数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 105-108

オーミニマル構造におけるホイットニー型定理について
A Whitney type theorem in o-minimal structures

和歌山大学教育学部　川上 智博 (Tomohiro Kawakami)
Faculty of Education, Wakayama Univiversity

1. 序文

塩田 [9] は、$0 \leq r < \infty$ のとき、任意の C^r Nash 多様体は、アフィンであることを証明した。$\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ を $\mathbb{R}$ の標準構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡大とする。$\mathcal{M} = \mathcal{R}$ ならば、デファイナブル C^r 多様体は、C^r Nash 多様体である。$\mathcal{M}$ 上のデファイナブル C^r カテゴリーは、C^r Nash カテゴリーの一般化である。

順序極小構造の参考文献は、[1], [3], [10] である。ここでは、"デファイナブル" は、"パラメータつきで $\mathcal{M}$ 上デファイナブル" を表し、多様体は、すべて境界をもたないとする。

さらなる順序極小構造の性質・構成法が、[2], [4], [8] によって研究されている。また、デファイナブルカテゴリーはセミアルジェブリックカテゴリーの一般化であり、$\mathcal{R}$ 上のデファイナブルカテゴリーはセミアルジェブリックカテゴリーに一致する。

r が非負整数で $\mathcal{M}$ が多項式的有界（指数的）ならば、デファイナブル C^r 多様体は、アフィンである [7]（[5]）。

以下がこれらの結果を拡張したものである。

定理 1.1. $2 \leq r < \infty$ ならば、任意の n 次元デファイナブル C^r 多様体 X は、$\mathbb{R}^{2n+1}$ にデファイナブル C^r 埋め込み可能である。

Nash カテゴリー (i.e. $\mathcal{M} = \mathcal{R}$) であっても、定理 1.1 で $r = \infty$ ととることができない [9]。

定理 1.1 と 1.3 [5] より、以下の定理を得る。

定理 1.2. $1 \leq s < r < \infty$ とするとき、任意のデファイナブル C^s 多様体は、デファイナブル C^r 微分同相を除いて、ただひとつのデファイナブル C^r 多様体構造をもつ。

2. デファイナブル C^r 多様体

$K \subset \mathbb{R}^n$ と $L \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。写像 $f : K \to L$ が**デファイナブル**とは、f のグラフ ($\subset K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$) がデファイナブルとなることである。$U \subset \mathbb{R}^n$ と $V \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル開集合とし、$0 \leq r \leq \omega$ とする。C^r 写像 $f : U \to V$ が**デ**

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 57R55, 58A05, 03C64.
Keywords and Phrases. Definable C^r manifolds, o-minimal, affine.

ファイナブル C^r 写像とは、それがデファイナブルとなることである。デファイナブル C^r 写像 $h: U \to V$ が**デファイナブル C^r 微分同相写像** ($r=0$ のときは、**デファイナブル同相写像**) とは、デファイナブル C^r 写像 $k: V \to U$ が存在して、$h \circ k = id$ かつ $k \circ h = id$ となることである。

定義 2.1 ([6]). $0 \leq r \leq \omega$ とする。
(1) $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル部分集合 X が $\mathbb{R}^n$ の d **次元デファイナブル C^r 部分多様体**とは、各点 $x \in X$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の原点におけるデファイナブル開近傍 U_x から $\mathbb{R}^n$ の x におけるデファイナブル開近傍 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 *(*$r=0$ のときは、デファイナブル同相写像*)* ϕ_x が存在して、$\phi_x(0)=x, \phi(\mathbb{R}^d \cap U_x) = X \cap V_x$ とできることである。ただし、$\mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^n$ の最後の $(n-d)$ 成分が 0 となる部分集合を表す。
(2) d **次元デファイナブル C^r 多様体** X とは、C^r 多様体であって、有限個のチャート $\{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^d\}$ が存在して、各 i,j に対して、$\phi_i(U_i \cap U_j)$ が $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル開部分集合で、写像 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|\phi_i(U_i \cap U_j) : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像 *(*$r=0$ のときはデファイナブル同相写像*)* であることである。このとき、このチャートを**デファイナブル C^r** という。
(3) X *(*Y*)* をデファイナブル C^r 多様体でそのデファイナブル C^r チャートをそれぞれ $\{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_i$ *(*$\{\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^m\}_j$*)* とする。$C^r$ 写像 $f: X \to Y$ が**デファイナブル C^r 写像**とは、各 i,j に対して、$\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i)$ が $\mathbb{R}^n$ で開かつデファイナブルで、$\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \to \mathbb{R}^m$ がデファイナブル C^r 写像であることである。
(4) X と Y をデファイナブル C^r 多様体とする。X が Y と**デファイナブル C^r 微分同相** ($r=0$ のときは**デファイナブル同相**) とは、デファイナブル C^r 写像 $f: X \to Y$ と $h: Y \to X$ が存在して $f \circ h = id$ かつ $h \circ f = id$ となることである。
(5) デファイナブル C^r 多様体が**アフィン**とは、それがある $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル C^r 部分多様体とデファイナブル C^r 微分同相 ($r=0$ のときはデファイナブル同相) となることである。

3. 定理の証明

命題 3.1. X をアフィンデファイナブル C^r 多様体、V を X のデファイナブル閉集合、r を非負整数とする。このとき、非負デファイナブル C^r 関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が存在して、$f^{-1}(0) = V$。

