数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 140-150

Pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves

田所 勇樹
(東京大学大学院数理科学研究科)
Yuuki Tadokoro
(Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

概要

M. Pulte は，B. Harris の定めた調和体積を用いて，点付き Riemann 面に対する点付き調和体積を定義した．超楕円曲線に対する Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積 I_ν を完全に決定し，その組み合わせ公式を導出した．

目次

1 Introduction

B. Harris [3] は Chen の反復積分 [2] を用いて，コンパクト Riemann 面 X の調和体積を定義した．その応用例は X の Jacobian 上の代数的サイクル $X - X^-$ が非自明である十分条件を導くものがある．これについては，[4], [6] を参照せよ．一般的に調和体積を計算することは容易ではない．[5] において，超楕円曲線の調和体積は決定された．M. Pulte [8] は点付き Riemann 面の点付き調和体積について深く研究した．今回は，超楕円曲線の Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積 I_ν を計算することが目標である．

2 The pointed harmonic volume

X を種数 $g(\geqq 2)$ のコンパクト Riemann 面とする．X 上の 1 形式に対する，X 上の道に沿った Chen [2] の反復積分の定義を復習しよう．ω_1, ω_2 を X 上の 1 形式とし，$\gamma : [0,1] \to X$ を X 上の道とする．このとき，ω_1, ω_2 の γ での (長さ 2 の) 反復積分は

$$\int_\gamma \omega_1\omega_2 = \int_{0\leq t_1 \leq t_2 \leq 1} f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

と定義される．ただし，f_1, f_2 は，t を閉区間 $[0,1]$ の座標としたとき，$\gamma^*(\omega_i) = f_i(t)dt$ を満たす．端点を固定した際，**反復積分は一般的にホモトピー不変ではない**．ホモトピー不変にするために補正項を付け加える．

Lemma 2.1 $\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, i = 1, 2, \ldots, m,$ を X 上の閉 1 形式とし，$\gamma : [0,1] \to X$ を X 上の道とする．$\int_X \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ を仮定すれば，$d\eta = \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たすような X 上の 1 形式 η がとれる．
このとき，

$$\sum_{i=1}^m \int_\gamma \omega_{1,i}\omega_{2,i} - \int_\gamma \eta$$

は端点を固定してホモトピー不変になる．

Lemma 2.1 を用いて，点付き調和体積 [8] を定義しよう．X の 1 次元コホモロジー群 $H^1(X;\mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_1(X;\mathbb{Z})$ を Poincaré 双対により同一視し，H と表す．Hodge $*$ 作用素 (ここでは，**複素構造にのみ依存し計量には依存しない**) によりこの H は "X 上の $\mathbb{Z}$ に周期を持つ，実調和 1 形式全体からなる加群" とも同一視できる (Hodge の定理)．$(\ ,\ ) : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ を交叉形式とし，$K = \ker(\ ,\ )$ とおく．p を X 上の点とする．**点付き調和体積** I_p は点付き Riemann 面 (X, p) に対し，反復積分を用いて以下のように定義される $K \otimes H$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への準同型である．

Definition 2.2

$$I_p\left(\left(\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i\right) \otimes c\right) = \sum_{i=1}^m \int_\gamma a_i b_i - \int_\gamma \eta \mod \mathbb{Z}.$$

ここで γ は，$H_1(X;\mathbb{Z}) \ni [\gamma] = $ (コホモロジー類 c の Poincaré 双対)，となる p を基点とするループである．$\sum_{i=1}^m (a_i, b_i) = 0$ であることから，以下を満たす X 上の 1-形式 η の存在とその一意性が言える．$d\eta = \sum_{i=1}^m a_i \wedge b_i$ かつ，任意の X 上の閉 1-形式 α に対して，$\int_X \eta \wedge *\alpha = 0$, を満たす．$I_p$ は γ のとり方に依存しない．

