数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 99-104

Borsuk-Ulam type theorems for $(Z_p)^k$-actions

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate School of Science, Osaka University

1 序

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の単位球面 S^n に群 $\boldsymbol{Z}_2$ の作用を $g\cdot x=-x$ (g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) により与えるとき, S^n から S^n への同変写像は, 常にその写像度が奇数となることはよく知られたことであり, Borsuk-Ulam の定理はこの事実より導かれる. この例以外にも, 同じ群が作用する 2 つの位相空間に対して, その同変写像のホモトピー型に制限がつくことがあり, そのような, 同変写像のホモトピー型に関する定理を, 以下では Borsuk-Ulam 型定理と呼ぶことにする.

Fadell と Husseini が [1] で定義した cohomological index を用いて, [2, 3] で同変写像の写像度に関する制限について調べていて, 井上明氏がそれらを用いて [4, 5] で実 Stiefel 多様体に $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ が作用する場合と複素 Stiefel 多様体に $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が作用する場合について, 実際に写像度の制限について調べている. 本稿では, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が作用する多様体について, [2, 3, 4, 5] で述べられていない例や今後の課題について書くことにする.

2 cohomological index と同変写像の写像度

この節では, cohomological index と同変写像の写像度の関係について [2, 3] で書かれている内容について復習することにする.

G をコンパクト Lie 群とし, $EG\to BG$ で 普遍主 G 束を表す. G-空間 X と整数 $k\in\boldsymbol{Z}$ に対して, G-index $\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K})$ を $c_X: X\to *$ (1 点からなる空間 $*$ への定値写像) から誘導される同変コホモロジーの準同型の kernel

$$\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K})=\mathrm{Ker}(c_X^*: H_G^k(*;\boldsymbol{K})\to H_G^k(X;\boldsymbol{K}))\quad (\boldsymbol{K}\text{ は体})$$

により定義する. $H_G^k(*;\boldsymbol{K})\cong H^k(BG,;\boldsymbol{K})$ であり, $\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K})$ は $H^k(BG;\boldsymbol{K})$ の部分群になる. また, X が自由な G-空間のときには, $\tilde{\alpha}: X\to EG$ を G-写像と

するとき, $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha : X/G \to BG$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^* : H^k(BG; \boldsymbol{K}) \to H^k(X/G; \boldsymbol{K})$ の kernel が $\mathrm{Ind}_k^G(X; \boldsymbol{K})$ と一致する. index に関して次の命題が成り立つことは容易にわかる.

命題 2.1([1]). X, Y を G-空間とするとき, G-写像 $f : X \to Y$ が存在するならば,

$$\mathrm{Ind}_k^G(X; \boldsymbol{K}) \supset \mathrm{Ind}_k^G(Y; \boldsymbol{K}).$$

Borsuk-Ulam の定理もこの命題から直接的に得ることができる. しかしながら, この命題は同変写像の写像度については述べていない. 以下では, 同変写像の写像度と G-index の関係について見ていくことにしよう.

G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし, M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する. $H^{n-\dim G}(M; \boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(N; \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ が成り立つことと命題 2.1 より, M から N への同変写像が存在するとき, $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2)$, $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2)$ については

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) &= \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2) \\
\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) &\neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2) \\
\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) &= \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2)
\end{aligned}$$

の 3 通りが考えられ, 上の 2 つの場合については次のことが成り立つ.

定理 2.2([2, 3]). G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし, M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する. このとき,

(1) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2)$ であれば, 任意の G-写像 $f : M \to N$ に対して $f^* : H^n(N; \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M; \boldsymbol{Z}_2)$ は同型である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G-写像の写像度は奇数である.

(2) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2)$ であれば, 任意の G-写像 $f : M \to N$ に対して $f^* : H^n(N; \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M; \boldsymbol{Z}_2)$ は零写像である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G-写像の写像度は偶数である.

