数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 109-118

同変手術理論と球面上の滑らかな作用の不動点集合

Equivariant Surgery and the Fixed Point Sets of Smooth Actions on Spheres

岡山大学大学院自然科学研究科　森本 雅治 (Masaharu Morimoto)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 序

ここでは G は有限群を表すものとする．また特に断らない限り，多様体やその上の群の作用は**滑らか**なものとする．

B. Oliver はコンパクト多様体 F がディスクの上の G-作用の不動点集合であるか否かを Euler 数 $\chi(F)$ と，接束 $T(F)$ の $\widetilde{K}(F)$ における条件とで記述した [10]．この結果は Morimoto-Pawałowski [8] において，閉多様体が球面上の G-作用の不動点集合であるか否かを判定する重要な手がかりとなった．本研究では，homology 同値写像を得るための同変手術理論を研究することにより，[8] の結果を発展させることを目標とした．その結果 G が冪零 Oliver 群であるか，あるいは非自明な完全群である場合には，どのような閉多様体が球面上の G-作用 *[1]の不動点集合になりうるかを決定できた．

2. 同変手術理論における課題

X, Y をコンパクトな n-次元多様体とし，$f : X \to Y$ を G-写像とする．f を同変手術によって homotopy 同値写像 $f' : X' \to Y$ に変形できたとすると，Smith Theory により任意の p-部分群 $P \leq G$ に対し

$$f'^P : X'^P \to Y^P$$

は $\mathbb{Z}_{(p)}$-homology equivalence になっていなければならない．ここで p は素数で，

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}, (b,p) = 1 \right\},$$

X^P は X の P-不動点集合で，この上には群 $N_G(P)/P$ が作用する．従って,「homotopy 同値写像を得るための同変手術理論」の構築には，その一部分として「homology 同値

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 57S17, 57S25. Secondary: 19J25, 20C05, 55M35, 57R67.

Key words and phrases. Smooth action, equivariant surgery, sphere, fixed point set.

[1]G-作用 * の定義は Section 3 で述べる．

写像を得るための $N_G(P)/P$-手術理論」の構築が不可欠である．$N_G(P)/P$ を改めて G と考え，次の問題を研究する．

Problem 2.1. G-写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，G-手術により homology 同値写像に変形できるか否かを判定せよ．

すでに知られている結果をふり返ってみると，G が trivial group の場合，つまり G の作用を考えない場合，には

- Wall [15] の手術理論（homotopy 同値写像を得るための理論）

を一般化した

- Cappell-Shaneson [2] の手術理論（homology 同値写像を得るための理論）

がある．そこで Cappell-Shaneson の手術理論の equivariant analogy を

- Oliver-Petrie [12] の G-CW 手術理論等（[14], [4]）

のアイデアを取り入れながら構築する．

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Wall の手術理論.} \arrow[r] \arrow[d] & \text{C.-S. の手術理論} \arrow[d] \\
G\text{-CW 手術理論} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c}\text{Petrie の } G\text{-手術理論} \\ \text{（単連結）}\end{array} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{Bak の } K\text{-理論} \\ \text{-form para.-}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{M. の } G\text{-手術理論} \\ \text{（単連結）} \\ \text{-form para.-}\end{array} \arrow[r] & \textbf{新手術理論}
\end{tikzcd}
$$

手術理論の進展

$$
\begin{tikzcd}
 & L_n^h(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_n^h(\psi) \arrow[d] \\
\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])/N \arrow[r] \arrow[dr] & L_n^h(\mathbb{Z}[G]) \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
 & W_n(\mathbb{Z}[G], \Lambda) \arrow[r] & \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})
\end{tikzcd}
$$

手術障害類群の進展

上の図式において $\pi = \pi_1(Y)$, $\widetilde{Y}$ は Y の普遍被覆空間，$\widehat{G} = \pi_1(EG \times_G \widetilde{Y})$, また

$$\psi : \mathbb{Z}[\pi] \to R, \quad \widehat{F} : (\mathbb{Z}[\widehat{G}], \widehat{\Lambda}) \to (R[G], \Lambda)$$