Remark 2.3 Pulte [8] は，点付き調和体積 I_p を用いて，$\mathbb{Z}\pi_1(X,p)/J^3$ が mixed Hodge structure として同型なら点付き Riemann 面 (X,p) が同型になる，と言う**点付き Torelli の定理**を示した．ただし，p は基点であり，J は群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X,p)$ の添加イデアルである．

$\{x_i,y_i\}_{i=1,\dots,g}$ を H のシンプレクティック基底，つまり $(x_i,y_j)=\delta_{ij}=-(y_j,x_i),(x_i,x_j)=(y_i,y_j)=0$ を満たす H の基底，とする．$z_i=x_i$ or y_i, などとおくと K の基底の一つは以下のように表される

$$\left\{\begin{array}{lcc}(1) & z_i\otimes z'_j & (i\neq j)\\ (2) & x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1 & (i\neq 1)\\ (3) & x_i\otimes y_i + y_i\otimes x_i & (i=1,2,\dots,g)\\ (4) & z_i\otimes z_i & (i=1,2,\dots,g)\end{array}\right\}.$$

$(H^{\otimes 3})'$ を次の自然な準同型の kernel とする

$$H\otimes H\otimes H\ni\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_3\mapsto((\omega_1,\omega_2)\omega_3,(\omega_2,\omega_3)\omega_1),(\omega_3,\omega_1)\omega_2)\in H\oplus H\oplus H.$$

$(H^{\otimes 3})'\subset K\otimes H$ であり，I_p の定義域を $(H^{\otimes 3})'$ に制限すると基点に依存しないことが示せて，それを調和体積と呼ぶ ([3])．超楕円曲線の調和体積は [5] により調べられている．よって目標は，$K\otimes H$ の基底において $(H^{\otimes 3})'$ の元でないもの，つまり以下の元だけを調べることである

$$\begin{array}{lll}(1a) & z_i\otimes z'_j\otimes z''_i & (i\neq j, z_i\neq z''_i),\\ (1b) & z_i\otimes z'_j\otimes z''_i & (i\neq j, z'_j\neq z''_j),\\ (2a) & (x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes z''_i & (i\neq 1),\\ (2b) & (x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes z''_1 & (i\neq 1),\\ (3) & (x_i\otimes y_i + y_i\otimes x_i)\otimes z''_i, & \\ (4) & x_i\otimes x_i\otimes y_i,\ y_i\otimes y_i\otimes x_i. & \end{array}$$

3 Hyperelliptic curves

$\mathbb{C}$ 上の相異なる点 p_i, $i=0,1,\dots,2g+1$ をとる．**超楕円曲線** C は次式で表される代数曲線のコンパクト化で定義する．

$$\left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2; w^2=\prod_{i=0}^{2g+1}(z-p_i)\right\}.$$