$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_2)$ のときには, 上のような写像度に関する制限を受けないような例がある. 例えば, $M = N = T^2 (=$

$S^1 \times S^1$) とし, T^2 に $\boldsymbol{Z}_2$ を $g(z_1, z_2) = (-z_1, z_2)$ ($g \in \boldsymbol{Z}_2$ は生成元で, $z_1, z_2 \in S^1$) と作用させると, $\mathrm{Ind}_2^G(N; \boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_2^G(M; \boldsymbol{Z}_2) = H^2(BG; \boldsymbol{Z}_2)$ であり, M から N へはどのような写像度の同変写像も存在し得る.

M, N および $M/G, N/G$ が向き付け可能であれば, $\boldsymbol{Z}_p$ 係数 (p は素数) のコホモロジーで次のように定理 2.2 と同様の結果が得られる.

定理 2.3([2, 3]). G をコンパクト Lie 群, M, N を向き付けられたコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とする. また, M, N 上の G-作用は自由であり, $M/G, N/G$ が向き付け可能であることを仮定する. このとき, p を素数とすると

(1) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_p) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_p) \neq H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れない.

(2) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \boldsymbol{Z}_p) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \boldsymbol{Z}_p) = H^{n-\dim G}(BG; \boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れる.

3 Stiefel 多様体上の $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 作用に関する考察

$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $O(k)$ を直交群とすると, $O(k)$ は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用するこの作用を対角成分に ± 1 が並ぶような行列全体からなる部分群 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ に制限する. このとき, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 空間となるが, この作用について, 井上明氏は次の定理を証明した.

命題 3.1([4, 5]). $n = \dim V_k(\boldsymbol{R}^m)$ とするとき, $\mathrm{Ind}_n^{(\boldsymbol{Z}_2)^k} V_k(\boldsymbol{R}^m) \neq H^n(B(\boldsymbol{Z}_2)^k; \boldsymbol{Z}_2)$.

この定理から, 定理 2.2 を使って, つぎの Borsuk-Ulam 型定理が得られる.

定理 3.2([4, 5]). $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像の写像度は奇数である.

この定理がもう少し一般化できないであろうか？というのが, 我々の考えたい問題である. 具体的にいうと次の問題である.

問題 1. $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の自明でない部分群 H に制限したとき $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への H 写像の写像度は必ず奇数になるか？

問題 2. $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ 上の $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 作用をどのように与えても，その作用が自由であれば，$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像の写像度は必ず奇数となるか？

まずは問題 1 について考えることにする．結論を先に書くと，問題 1 は一般的に成り立つわけではない．次のような反例がある．

例．$V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ に $\boldsymbol{Z}_2$ を

$$g\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{2m-1} & -b_{2m} \end{pmatrix}$$

(g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) により作用させる．このとき，$V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ への写像を

$$f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

と定義すると，これは $\boldsymbol{Z}_2$ 写像になっていて，写像度は 0 である．写像度が 0 であることは，以下のようにして見ることができる．

$f_1 : V_2(\boldsymbol{R}^{2m}) \to S^{2m-1}$ を

$$f_1\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}, a_{2m})$$

により定義し，$f_2 : S^{2m-1} \to V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ を

$$f_2(a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}, a_{2m}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

により定義すると，$f = f_2 \circ f_1$ である．$n = \dim V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ とすると，$H^n(S^{2m-1}; \boldsymbol{Z}_2) = 0$ なので，$f^* = f_1^* \circ f_2^* : H^n(V_2(\boldsymbol{R}^{2m}); \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(V_2(\boldsymbol{R}^{2m}); \boldsymbol{Z}_2)$ の像は 0 になる．したがって，f の写像度は 0 である．

問題 1 にはこのように反例があるわけであるが，Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の k や m，また，作用する $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群の取り方によっては，同変写像の写像度に制限がつく場合があるかもしれない．実際，上の例と同様の例を $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ で構成しようとしても，S^{2m} から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ への写像を作るところがうまくいかない．S^{2m} から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ への写像を上の例のようにして作るのは，S^{2m} 上のベクトル場で，各点における接ベクトルの大きさが 1 であるようなものを構成することに他なら

ないが, S^{2m} 上のベクトル場は ポアンカレ-ホップの定理より必ず零点があり, 上の例と同様にはできないのである. $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ に上の例のように $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させるとき, $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ からそれ自身への同変写像で写像度が偶数になるようなものが存在するかはわかっていない. ただ, 定理 2.2 を用いて, そのことを調べることはできない. H を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ とも異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_2)$ (n は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の次元) が成り立つからである. この事実は [4, 5] に証明があるが, 下に, もう少し一般的なことを証明しておこう.