である．

我々は球面上の群作用の研究にこの新しい G-手術理論を応用する [5]．この応用において G-写像

$$f_1 : X_1 \to Y, \ f_2 : X_2 \to Y \ (\partial f_2 = id_{\partial Y})$$

の G-連結和

$$f_1 \#_G \ G \times_H (id_Y \cup_\partial f_2) : X_1 \#_G \ G \times_H (-Y \cup_\partial X_2) \to Y$$

の手術障害類を f_1, f_2 の手術障害類から計算できることを必要とする．しかし Cappell-Shaneson による手術障害類の定義では $G = \{e\}$ であってもこの計算が行えなず（少なくとも簡単に実行できるものではない），Cappell-Shaneson の理論は我々にとって十分なものではない．従って，単に Cappell-Shaneson の理論を真似れば良いわけではなく，nonequivariant な場合においても彼らの理論の改善になっている G-手術理論を得なければならない．

3. G-手術理論の応用

後ほど解説する G-手術理論は次の，球面上の G-作用に関する次の問題を研究する上で有用である．

Problem 3.1. F は閉多様で，ディスク上の G-作用 D の不動点となるものとする，つまり $D^G = F$．このとき球面上の G-作用 X で $X^G = F$ を満たすものが存在するか．

F がディスク上の作用の不動点集合であるので，Oliver [11] により

$$\overline{\chi}(F) \equiv 0 \mod n_G \tag{3.1}$$

という必要条件が得られる．ここで $n_G \geqq 0$ は Oliver 整数と呼ばれるもので，

$$\overline{\chi}(F) := \chi(F) - 1$$

である（$\chi(-)$ は Euler characteristic）．もし $X^G \neq \varnothing$ ならば，$x \in X^G$ を任意に取り $V = T_x(X)$ と置けば，写像度 1 の G-写像

$$f : X \to Y := S(\mathbb{R} \oplus V) \quad (V \text{ の 1-点コンパクト化})$$

を得る．f は homotopy 同値写像であるので，その写像錐 C_f は可縮である．再び Oliver [11] を用いて

$$\overline{\chi}(Y^G) - \overline{\chi}(X^G) \equiv 0 \mod n_G \tag{3.2}$$

を得る．$\chi(Y^G)=\pm 1$ と $F=X^G$ を代入し $n_G=1$ を得る．

有限群 G で $n_G=1$ を満たすものを **Oliver 群** と呼ぶ．Oliver は [11] において，次の (1)-(3) が互いに同値であることを証明した．

(1) $n_G=1$.
(2) G-不動点を全く持たない，ディスク上の G-作用が存在する．
(3) G には次の（条件）を満たす正規部分群列 $P \triangleleft H \triangleleft G$ が存在しない：
（条件） $P, G/H$ はそれぞれ素数冪位数の群で， H/P は巡回群である．

このことから，明らかに非可解群は Oliver 群である．また少し考えれば，冪零群 G が Oliver 群である必要十分条件は「G が少なくとも 3 つの異なる非巡回群である Sylow 部分群を含む」であることが判る．

例. $G=C_{pqr}\times C_{pqr}$ は冪零 Oliver 群である，ここで p, q, r は異なる素数.

G が素数冪位数の群ではないとき，X 上の G-作用が **G-作用*** であるとは G の任意の Sylow 部分群 P に対して $X^G \neq X^P$ が成り立つときと定義する．我々の G-手術理論を応用して次の結果を得た．

Theorem 3.2 ([6]). G は非自明な完全群か冪零 *Oliver* 群とし，F は閉多様体とする．このとき以下の 3 つの命題は同値である．

(1) F は球面上の G-作用* の不動点集合となる．
(2) F はディスク上の G-作用* の不動点集合となる．
(3) F はディスク上の G-作用 の不動点集合となる．

Oliver は [10] において，有限群 G が指定されたとき，どのような多様体 F がディスク上の G-作用の不動点集合になるかを，F の Euler 数 $\chi(F)$ と接束 $T(F)$ の $\widetilde{KO}(F)$ を用いた条件により完全に解明した．それを用いると次を得る．

Corollary 3.3 ([6]). G は 冪零 *Oliver* 群，F は閉多様体とする． このとき次の (1), (2) は同値な命題である．

(1) F は球面上の G-作用* の不動点集合である．
(2) F は *stably complex* である，すなわち $T(F)\in r(\widetilde{K}(F))$.