正則射影を

$$\pi\colon C\ni(z,w)\mapsto z\in\mathbb{C}P^1$$

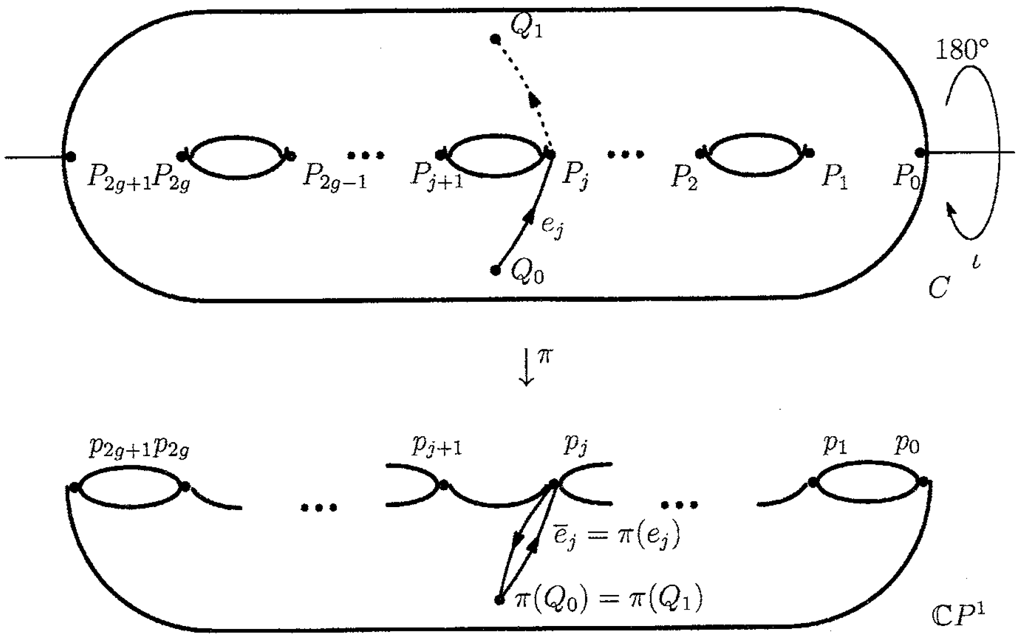

図 1: $\pi\colon C \to \mathbb{C}P^1$

と定めると，π は $\{p_i\}_{i=0,1,\ldots,2g+1}$ を分岐点とする 2 重分岐被覆となる．C 上の分岐点を P_i ($\pi(P_i) = p_i$ を満たす) とおく．また，超楕円対合として，C 上の正則同型

$$\iota\colon C \ni (z,w) \mapsto (z,-w) \in C$$

がとれる．超楕円曲線では，すべての分岐点 P_i は **Weierstrass 点**になり，分岐点以外に Weierstrass 点がないことが知られている．さらに，超楕円対合 ι は，H にマイナス倍で作用し，I_{P_i} を保つので，$I_{P_i} = (-1)^3 I_{P_i} \bmod \mathbb{Z}$ から，$I_{P_i} = 0 \text{ or } 1/2 \bmod \mathbb{Z}$ がわかる．

C 上の 1 次元ホモロジー群 $H_1(C;\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を求める．図 1 のように，$Q_0, Q_1 = (\iota(Q_0))$ をとり，C 上の道 e_j を，自己交差を持たない道で Q_0, P_j, Q_1 と順に結ぶものと定める．$e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は C 上の Q_0 を基点とするループであることがわかる．ただし，$e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は，e_{j_1} を先に通り，その後 $\iota(e_{j_2})$ を通る道を表すものとする．基点 Q_0 を固定したホモトピー同値関係

$$e_j \cdot \iota(e_j) \sim 1, \quad j = 0,1,\ldots,2g+1,$$

と

$$e_0 \cdot \iota(e_1) \cdot \cdots \cdot e_{2g} \cdot \iota(e_{2g+1}) \sim 1.$$

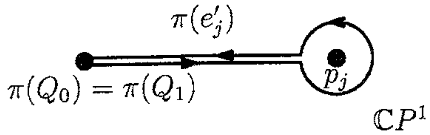

図 2: $\pi(e'_j)$

を得る．Q_0 を基点とする C 上のループ $a_i, b_i, i = 1, 2, \ldots, g$ を

$$a_i = e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i}),$$
$$b_i = e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i-2}) \cdot \cdots \cdot e_1 \cdot \iota(e_0).$$

と定める．a_i, b_i の定めるホモロジー類をそれぞれ $x_i, y_i \in H_1(C;\mathbb{Z})$ とおく．

Lemma 3.1 $\{x_i, y_i\}_{i=1,2,\ldots,g}$ は，$H_1(C;\mathbb{Z})$ のシンプクレクティック基底である．

$H_{\mathbb{Z}_2} := H_1(C;\mathbb{Z}_2)$ について考察する．B を $\{p_i\}_{i=0,1,\ldots,2g+1}$ とおく．C 上の道 e_j を P_j の近傍のみを変形し，以下の条件を満たす道 e'_j を定める．$\pi(e'_j)$ が図 2 のようになり，かつ $\{\pi(e'_j)\}_{j=0,1,\ldots,2g}$ が $H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2)$ の基底になる．また，$\sum_{j=0}^{2g+1} \pi(e'_j) = 0$ が成り立つ．$\mathbb{Z}_2$-係数で考えているため，$e'_j \in H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2)$ はその選び方に依存しない．

