$ を方程式 (17) で変形する．この変形により，第

1 項，第 *3* 項，第 *6* 項，第 *8* 項をすべてキャンセルすることができる．残った第 *9* 項，第 *10* 項に関して，t, τ は独立なので

$$\frac{\partial}{\partial t}\nu_j(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\nu_j(t-\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\nu_j(t) \equiv 0$$

であることを利用して変形すると，

$$\begin{aligned} H'(t) &= 2\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))\frac{\partial}{\partial \tau}(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))\,d\tau \\ &\quad + 2\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))\frac{\partial}{\partial \tau}(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))\,d\tau \\ &= \Big[\Phi_2(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2 + \Phi_1(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2\Big]_{\tau=0}^{\tau=T_0} \\ &\quad - \int_0^{T_0} \left\{\Phi_2'(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2 + \Phi_1'(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2\right\} d\tau \end{aligned}$$

となる．$\Phi_j(T_0) = 0$ および，$\tau = 0$ において $\nu_j(t) - \nu_j(t-\tau) = 0$ であるから，最後の式の第 *1* 項は 0 となる．以上により，次の式が得られた：

$$H'(t) = -\int_0^{T_0} \left\{\Phi_2'(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2 + \Phi_1'(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2\right\} d\tau. \tag{25}$$

前の小節の「$\Phi_j(\tau)$ の条件」が成り立つならば，$\Phi_j'(\tau) \leqq 0$ が常に成り立つので，$H'(t) \geqq 0$ が常に成り立つ．したがって，$H(t)$ は広義単調増加である．■

本題とは関係ないが，この補題から直ちに導かれる結果を一つ述べる．

定理 2.7. $H(t_0) > 0$ なる t_0 が存在するならば，$\nu_1(t), \nu_2(t)$ の少なくとも一方は，$t \to \infty$ で 0 に収束しない．

証明． 仮定の下で，$t > t_0$ ならば $H(t) \geqq H(t_0) > 0$ である．結論を否定すると，$t \to \infty$ で $\nu_j(t) \to 0$ となり，$H(t)$ の定義式から $H(t) \to 0$ となることがわかる．これは $H(t) \geqq H(t_0)$ に反し，矛盾．■

この $H(t)$ を用いて，定理 2.5 の別証を以下で与える．

$\nu_1(t), \nu_2(t)$ がともに周期 T の周期関数であると仮定する．このとき，$H(t)$ の定義式から明らかに $H(t)$ も周期 T の周期関数となる．これと，$H(t)$ が広義単調増加であることから，$H(t)$ は t によらない定数となる[16]．したがって $H'(t) \equiv 0$ となる．

そこで $H'(t)$ の表式 (25) に着目すると，

$$\Phi_2'(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2, \Phi_1'(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2 \leqq 0$$

が常に成り立つので，$\forall t \geqq t_0$, $\forall \tau \in [0, T_0]$ に対して $\Phi_2'(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2$ と $\Phi_1'(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2$ はともに 0 に等しいことになる．

$\Phi_1(\tau), \Phi_2(\tau)$ の少なくとも一方は $[0, T_0]$ で狭義単調減少という仮定から，$\Phi_1(\tau)$ が $[0, T_0]$ で狭義単調減少として一般性を失わない．このとき $\Phi_1(\tau) > 0$ が a.e. $\tau \in [0, T_0]$ で成り立つ[17]ので，$\nu_2(t) = \nu_2(t-\tau)$ が a.e. $\tau \in [0, T_0]$ で成り立つ．$\nu_2(t)$ は連続関数なので，$\nu_2(t)$ は定数関数となるが，これは矛盾．以上で証明できた．

[16] 初期時刻を t_0 とおく．$\forall t \geqq t_0$ に対して，うまく自然数 n をとれば $t_0 \leqq t \leqq t_0 + nT$ となる．$H(t)$ が広義単調増加なので $H(t_0) \leqq H(t) \leqq H(t_0+nT)$ となるが，$H(t)$ は周期 T の周期関数なので $H(t_0+nT) = H(t_0)$ である．したがって，$H(t) = H(t_0)$ となる．t は t_0 以上の任意の実数だったので，$H(t)$ は $t \geqq t_0$ で恒等的に定数 $H(t_0)$ に等しい．

[17] つまり，$\Phi_1(\tau) = 0$ なる τ 全体の集合は Lebesgue 測度 0 であり，無視できる，ということ．a.e. は almost everywhere（ほとんどいたるところ）の略．