これらの結果は「F の各連結成分が**単連結**であるかあるいは**stably に平行化可能** である」という仮定の下では Morimoto-Pawałowski [8] (cf. [13]) において既に知られている．Theorem 3.2 の証明は Theorems 4.3, 5.1, 6.2 を用いて行われる．

4. 新しい障害類群 $\Gamma(\mathcal{F})$

$n=2k$ の場合に，Section 2 で述べたように連結和の手術障害類をより良く理解するためには，Cappell-Shaneson の quadratic form （言い換えると quadratic module）の一般化が必要であった．

$(A,-,(-1)^k,\Lambda)$ を form ring とする．すなわち A は単位元を持つ可換環，$-$ は A 上の involution，$\lambda=(-1)^k$ は symmetry を表わし，Λ は A 上の form parameter である．さらに A' も単位元と involution を持つ可換環で，$\mathcal{F}:A\to A'$ は involution を保つ local epimorphism とする．

Definition 4.1 ([7]). α が $\mathcal{F}$ 上の **generalized quadratic module** であるとは α が次の (1)–(7) を満たす組 $(\kappa:H\to\underline{H},\varphi,q,\underline{\varphi})$ であることを意味する．

(1) H は有限生成 A-加群である．

(2) $\underline{H}$ は stably に自由な A'-加群である．

(3) $A'\otimes_A\kappa:H_{A'}\to\underline{H}$ は全射である．

(4) $\varphi:H\times H\to A$ は $(-1)^k$-Hermitian form ある．

(5) $q:H\to A/\Lambda$ は φ に関する quadratic map ある..

(6) $\underline{\varphi}:\underline{H}\times\underline{H}\to A'$ は nonsingular $(-1)^k$-Hermitian form ある..

(7) $\underline{\varphi}(\kappa(x),\kappa(x'))=\mathcal{F}(\varphi(x,x'))$ $(x,\,x'\in H)$ が成り立つ．

もし $\Lambda=\min_A$ で (H,φ,q) が Cappell-Shaneson の意味で quadratic module であれば，$(H\to H_{A'},\varphi,q,\varphi_{A'})$ は generalized quadratic module である．

$\alpha=(\kappa:H\to\underline{H},\varphi,q,\underline{\varphi})$ を $\mathcal{F}$ 上の generalized quadratic module とする．このとき $-\alpha=(\kappa:H\to\underline{H},-\varphi,-q,-\underline{\varphi})$ とおく．H の A-submodule L が α の **presubkernel** あるいは **pre-Lagrangian** とは次の (1)–(2) を満たすときをいう．

(1) L は totally isotropic である．つまり $\varphi(L,L)=\{0\}$ かつ $q(L)=\{0\}$.

(2) $\underline{H}$ のある A'-basis $\{x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m\}$ が $\{x_1,\dots,x_m\}$ は $\langle\kappa(L)\rangle_{A'}$ の A'-基底となり，さらに $\underline{\varphi}(x_i,y_j)=\delta_{i,j}$ を満たす．

もし $\mathcal{F}$ 上の generalized quadratic module α が presubkernel を持てば α は **null module** と呼ばれる．$\mathcal{F}$ 上の generalized quadratic module α,β に対し $\alpha\oplus-\beta\oplus\gamma$ が null module となる null module γ が存在するとき，α と β は同値であるという（$\alpha\sim\beta$ と書く）．この同値関係による $\mathcal{F}$ 上の generalized quadratic modules の同値類の全体を $\Gamma(\mathcal{F})$ と書く．$\Gamma(\mathcal{F})$ は orthogoal sum によって定まる加法により可換群になる．定義から自然に $\Gamma(\mathcal{F})\to L_n^h(A')$ が誘導される．