線形写像 $v\colon H_{\mathbb{Z}_2} \to H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2)$ を $v(x_i \bmod 2) = \pi(e'_{2i-1}) + \pi(e'_{2i})$, $v(y_i \bmod 2) = \pi(e'_0) + \pi(e'_1) + \cdots + \pi(e'_{2i-1})$ と定めるとこれは単射になる．以下の完全列を得る

$$0 \longrightarrow H_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{v} H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

$\varepsilon\colon H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ は添加写像 $\varepsilon(\pi(e'_i)) = 1$ である．Weierstrass 点 P_ν を固定する．$f_i = \pi(e'_\nu) + \pi(e'_i), i = 0, 1, \ldots, 2g+1$ とする．$f_\nu = 0 \in H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B;\mathbb{Z}_2)$ に注意．

$$\begin{cases} x_i = f_{2i-1} + f_{2i}, \\ y_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_{2i-1}. \end{cases} \tag{1}$$

と言う $H_{\mathbb{Z}_2}$ における同一視がある．さらに，$f_0 + f_1 + \cdots + f_{2g+1} = 0$ が成立することがわかる．

4 Pointed harmonic volumes for (C_0, P_ν)

超楕円曲線 C_0 は次式で表される代数曲線のコンパクト化で定義する．

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = z^{2g+2} - 1\}.$$

C_0 上の2点，$Q_0 = (0, \sqrt{-1}), Q_1 = (0, -\sqrt{-1})(= \iota(Q_0))$ をとる．$\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/(2g+2))$ とし，C_0 上の道 $e_j : [0,1] \to C_0, j = 0, 1, \ldots, 2g+1$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} (2t\zeta^j, \sqrt{-1}\sqrt{1-(2t)^{2g+2}}) & \text{for } \ 0 \leq t \leq 1/2, \\ ((2-2t)\zeta^j, -\sqrt{-1}\sqrt{1-(2-2t)^{2g+2}}) & \text{for } \ 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

C_0 上の1形式を $\omega_i = z^{i-1}dz/w, i = 1, 2, \ldots, g$ と定める．ω_i は，C_0 上で正則であり，$\{\omega_i\}_{i=1,2,\ldots,g}$ は C_0 上の正則1-形式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間の基底になる．$B(u,v)$ をベータ関数 $\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx \ (u, v > 0)$ とする．ω_i' を，正則1-形式

$$\frac{(2g+2)\sqrt{-1}}{2B(i/(2g+2), 1/2)}\omega_i$$

と定める．Ω_a, Ω_b を，(i,j)-成分がそれぞれ以下のようになる行列とする

$$\int_{a_j} \omega_i' \quad \text{and} \quad \int_{b_j} \omega_i'.$$

C_0 上の実調和1-形式 $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \ldots, g$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = \Re\left((\Omega_b)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \vdots \\ \omega_g' \end{pmatrix} \right) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_g \end{pmatrix} = -\Re\left((\Omega_a)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \vdots \\ \omega_g' \end{pmatrix} \right)$$

と定める．このとき，Poincaré 双対によって，$\alpha_i \leftrightarrow x_i$, $\beta_i \leftrightarrow y_i$ と同一視ができることがわかる．

整数 u に対して，$t_u = \sum_{p=1}^{g} \zeta^{up}$ と定める．

$$t_u = \begin{cases} g & \text{for } \ u \in (2g+2)\mathbb{Z}, \\ -1 & \text{for } \ u \notin (2g+2)\mathbb{Z} \text{ and } u : \text{even}, \\ \dfrac{1+\zeta^u}{1-\zeta^u} & \text{for } \ u : \text{odd}. \end{cases}$$