証明. 3.2 [6] より、X は、ある $\mathbb{R}^l$ の閉デファイナブル C^r 部分多様体とデファイナブル C^r 微分同相である。X とその像を同一視する。. このとき、V は $\mathbb{R}^l$ の閉集合なので、[3] より、デファイナブル C^r 関数 $\phi: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ で $\phi^{-1}(0) = V$ を満たすようにできる。ϕ

を制限することにより、デファイナブル C^r 関数 $\psi : X \to \mathbb{R}$ で $\psi^{-1}(0) = V$ を満たすものを得る。よって、$f := \psi^2 : X \to \mathbb{R}$ が求める関数である。 □

以下は、**デファイナブル 1 の分解**である。

命題 3.2. r を非負整数、$\{U_i\}_{i=1}^k$ をデファイナブル C^r 多様体 X のデファイナブル開被覆とする。このとき、デファイナブル C^r 関数 $\lambda_i : X \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le k)$ が存在して、$0 \le \lambda_i \le 1$, $supp\ \lambda_i \subset U_i$、$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たす。

X がアフィンのとき、命題3.2 は4.8 [6] で知られている。

証明. まず、X のデファイナブル開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^k$ で、$\overline{V_i} \subset U_i$, $(1 \le i \le k)$ を満たすものが存在することを証明する。ただし、$\overline{V_i}$ は X における V_i の閉包とする。

k に関する帰納法で証明する。$k = 1$ のときは、明らかである。X のデファイナブル開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^{k-1} \cup \{U_k\}$ で、$\overline{V_i} \subset U_i$, $(1 \le i \le k-1)$ を満たすものが存在したとする。

$X_{k-1} := \cup_{i=1}^{k-1} V_i$ とおく。帰納法の仮定より、X_{k-1} のデファイナブル開被覆 $\{W_i\}_{i=1}^{k-1}$ が存在して、$cl\ W_i \subset V_i$ を満たす。ただし、$cl\ W_i$ は W_i の X_{k-1} における閉包を表す。

U_k はアフィンとしてよい。$Z_k := U_k \cap \cup_{i=1}^{k-1} V_i$ とし、$Cl\ Z_k$ を U_k おける Z_k の閉包とする。命題3.1 より、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi_k : U_k \to \mathbb{R}$ で $\phi_k^{-1}(0) = Cl\ Z_k$ を満たすものが存在する。$cl\ W_1 \subset V_1$ なので、ϕ_k は拡張できて、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi_k^1 : U_k \cup W_1 \to \mathbb{R}$ で $(\phi_k^1)^{-1}(0) = Cl\ Z_k \cup W_1$ を満たすようにできる。帰納的に、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi : X \to \mathbb{R}$ で、$\phi^{-1}(0) = Cl\ Z_k \cup W_1 \cdots \cup W_{k-1}$ を満たすものがとれる。このとき、$V_k = \{x \in X | \phi(x) > 0\}$ とおけば、$\overline{V_k} \subset U_k$ であり、$\{V_i\}_{i=1}^k$ が求める X のデファイナブル開被覆である。

命題3.1 より、非負デファイナブル C^r 関数 $\mu_i : U_i \to \mathbb{R}$ で $\mu_i^{-1}(0) = U_i - V_i$ を満たすものがとれる。このとき、μ_i は非負デファイナブル C^r 関数 $\mu'_i : X \to \mathbb{R}$ で $\mu_i'^{-1}(0) = X - V_i$ を満たすものに拡張できる。よって、$\lambda_i := \mu'_i / \sum_{i=1}^k \mu'_i$ が求めるデファイナブル 1 の分解である。 □

定理 1.1 の証明. $\{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i=1}^k$ を X のデファイナブル C^r アトラスとする。命題3.2 より、デファイナブル C^r 関数 $\lambda_i : X \to \mathbb{R}$, $(1 \le i \le k)$ で、$0 \le \lambda_i \le 1$、$supp\ \lambda_i \subset U_i$、$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たすものがとれる。$F(x) = (\lambda_1(x)\phi_1(x), \dots \lambda_k(x)\phi_k(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x))$ で定義される写像 $F : X \to \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^k$ は、デファイナブル C^r 埋め込みである。よって、X はアフィンである。

1.2 [5] によって、X はコンパクトととしてよい。だから、1.4 [11] と同様にして、任意のデファイナブル C^r 写像 $f : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ は、C^r 位相で単射デファイナブルはめ込

み $h : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ で近似できる。X はコンパクトなので、h が求めるデファイナブル C^r 埋め込みである。 □

REFERENCES

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic field with exponentiation*, Ann. Math. **140** (1994), 183–205.

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] L. van den Dries and P. Speissegger, *The real field with convergent generalized power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **350**, (1998), 4377–4421.

[5] T. Kawakami, *Affineness of definable C^r manifolds and its applications* Bull. Korean Math. Soc. 40, (2003), 149-157.

[6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[7] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.

[8] Y. Peterzil, A. Pillay and S. Starchenko, *Definably simple groups in o-minimal structures*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 4397–4419.

[9] M. Shiota, *Abstract Nash manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 155–162.

[10] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[11] G. Wasserman, *Equivariant differential topology*, Topology **8** (1969), 127–150.