命題 3.3. M を n 次元の連結な閉多様体で, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が自由に作用しているとする (p は素数). M が向き付け可能, または $p = 2$ のとき, H を $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の部分群で, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ と異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$.

証明. 以下, $G = (\boldsymbol{Z}_p)^k$ とする. H を G と異なる G の部分群とすると, $\pi : BH \to BG$ より導かれるコホモロジーの準同形 $\pi^* : H^*(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^*(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射である. (このことは, この場合, ある G の部分群 K により $G = H \times K$ となるようにできることから容易にわかる.)

$\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) \neq H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ であると仮定すると, $H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は $\boldsymbol{Z}_p$ と同型なので, M 上の H 作用に関する分類写像 $f_H : M/H \to BH$ より誘導される準同型 $f_H^* : H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射になる. したがって, $f_H^* \circ \pi^* : H^n(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射である.

一方, G/H は位数が p の倍数の群になるから, $q : M/H \to M/G$ より導かれる準同型 $q^* : H^n(M/G; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は零写像である. したがって, $f_G : M/G \to BG$ を M 上の G 作用に関する分類写像とすると, $q^* \circ f_G^* : H^n(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は零写像である. $f_H^* \circ \pi^* = q^* \circ f_G^*$ であるので, これは矛盾である. したがって, $\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ である.∎

このことより, H を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ とも異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_2)$ (n は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の次元) が成り立つことがわかる. さらに, 命題3.3 からは次のような系も得られる.

系 3.4. S^n 上には $\boldsymbol{Z}_p \times \boldsymbol{Z}_p$ は自由に作用しない.

証明. n が偶数の場合はオイラー標数よりすぐわかるので, 以下, n が奇数の場合を考える. S^n 上に自由な $\boldsymbol{Z}_p \times \boldsymbol{Z}_p$ 作用が存在すると仮定すると, その部分群 $\boldsymbol{Z}_p$

の作用の index について, 命題 3.3 より $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_p}(S^n;\boldsymbol{Z}_p) = H^n(B\boldsymbol{Z}_p;\boldsymbol{Z}_p)$ がいえるが, S^n 上の自由な $\boldsymbol{Z}_p$ 作用に対しては, 一般に $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_p}(S^n;\boldsymbol{Z}_p) \neq H^n(B\boldsymbol{Z}_p;\boldsymbol{Z}_p)$ が成り立ち, 矛盾する. したがって, S^n 上には $\boldsymbol{Z}_p \times \boldsymbol{Z}_p$ は自由に作用しないことがわかる. ∎

系 3.4 は [6, 7] にも紹介されている命題であるが, それぞれ別の方法で証明している. ここで紹介した方法だと, 系 3.4 が Borsuk-Ulam の定理と関係していることがわかるであろう. このように, 自由な $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の作用についての Borsuk-Ulam 型定理は, その多様体が, どのくらい大きな k に対して, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の自由な作用をもつか, ということと関係することがわかる. それをコホモロジーの状況から判定することが今後の課題であり, また, この節の最初の方で挙げた問題 2 の解決につながるものと考えている.

本稿では, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ 上の $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ 作用について調べたが, 複素 Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ 上の $(\boldsymbol{Z}_p)^l$ 作用 (p は素数) についても, ここで書いたことと同様の考察ができることを注意しておこう.

参考文献

[1] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, Ergodic Theory Dynamical Systems, **8**(1988), 73–85.

[2] Y. Hara, The degree of equivariant maps, Topology Appl. **148**(2005) 113–121.

[3] Y. Hara, 同変写像の写像度について, 数理解析研究所講究録 **1393**(2004) 1–8.

[4] A. Inoue, Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds, to appear in Osaka J. Math.

[5] A. Inoue, Stielfel 多様体間の同変写像の写像度, 数理解析研究所講究録 **1393**(2004) 9–16.

[6] K. Kawakubo, The theory of transformation groups, Oxford Univ. Press, 1991.

[7] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.