が直ちに得られる．[5] の Lemma 3.8 と同じようにして反復積分が計算できる．

Lemma 4.1

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \int_{a_k} \beta_i\beta_j &&= \frac{1}{2(g+1)^2}\left\{(t_{2k-2j}-t_{2k})\sum_{u=1}^{i} t_{2k-2u} + (t_{2k}-t_{2k-2i})\sum_{u=1}^{j} t_{2k-2u+2}\right\},\\
&(2)\quad \int_{b_k} \beta_i\beta_j &&= 0,\\
&(3)\quad \int_{a_k} \alpha_i\alpha_j &&= 0,\\
&(4)\quad \int_{b_k} \alpha_i\alpha_j &&= \frac{1}{2(g+1)^2}\left\{\sum_{u=1}^{k}(t_{2u-2j}t_{2u-2i} - 2t_{2u-2j-2}t_{2u-2i} + t_{2u-2j-2}t_{2u-2i-2})\right.\\
&&&\qquad\left. + \sum_{v=2}^{k} 2(t_{2v-2i}-t_{2v-2i-2})(t_{2v-2j-2}-t_{(-2j)})\right\},\\
&(5)\quad \int_{a_k} \alpha_i\beta_j &&= \frac{-1}{2(g+1)^2} t_{2k-2i}(t_{2k-2j}-t_{2k}),\\
&(6)\quad \int_{b_k} \alpha_i\beta_j &&= \frac{-1}{2(g+1)^2}\sum_{u=1}^{k}\left\{(t_{2u-2i-2}-t_{2u-2i})\sum_{v=1}^{j} t_{2v+2u-2j-2}\right\}.
\end{aligned}
$$

この補題と $\int_{e_j} \eta = 0$ を用いて，Q_0 を基点とする点付き調和体積 I_{Q_0} が計算できる．

Proposition 4.2

(1)	$I_{Q_0}(x_i \otimes x_j \otimes y_i)$	$=$	μ	$i \neq j$
	$I_{Q_0}(x_i \otimes y_j \otimes y_i)$	$=$	$(g-j+1)\mu$	$i < j$
			$(2g-j+2)\mu$	$i > j$
	$I_{Q_0}(y_i \otimes x_j \otimes x_i)$	$=$	$(2g+1)\mu$	$i \neq j$
	$I_{Q_0}(y_i \otimes y_j \otimes x_i)$	$=$	$(g+j+1)\mu$	$i < j$
			$j\mu$	$i > j$
(2)	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_i)$	$=$	$(g+2)\mu$	$i \neq 1$
	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_i)$	$=$	$(2g-i+2)\mu$	$i \neq 1$
	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_1)$	$=$	$g\mu$	$i \neq 1$
	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_1)$	$=$	$(g+2)\mu$	$i \neq 1$
(3)	$I_{Q_0}((x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z_i'')$	$=$	0	
(4)	$I_{Q_0}(x_i \otimes x_i \otimes y_i)$	$=$	$1/2$	
	$I_{Q_0}(y_i \otimes y_i \otimes x_i)$	$=$	$1/2$	

ただし，数値は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に値をとり，$\mu = 1/2(g+1)$ である．

$h_1\otimes h_2\otimes h_3 \in K\otimes H$ に対して, $\Lambda_\nu(h_1\otimes h_2\otimes h_3) = I_\nu(h_1\otimes h_2\otimes h_3) - I_{Q_0}(h_1\otimes h_2\otimes h_3) \bmod \mathbb{Z}$ と定める. C_0 上の道 ℓ_ν: $[0,1]\to C_0$ を $t\mapsto (t\zeta^\nu, \sqrt{-1}\sqrt{1-t^{2g+2}})\in C_0$ とする. 反復積分の性質から以下が得られる.

Lemma 4.3

$$\Lambda_\nu(h_1\otimes h_2\otimes h_3) = (h_1,h_3)\int_{\ell_\nu} h_2 - (h_2,h_3)\int_{\ell_\nu} h_1 \mod \mathbb{Z}.$$

これを用いて点付き調和体積 I_ν と I_{Q_0} の差 (modulo $\mathbb{Z}$) がわかる.