また $\Lambda=\min_A$ の場合には Cappell-Schaneson 群 $\Gamma_n^h(\mathcal{F})$ から $\Gamma(\mathcal{F})$ への自然な準同型写像がある．

次の 2 つの定理は手術理論を理解，応用する上で重要である．

Theorem 4.2 ([7]). $\Lambda = \min_A$ のとき，自然な準同型写像 $\Gamma_n^h(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{F})$ は同型写像である．

Theorem 4.3 ([6], [7]). もし $\widetilde{G} = \pi \rtimes G$, $|\pi| < \infty$, $R = \mathbb{Z}_{(p)}$, $(|\pi|, p) = 1$, $\Lambda = \min_A$ であるならば，自然な準同型写像 $\Gamma(\mathcal{F}) \to L_n^h(A')$ は同型写像である．

5. G-手術障害類

この section では Cappell-Schaneson [2] の analogy により

- G-手術障害類 $\sigma_{\mathrm{CS}}(f, b) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$ $(\widehat{G} = \pi_1(EG \times_G Y), \widehat{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\widehat{G}] \to R[G])$

を，また新たに

- G-手術障害類 $\sigma(f, b) \in \Gamma(\widetilde{\mathcal{F}})$ $(\widetilde{G} = \pi_1(EG \times_G X), \widetilde{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\widetilde{G}] \to R[G])$

を導入し ([7])，これらの障害類の関係を述べる．

記述の単純化を図り，$R = \mathbb{Z}_{(p)}$ (p は素数) とし，G-手術を行う連結多様体 X は **gap condition**

(GC) 任意の $g \in G$, $g \neq e$, に対して，$\dim X^g < k$

を満たすものとする．また写像度 1 の G-枠付写像 (f, b) $(f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, $\dim X = n = 2k$, $b : T(X) \oplus f^*\eta \to f^*\xi)$ は $\pi_1(f) : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ が全射で，しかも次の条件を満たしているとしよう．

(1) $\partial f : \partial X \to \partial Y$ は R-homology 同値写像である．
(2) 任意の p-冪位数の部分群 $P \neq \{e\}$ に対して，$f^P : X^P \to Y^P$ は R-homology 同値写像である．
(3) 任意の $g \in G$, $g \neq e$, に対して，$\chi(X^g) = \chi(Y^g)$ である．

X の普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ と Y の 普遍被覆空間 $\widetilde{Y}$ にはそれぞれ $\widetilde{G} = \pi_1(EG \times_G X)$ と $\widehat{G} = \pi_1(EG \times_G Y)$ が作用し，f を被覆する $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ は $\widetilde{G}$-写像と見なされる．写像 $f : X \to Y$ によって $\widetilde{Y}$ から誘導される X の被覆空間を $f^*\widetilde{Y}$ あるいは $\widehat{X}$ で表わす．G の位数 2 の元をすべて集めてできる集合を $G(2)$ で表わす．さらに

$$Q = \{g \in G(2) \mid \dim X^g = k - 1\}$$
$$\widehat{Q} = \{g \in \widehat{G}(2) \mid \dim \widehat{X}^g = k - 1\}$$
$$\widetilde{Q} = \{g \in \widetilde{G}(2) \mid \dim \widetilde{X}^g = k - 1\}$$

とおき，Q, $\widehat{Q}$, $\widetilde{Q}$ の生成する $R[G]$, $\mathbb{Z}[\widehat{G}]$, $\mathbb{Z}[\widetilde{G}]$ 上の form parameter をそれぞれ $\Lambda = (Q)_{R[G]}$, $\widehat{\Lambda} = (\widehat{Q})_{\mathbb{Z}[\widehat{G}]}$, $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{Q})_{\mathbb{Z}[\widetilde{G}]}$ とする．このとき form ring の準同型写像

$$\widehat{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}[\widehat{G}], -, (-1)^k, \widehat{\Lambda}) \to (R[G], -, (-1)^k, \Lambda)$$
$$\widetilde{\mathcal{F}} : (\mathbb{Z}[\widetilde{G}], -, (-1)^k, (\widetilde{Q})_{\mathbb{Z}[\widetilde{G}]}) \to (R[G], -, (-1)^k, \Lambda)$$

