数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 119-123

Small Cover の連結和分解

摂南大学・工学部　　西村 保三 (Yasuzo Nishimura)
Faculty of Engineering,
Setsunan University

Small Cover は，トーリック多様体の実部分に相当する概念で，その性質は対応する凸多面体に関する組合せ論的性質と深く結びついている。筆者はこれまで Small Cover の位相的性質を組合せ論的に考察し，向き付け可能性については [6] で，同変手術については [7] で解説した。本稿では，Small Cover の連結和分解について考察する。

1　定義と基本概念

定義 1.1 群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する n 次元多様体 M が n 次元単純凸多面体 P 上の *Small Cover* であるとは，軌道空間が（角付き多様体として）P と同相で，群作用が局所的に表現であるものをいう。2 つの *Small Cover* はある自己同型 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ による θ-同変同相写像が存在するとき同型とみなす。

例 1.2 標準的な $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用のもとで，実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は単体 Δ^n 上の，トーラス T^n は立方体 I^n 上の *Small Cover* である。

単純凸多面体 P のファセット（余次元 1 の面）の集合を $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ で表す。Small Cover $M \to P$ において，ファセット $F \in \mathcal{F}(P)$ に対し，$\mathrm{Int}F$ の原像の点の固定部分群（点の取り方によらず決まる）はランク 1 で，その生成元を $\lambda(F)$ と決めて，表現写像 $\lambda : \mathcal{F}(P) \to (\mathbb{Z}_2)^n$ を定義する。表現写像は次の条件を満たし，P の高々 $2^n - 1$ 色による特殊な面彩色である。

$(*)$ $F_1 \cap \cdots \cap F_l \neq \emptyset \Longrightarrow \lambda(F_1), \cdots, \lambda(F_l)$ は一次独立

逆にこの条件を満たす写像を P 上の表現写像という。なお 2 つの表現写像 $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{F}(P) \to (\mathbb{Z}_2)^n$ は，ある自己同型 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ が存在して $\lambda_2 = \theta\lambda_1$ を満たすときに同じものとみなす。

定理 1.3 ([2]) 単純凸多面体 P 上の *Small Cover* は，P 上の表現写像で分類される。

凸多面体と表現写像の組 (P, λ) に対応する Small Cover $M(P, \lambda)$ は以下で構成できる。

$$M(P,\lambda) = P \times (\mathbb{Z}_2)^n / \sim, \quad (x,g) \sim (y,h) \Leftrightarrow x = y,\ g \equiv h \bmod \lambda(F),\ (x \in F)$$

Small Cover の向き付け可能性は次の定理で判定できる。

定理 1.4 **([6])** $(\mathbb{Z}_2)^n$ の基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対し，$\epsilon(e_i)=1$ によって準同型写像 $\epsilon:(\mathbb{Z}_2)^n \to \mathbb{Z}_2$ を定める。*Small Cover* $M(P,\lambda)$ が向き付け可能である必要十分条件は，$\epsilon\lambda \equiv 1$ となる基底が存在することである。

注意 1.5 $n = 3$ の時，*Small Cover* が向き付け可能であるのは，表現写像の像がある基底 $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subset (\mathbb{Z}_2)^3$ を固定したとき $\{\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma\}$ に属することである。これは P の高々 4 色による彩色に他ならず，四色定理より任意の 3 次元単純凸多面体の上に向き付け可能 *Small Cover* が存在することがわかる。

n 次元 Small Cover において，表現写像の像が $(\mathbb{Z}_2)^n$ の基底となるもの，すなわち表現写像が n 彩色に対応するものは，“線形モデル”とよばれる特殊なクラスを成し，比較的よく調べられている。例えば 3 次元線形モデルの手術と連結和については [4] 参照。