Lemma 4.4

(1)	$\Lambda_\nu(x_i\otimes x_j\otimes y_i)$	$=$	$g\mu$	$i\neq j$	$\nu=2j-1$ or $2j$
			$(2g+1)\mu$	$i\neq j$	$\nu\neq 2j-1$ and $2j$
	$\Lambda_\nu(x_i\otimes y_j\otimes y_i)$	$=$	$j\mu$	$i\neq j$	$\nu>2j-1$
			$(g+j+1)\mu$	$i\neq j$	$\nu\leqq 2j-1$
	$\Lambda_\nu(y_i\otimes x_j\otimes x_i)$	$=$	$(g+2)\mu$	$i\neq j$	$\nu=2j-1$ or $2j$
			μ	$i\neq j$	$\nu\neq 2j-1$ and $2j$
	$\Lambda_\nu(y_i\otimes y_j\otimes x_i)$	$=$	$(2g-j+2)\mu$	$i\neq j$	$\nu>2j-1$
			$(g-j+1)\mu$	$i\neq j$	$\nu\leqq 2j-1$
(2)	$\Lambda_\nu((x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes x_i)$	$=$	$g\mu$	$i\neq 1$	$\nu=2i-1$ or $2i$
			$(2g+1)\mu$	$i\neq 1$	$\nu\neq 2i-1$ and $2i$
	$\Lambda_\nu((x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes y_i)$	$=$	$i\mu$	$i\neq 1$	$\nu>2i-1$
			$(g+i+1)\mu$	$i\neq 1$	$\nu\leqq 2i-1$
	$\Lambda_\nu((x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes x_1)$	$=$	$(g+2)\mu$	$i\neq 1$	$\nu=1$ or 2
			μ	$i\neq 1$	$\nu\neq 1$ and 2
	$\Lambda_\nu((x_i\otimes y_i - x_1\otimes y_1)\otimes y_1)$	$=$	$(2g+1)\mu$	$i\neq 1$	$\nu>1$
			$g\mu$	$i\neq 1$	$\nu\leqq 1$
(3)	$\Lambda_\nu((x_i\otimes y_i + y_i\otimes x_i)\otimes z_i'')$	$=$	0		
(4)	$\Lambda_\nu(x_i\otimes x_i\otimes y_i)$	$=$	0		
	$\Lambda_\nu(y_i\otimes y_i\otimes x_i)$	$=$	0		

ただし, 数値は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に値をとる.

Proposition 4.2 と Lemma 4.4 を組み合わせると C_0 の点付き調和体積 I_{P_ν} が得られる.

Proposition 4.5

(1)	$I_{P_\nu}(x_i \otimes x_j \otimes y_i) =$	$1/2$	$i \neq j$	$\nu = 2j-1$ or $2j$
		0	$i \neq j$	$\nu \neq 2j-1$ and $2j$
	$I_{P_\nu}(x_i \otimes y_j \otimes y_i) =$	$1/2$	$i < j$	$\nu > 2j-1$
		0	$i < j$	$\nu \leqq 2j-1$
		0	$i > j$	$\nu > 2j-1$
		$1/2$	$i > j$	$\nu \leqq 2j-1$
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes x_j \otimes x_i) =$	$1/2$	$i \neq j$	$\nu = 2j-1$ or $2j$
		0	$i \neq j$	$\nu \neq 2j-1$ and $2j$
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes y_j \otimes x_i) =$	$1/2$	$i < j$	$\nu > 2j-1$
		0	$i < j$	$\nu \leqq 2j-1$
		0	$i > j$	$\nu > 2j-1$
		$1/2$	$i > j$	$\nu \leqq 2j-1$
(2)	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_i) =$	0	$i \neq 1$	$\nu = 2i-1$ or $2i$
		$1/2$	$i \neq 1$	$\nu \neq 2i-1$ and $2i$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_i) =$	0	$i \neq 1$	$\nu > 2i-1$
		$1/2$	$i \neq 1$	$\nu \leqq 2i-1$
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes x_1) =$	0	$i \neq 1$	$\nu = 1$ or 2
		$1/2$	$i \neq 1$	$\nu \neq 1$ and 2
	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i - x_1 \otimes y_1) \otimes y_1) =$	$1/2$	$i \neq 1$	$\nu > 1$
		0	$i \neq 1$	$\nu \leqq 1$
(3)	$I_{P_\nu}((x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i) \otimes z_i'') =$	0		
(4)	$I_{P_\nu}(x_i \otimes x_i \otimes y_i) =$	$1/2$		
	$I_{P_\nu}(y_i \otimes y_i \otimes x_i) =$	$1/2$		