が得られ，これらは locally epic である．したがって，群 $\Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$, $\Gamma(\widetilde{\mathcal{F}})$ が定まり，さらに自然な準同型写像

$$\psi : \Gamma(\widetilde{\mathcal{F}}) \to \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$$

が誘導される．

今特別に G-枠付写像 (f, b) が（つまり $f : X \to Y$ が）k-連結であるとしてみよう．このとき $\widetilde{G} = \widehat{G}$ であり，被覆空間 $f^*\widetilde{Y}$ は $\widetilde{X}$ と同一視できる．この場合 Cappell-Shaneson の理論に単に form parameter を加味するだけで $\sigma_{\mathrm{CS}}(f, b)$ は quadratic module $(K_k(\widetilde{f}; \mathbb{Z}), \widetilde{B}, \widetilde{\mu})$ の $\Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$ における類として定義される．ここで $\widetilde{B}$, $\widetilde{\mu}$ はそれぞれ同変交差形式，同変自己交差形式である．一般に，f が k-連結でないときには，(f, b) に**特異集合**

$$\partial X \cup \bigcup_{g \neq e} X^g$$

を変えないで G-枠付同境な k-連結 G-枠付写像 (f', b') をとり，

$$\sigma_{\mathrm{CS}}(f, b) = [K_k(\widetilde{f'}; \mathbb{Z}), \widetilde{B'}, \widetilde{\mu'}] \in \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$$

と置くことで $\sigma_{\mathrm{CS}}(f, b)$ を定義する．この定義が well defined であることは，$\sigma_{\mathrm{CS}}(-, -)$ が k-連結な G-枠付写像に対して G-枠付同境不変性を持つことから従う．Cappell-Shaneson [2] の analogy により次の定理を得る．

Theorem 5.1. (f, b) を上述の (1)–(3) を満たす写像度 1 の G-枠付写像とする．このとき以下の (1)–(3) は同値な命題である．

(1) $\sigma_{\mathrm{CS}}(f, b) = 0$ *in* $\Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$.

(2) (f, b) は $f' : X' \to Y$ が *R-homology* 同値写像である G-枠付写像 (f', b') に特異集合を変えないで G-枠付同境である．

(3) (f, b) は $f' : X' \to Y$ が $(k-1)$-連結な *R-homology* 同値写像である G-枠付写像 (f', b') に特異集合を変えないで G-枠付同境である．

また，次の条件 (1)–(4) を満たす G-枠付写像 (f, b) を ***R*-suitable** という．(f, b) が R-suitable であれば，$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\widetilde{G}] \to R[G]$ 上の generalized quadratic module

$$(\pi_{k+1}(\widetilde{f}) \to K_k(f; R), \widetilde{B}, \widetilde{\mu}, B)$$

が得られる．

(1) f は 1-連結である（$f_\# : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ が全射）.
(2) $f_* : H_i(X;R) \to H_i(Y;R)$ $(0 \leqq i \leqq k-1)$ は同型写像である.
(3) $K_k(f;R)$ は $R[G]$ 上 stably に自由である.
(4) $R \otimes \pi_{k+1}(\widetilde{f}) \to K_k(f;R)$ は全射である.

各 $x \in \pi_{k+1}(\widetilde{f})$ は次のような可換図式で代表される.

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \widetilde{f} \\ D^{k+1} & \longrightarrow & \widetilde{Y} \end{array}$$

ここで，Hirsch [3] の Immersion Classification Theorem [15, Propostion in p.10] により，h は法ベクトル束が自明である immersion とする．この h を使って $\widetilde{G}$-同変交差形式 $\widetilde{B} : \pi_{k+1}(\widetilde{f}) \times \pi_{k+1}(\widetilde{f}) \to \mathbb{Z}[\widetilde{G}]$ と $\widetilde{G}$-同変自己交差形式 $\widetilde{\mu} : \pi_{k+1}(\widetilde{f}) \to \mathbb{Z}[\widetilde{G}]/\widetilde{\Lambda}$ が定まる．そこで，$\sigma(f,b) = [\pi_{k+1}(\widetilde{f}) \to K_k(f;R), \widetilde{B}, \widetilde{\mu}, B] \in \Gamma(\widetilde{\mathcal{F}})$ と定義する．Wall の手術理論（あるいは Cappell-Shaneson の手術理論）と同様に次の定理を得る.