2　連結和

2 つの Small Cover $\pi_i : M_i \to P_i\ (i=1,2)$ からそれぞれの固定点 $v_i \in M_i$ の近傍球を取り除き，その境界同士を同変同相写像によって張り合わせることで，同変連結和 $M_1 \#^{\phi}_{v_1,v_2} M_2$ が定義される。ここで $\phi : \mathcal{F}(P_1)_{v_1} \to \mathcal{F}(P_2)_{v_2}$ は，固定点の近傍間の同変同相写像の取り方によって決まる多面体の頂点 $v_i = \pi_i(v_i) \in P_i$ を含むファセットの集合 $\mathcal{F}(P_i)_{v_i} = \{F \in \mathcal{F}(P_i) \mid v_i \in F\}$ 間の全単射である。逆に，任意の全単射 $\phi : \mathcal{F}(P_1)_{v_1} \to \mathcal{F}(P_2)_{v_2}$ に対し，必要なら多面体 P_2 を（向きを変えた）同型な多面体に取替えることで，ϕ を v_i の近傍間の同相写像に拡張して，さらに M_2 の表現写像 $\lambda_2 : \mathcal{F}(P_2) \to (\mathbb{Z}_2)^n$ を適当な基底変換によって $\lambda_2\phi = \lambda_1$ と仮定して，彩色多面体の連結和 $(P_1,\lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}(P_2,\lambda_2)$ 及び，Small Cover の連結和 $M_1\#^{\phi}_{v_1,v_2}M_2$ が定義できる。このとき明らかに

$$M(P_1,\lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}M(P_2,\lambda_2) = M((P_1,\lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}(P_2,\lambda_2))$$

が成立する。なおここで，2 つの凸多面体の連結和が（組合せ的に）凸多面体になることは，4 次元以上の多面体では自明ではないが，この事実は一般の次元において，Buchstaber-Ray [1] で証明されている。

定義 2.1 *Small Cover*（ないし単純凸多面体）が素（*prime*）とは，2 つの *Small Cover*（ないし単純凸多面体）の連結和に分かれないときをいう。

単純多面体 P は，次の条件を満たすとき旗状（flag）と呼ばれる。

(**) $F_1, \cdots, F_l \in \mathcal{F}(P)$ がどの 2 つも互いに交わるなら $F_1 \cap \cdots \cap F_l \neq \emptyset$

Davis-Januszkiewicz-Scott [3] によって，Small Cover $M \to P$ が非球面的であることと P が旗状であることの同値性が証明されている。単純凸多面体 P が旗状のとき，P は（従って P 上の任意の Small Cover も）素であるが，逆は一般には成立しない。例えば，4次元多面体 $\Delta^2 \times I^2$ は素だが旗状ではない単純凸多面体の例である。3次元向き付け可能 Small Cover は，注意 1.5 で見たように4彩色多面体と一対一に対応することから，これらの概念の同値性は容易に確かめられる。

命題 2.2 3次元向き付け可能 *Small Cover* $M \to P$ において，P が旗状（または素）であることと M が素であることは同値である。

特に P が3角形面を含む場合は，次の命題がただちに示される。

系 2.3 3次元向き付け可能 *Small Cover* $M \neq \mathbb{R}P^3$ が射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を含むならば，M はある3次元 *Small Cover* M_1 と射影空間 $\mathbb{R}P^3$ の連結和に分かれる。

一般に，向き付け可能3次元多様体 M が射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を含むとき，M はある3次元多様体 M_1 と射影空間 $\mathbb{R}P^3$ の連結和に分かれることが知られているが，系 2.3 はこの命題の同変版にあたる。その証明は組合せ論の範疇で行え，ほとんど自明である点が興味深い。なお3次元 Small Cover でも向き付け不可能な時は M が素でも P が素でない（従って旗状でない）ことがある。例えば $\mathbb{R}P^2 \times S^1$ は3角柱 $\Delta^2 \times I$ 上の Small Cover でそのような例である。

2つの Small Cover（ないし単純凸多面体）の連結和の定義から，帰納的に3つ以上の連結和も定義でき，木（閉路のない連結グラフ）を利用して次のような表示を行うことにする。