Remark 4.6 この結果を一般の超楕円曲線の場合に拡張することができる.

次節では，反復積分を用いないで，一般の超楕円曲線の Weierstrass 点を基点とする調和体積を求める.

5 A combinatrorial formula of I_ν

$I_\nu = I_{P_\nu}$ を求めることができる**組み合わせ公式**を導出する. Γ_g を種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群，つまり向きを保つ微分同相写像の イソトピー類全体のなす群，と

する．超楕円的写像類群 Δ_g を Γ_g の ι による中心化群 $\Delta_g = \{\varphi \in \Gamma_g; \varphi\iota = \iota\varphi\}$，とする．ただし，$\iota$ は超楕円対合である．固定した ν に対して，

$$\Delta_{g,\nu} = \{\varphi \in \Delta_g; \varphi(P_\nu) = P_\nu\} \subset \Delta_g$$

と定める．S_{2g+1} を $(2g+1)$ 次対称群をする．自然な射影 $\Delta_{g,\nu} \to S_{2g+1}$ を用いて，$\mathbb{Z}_2\Delta_{g,\nu}$-加群 $H_{\mathbb{Z}_2}$ は $\mathbb{Z}_2 S_{2g+1}$-加群とみなすことができる (Arnol'd [1])．[5], [7] により，以下を得る．

Proposition 5.1

$$I_\nu \in \mathrm{Hom}_{\Delta_{g,\nu}}(K \otimes H, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}_{S_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

さらに，$\mathrm{Hom}_{S_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2)$ の非自明な元 ψ は，

$$\psi(f_i \otimes f_j \otimes f_k) = \begin{cases} 1 & for\ \sharp\{i,j,k\} = 2, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

を満たす S_{2g+1}-準同型 $(H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3} \to \mathbb{Z}_2$ である．

これを利用して，組み合わせ公式を作る．$K \otimes H$ の任意の元 A に対して，同一視 (1) を用いて，$A = \sum_{p,q,r\neq\nu} A_{p,q,r} f_p \otimes f_q \otimes f_r$ と表すことにする．ただし，$A_{p,q,r} \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ である．数え上げ関数 κ: $K \otimes H \to \mathbb{Z}_2$ を

$$\kappa(A) = \sharp\{(p,q,r); A_{p,q,r} = 1, \sharp\{p,q,r\} = 2\} \bmod 2$$

と定める．このとき，以下が成立する．

Theorem 5.2 (組み合わせ公式)

$$I_\nu(A) = \begin{cases} 1/2 \mod \mathbb{Z} & \text{if} \quad \kappa(A) = 1, \\ 0 \mod \mathbb{Z} & \text{if} \quad \kappa(A) = 0. \end{cases}$$

参考文献

[1] Arnol'd, V. I.: *A remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters.* Funkcional. Anal. i Priložen. 2 1968 no. 3, 1–3.

[2] Chen, Kuo Tsai: *Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 83–98.

[3] Harris, Bruno: *Harmonic volumes.* Acta Math. 150 (1983), no. 1-2, 91–123.

[4] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), no. 4 i., 1157–1158.

[5] Tadokoro, Yuuki: *The Harmonic Volumes of Hyperelliptic Curves*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[6] Tadokoro, Yuuki: *A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic*, Preprint.

[7] Tadokoro, Yuuki: *The pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves with Weierstrass base points*, Preprint.

[8] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles.* Duke Math. J. 57 (1988), no. 3, 721–760.