Theorem 5.2 ([7]). もし $\sigma(f,b) = 0$ であるならば，X 上の特異集合を改変しない，$(k-1)$-, k-次元の G-手術によって，$f' : X' \to Y$ が *R-homology* 同値写像である G-枠付写像 (f', b') を得ることができる.

自然な全射 $\mathbb{Z}[\widetilde{G}] \to \mathbb{Z}[\widehat{G}]$ があるので，$\mathbb{Z}[\widehat{G}] \otimes_{\mathbb{Z}[\widetilde{G}]}$ を施すことにより，自然な準同型写像 $\Gamma(\widetilde{\mathcal{F}}) \to \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$

$$\alpha = (H \to \underline{H}, \varphi, q, \underline{\varphi}) \mapsto \alpha_{A'} = (H_{A'} \to \underline{H}, \varphi_{A'}, q_{A'}, \underline{\varphi}),$$

$A' = \mathbb{Z}[\widehat{G}]$, を得る.

Theorem 5.3 ([7]). (f,b) を上述の *R-suitable* な写像度 1 の G-枠付写像 とする． このとき

$$\sigma(f,b)_{\mathbb{Z}[\widehat{G}]} = \sigma_{\mathrm{CS}}(f,b)$$

が成り立つ.

6. 同変連結和

2 つの G-枠付写像 $\boldsymbol{f} = (f,b)$ $(f : X \to Y)$ $\boldsymbol{f}' = (f', b')$ があるとき，その G-連結和 $\boldsymbol{f} \#_G (-\boldsymbol{id}_Y \cup_\partial \boldsymbol{f}')$ を定めたい．このためには $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' = (f', b')$ がある条件を満たしていなければならない.

Context 6.1. これ以後は，$\boldsymbol{f} = (f,b)$, $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, $b : \varepsilon_X(\mathbb{R}) \oplus T(X) \oplus f^*\eta \to f^*\tau$, と $\boldsymbol{f}' = (f', b')$, $f' : (X', \partial X') \to (Y, \partial Y)$, $b' : \varepsilon_{X'}(\mathbb{R}) \oplus T(X') \oplus f'^*\eta \to f'^*\tau$, はと

もに写像度 1 の G-枠付写像で $\tau = \varepsilon_Y(\mathbb{R}) \oplus T(Y) \oplus \eta$, $\partial X' = \partial Y$, $\boldsymbol{f}'|_{\partial X'} = \boldsymbol{id}_{\partial Y}$ をみたしているものを考える．

接着多様体 $(-Y) \cup_\partial X'$ と接着 G-枠付写像

$$-\boldsymbol{id}_Y \cup_\partial \boldsymbol{f}' = (id_Y \cup_\partial f', id_\tau \cup_\partial b'), \text{ where } id_Y \cup_\partial f' : (-Y) \cup_\partial X' \to Y$$

が自然に構成される．$y_0 \in Y^G$ を Y の内部にある基点とし，V_{y_0} を y_0 の G-線形スライス近傍とする．点 x_1 は $f^{-1}(y_0)$ にあり $G \times_H V$ は Gx_1 の X における G-環状近傍で $H = G_{x_1}$，V は x_1 の H-線形スライス近傍とする．さらに $f|_V : V \to V_{y_0}$ は線形同型とする．このとき G-連結和 $X\#_{G,x_1}(G \times_H (-Y \cup_\partial X'))$ が構成できる．$f|_V : V \to V_{y_0}$ を恒等写像とみなすとき $b|_V = id_{\tau|_{V_{y_0}}}$ であれば G-連結和

$$\boldsymbol{f}\#_{G,x_1}(G \times_H (-\boldsymbol{id}_Y \cup_\partial \boldsymbol{f}')) = (f\#_{G,x_1}(G \times_H (id_Y \cup_\partial f')), b\#_{G,x_1}(G \times_H (id_\tau \cup_\partial b')))$$