定義 2.4 $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ を木とする。V_Γ はグラフ Γ の頂点の集合，$E_\Gamma \subset V_\Gamma \times V_\Gamma$ は辺の集合を表す。単純凸多面体と表現写像の組の集まり $(P_i, \lambda_i)_{i \in V_\Gamma}$，多面体の頂点と各頂点の周りのファセット間の全単射の集まり $v_i^j \in P_i$, $\phi_i^j : \mathcal{F}(P_i)_{v_i^j} \to \mathcal{F}(P_j)_{v_j^i}$ ($\{i,j\} \in E_\Gamma$) が条件 $v_i^j \neq v_i^k$ ($j \neq k$), $\phi_i^j = (\phi_j^i)^{-1}$ を満たすとき，(表現写像付き）多面体 (P_i, λ_i)（ないし *Small Cover* $M_i = M(P_i, \lambda_i)$）の，木 Γ に沿った連結和が定義でき，それぞれ

$$\#_\Gamma(P_i; v_i^j, \phi_i^j), \quad \#_\Gamma((P_i, \lambda_i); v_i^j, \phi_i^j), \quad \#_\Gamma(M_i; v_i^j, \phi_i^j)$$

のように表示する。

定義 2.4 の well-defind 性は，次の簡単な補題を利用して，頂点数に関する帰納法（吊り頂点の論法）で証明できる。

補題 2.5 （表現写像付き）単純凸多面体 P, Q, R に対し，連結和の交換法則 $P \#_{u,v}^{\phi} Q = Q \#_{v,u}^{\phi^{-1}} P$ と結合法則 $(P \#_{u,v}^{\phi} Q) \#_{v',w}^{\psi} R = P \#_{u,v}^{\phi} (Q \#_{v',w}^{\psi} R)$ が成立する。

3　連結和分解の一意性

定理 3.1 $n \geq 3$ のとき，任意の n 次元 *Small Cover* M に対し，素な *Small Cover* M_i による連結和分解 $M = \#_\Gamma(M_i; v_i^j, \phi_i^j)$ が一意に存在する。

注意 3.2 $n = 2$ の時，分解の一意性は成立しない。例えば，$T^2\#\mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ は素な *Small Cover* による 2 通りの分解の表示である。

以下この節では定理 3.1 の証明の概略を述べる。簡単のため，表現写像を無視した次の定理を示すが，以下の議論は表現写像付きのケースに容易に拡張できる。

定理 3.3 $n \geq 3$ のとき，任意の n 次元単純凸多面体 P に対し，素な多面体 P_i による連結和分解 $P = \#_\Gamma(P_i; v_i^j, \phi_i^j)$ が一意に存在する。

3 次元向き付け可能 Small Cover の場合，命題 2.2 より定理 3.1 と 3.3 は同値である。Milner による 3 次元向き付け可能多様体の連結和分解の一意性定理 [5] はよく知られているが，定理 3.1 はこの同変版に相当している。

単純凸多面体 P の頂点と辺からなる次数 n の正則グラフを $G(P)$ で表す。Balinski の定理より，$G(P)$ は n-連結，すなわち n 個未満の任意の辺（あるいは頂点）をグラフから除いてもグラフは連結である。また単純凸多面体 P は $G(P)$ によって完全に決まることも知られており（例えば [8] 参照），多面体の議論は完全にグラフ理論の範疇で行える。

補題 3.4 $n \geq 3$ とする。n 次元単純凸多面体 R の 2 通りの連結和 $R = P_1\#^{\phi}_{v_1,v_2}P_2 = Q_1\#^{\psi}_{u_1,u_2}Q_2$ に対して，これらの分割の表示は全く同一か，またはある多面体 L が存在して $P_i = Q_{3-j}\#L$, $Q_j = P_{3-i}\#L$ $(i, j = 1$ または $2)$ のように分かれる。