(Section 3 of [6] 参照) を構成できる．

$\widehat{H} = \pi_1(EG \times_H Y)$ と置くと，標準的な準同型写像 $\widehat{\mathcal{F}}_H : \mathbb{Z}[\widehat{H}] \to R[H])$ が得られる．自然な morphism $\boldsymbol{\psi} = (\widetilde{\psi}, \psi)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\widehat{H}] & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & \mathbb{Z}[\widehat{G}] \\ {\scriptstyle \widehat{\mathcal{F}}_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathcal{F}}} \\ R[H] & \xrightarrow[\psi]{} & \mathbb{Z}[G] \end{array}$$

が準同型写像

$$\mathrm{Ind}_{(\widehat{H},H)}^{(\widehat{G},G)} : \Gamma_{(-1)^k}(\widehat{\mathcal{F}}_H) \to \Gamma_{(-1)^k}(\widehat{\mathcal{F}})$$

を定める．次の定理は Theorem 3.2 の証明において重要である．

Theorem 6.2. R は $\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}_{(p)}$ (p は素数) のいずれかを表し，$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{f}'$ は上に述べた写像度 1 の 1-連結な G-枠付写像とする．Y と ∂Y はそれぞれ D^n と S^{n-1} に R-*homology* 同値と仮定し，さらに包含写像の誘導する準同型写像 $\pi_1(\partial Y) \to \pi_1(Y)$ は同型写像であると仮定する．点 $y_0 \in Y$, 近傍 V_{y_0}, 点 $x_1 \in X$, 近傍 V は上述のものとする．このとき

$$\sigma_{\mathrm{CS}}(\boldsymbol{f}\#_{G,x_1}(G \times_H (-\boldsymbol{id}_Y \cup_\partial \boldsymbol{f}'))) = \sigma_{\mathrm{CS}}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{Ind}_{(\widehat{H},H)}^{(\widehat{G},G)} \sigma_{\mathrm{CS}}(\mathrm{Res}_H^G \boldsymbol{f}')$$

が成り立つ．

References

[1] A. Bak, *K-Theory of Forms*, Annals of Math. Study 98, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[2] S. E. Cappell and J. L. Shaneson, *The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds*, Ann. of Math. **99** (1974), 277–348.

[3] M. W. Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.

[4] M. Morimoto, *Bak groups and equivariant surgery*, K-Theory **2** (1989), 465–483.

[5] M. Morimoto, *Equivariant surgery: Deleting-inserting theorems of fixed point manifolds on spheres and disks*, K-Theory **15** (1998), 13–32.

[6] M. Morimoto, *Deleting and inseting fixed-point sets on disks under the strong gap condition*, K-theory Preprint Archives no. 707 (September, 2004).

[7] M. Morimoto, *Equivariant surgery for homology equivalences under the gap condition*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[8] M. Morimoto and K. Pawałowski, *Smooth actions of finite Oliver groups on spheres*, Topology **42** (2003), 395–421.

[9] T. Nakayama, *On modules of trivial cohomology over a finite group, II*, Nagoya Math. J. **12** (1957), 171–176.

[10] B. Oliver, *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and euclidean spaces*, Topology **35** (1996), 583–615.

[11] R. Oliver, *Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.

[12] R. Oliver and T. Petrie, *G-CW-surgery and* $K_0(\mathbb{Z}[G])$, Math. Z. **179** (1982), 11–42.

[13] K. Pawałowski, *Manifolds as fixed point sets of smooth compact Lie group actions*, in Current Trends in Transformation Groups, eds. A. Bak, M. Morimoto and F. Ushitaki, pp. 79–104, K-Monogr. Math. 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 2002.

[14] T. Petrie and J. D. Randall, *Transformation Groups on Manifolds*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[15] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, London–New York, 1970.