略証. 連結和 $R = P_1\#^{\phi}_{v_1,v_2}P_2$ に対して，$G(R)$ から除くとグラフを非連結にする辺の集まり $\{a_1, \cdots, a_n\}$ が対応する。同様に $R = Q_1\#^{\psi}_{u_1,u_2}Q_2$ に対応する辺の集まりを $\{b_1, \cdots, b_n\}$ とする。$\{a_1, \cdots, a_n\} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ なら明らかに 2 つの分割の表示は同一である。L の存在は，$0 \leq k \leq n-1$ とし $a_i = b_i$ $(i = 1, \cdots, k)$, $\{a_{k+1}, \cdots, a_n\} \cap \{b_{k+1}, \cdots, b_n\} = \emptyset$ のときに，$\{b_{k+1}, \cdots, b_n\}$ が全て $G(P_1)$ か $G(P_2)$ の一方に含まれることを示せばよい。$k = n-1$ の時は自明（実はあり得ない）。$k \leq n-2$ で $\{b_{k+1}, \cdots, b_n\}$ が $G(P_1)$ と $G(P_2)$ に分かれると仮定すると，$G(P_1), G(P_2)$ の n-連結性から，$G(R) \setminus \{b_1, \cdots, b_n\}$ が連結となり矛盾する。

次の補題は，3 次元向き付け可能多様体の連結和分解定理 [5] を示す基本的な補題のアナロジーだが，補題 3.4 を使って証明できる。

補題 3.5 $Q_1 \# Q_2 = \#_\Gamma P_i$（$P_i$ は素）とすると，木の頂点での連結和分解 $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ が存在して $Q_1 = \#_{\Gamma_1} P_i$, $Q_2 = \#_{\Gamma_2} P_i$ である。

定理3.3の略証. 連結和分解の存在性は，多面体の頂点数に関する帰納法より明らかなので，一意性を示す。$R = \#_\Gamma(P_i; v_i^j, \phi_i^j) = \#_{\Gamma'}(Q_i; u_i^j, \psi_i^j)$ を2通りの素な多面体による連結和分解とする。Γ の吊り頂点（次数1の頂点）t を固定し，$\Gamma = (\Gamma \setminus t)\#_{s,t} t$ とすると，$R = (\#_{\Gamma\setminus t} P_i)\#^{\phi_s^t}_{v_s^t, v_t^s} P_t = \#_{\Gamma'} Q_i$ と表せるが，補題3.5と P_t が素であることから Γ' の吊り頂点 t' が存在して，$\#_{\Gamma\setminus t} P_i = \#_{\Gamma' \setminus t'} Q_i$, $P_t = Q_{t'}$ が成立する。頂点数に関する帰納法から，$\Gamma \setminus t$ に沿った2つの連結和分解は同じとしてよく，R の2通りの分解は $R = (\#_{\Gamma\setminus t} P_i)\#^{\phi_s^t}_{v_s^t, v_s^t} P_t = (\#_{\Gamma\setminus t} P_i)\#^{\psi_{s'}^{t'}}_{u_{s'}^{t'}, u_{t'}^{s'}} P_t$ と表せる。補題3.4よりこれらの分解は全く同じか，$R = P_{t'}\#^{\psi_{t'}^{s'}}_{u_{t'}^{s'}, u_{s'}^{t'}} L \#^{\phi_s^t}_{v_s^t, v_t^s} P_t$ と表せる。ここで t' は $\Gamma \setminus t$ の吊り頂点で，$L = \#_{\Gamma\setminus\{t,t'\}} P_i$ である。帰納法より L の分解の表示はただ1通りであるから，結局 R の2つの分解の表示は全く同じである。

参考文献

[1] V. M. Buchstaber and N. Ray, *Tangential structures on toric manifolds and connected sums of polytopes*, UMIST. Manchester **5**, 2000.

[2] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Covex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.

[3] M. Davis, T. Januszkiewicz and R. Scott, *Nonpositive curvature of blow-ups*, Sel. Math., new ser. **4** (1998), 491-547.

[4] I. V. Izmestiev, *Three-dimensional manifolds defined by coloring a simple polytope*, Math. Notes **69** (2001), 340-346.

[5] J. Milner, *A unique factorization theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 1-7.

[6] H. Nakayama and Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes*, Osaka J. Math. **42** (2005), 243-256.

[7] 西村保三, Small Cover の同変手術, 数理解析研究所講究録 1393, 変換群論と surgery, 2004年9月, 44-47.

[8] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Math., Springer, 1995/98.