数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 151-158

同変コホモロジーの小 Cartan モデルについて (On the small Cartan model of equivariant cohomology)

大阪大学大学院 理学研究科　山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

G をコンパクトで連結な Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\Omega(M)$ を M の微分形式全体とするとき, Cartan 複体とよばれる $((S\mathfrak{g}^*\otimes\Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ は同変コホモロジーを与える. Alekseev-Meinrenken は最近のプレプリント [1] において, より "小さい" $((S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes(\Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}})$ が同変コホモロジーを与えることを示し, これを小 Cartan 複体とよんだ. ここで $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ は小 Cartan 複体の普通の積に関して derivation にはならない. そのため Alekseev-Meinrenken は新しい積 $\odot$ を導入し, この積に関して $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ が derivation になることを示した. ただし $\odot$ は結合的ではない. 本稿では $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}, \odot$ に高次の積を加えて, 小 Cartan 複体上に A_∞-構造を与える.

2 $\mathfrak{g}$-微分空間とその同変コホモロジー

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-微分空間とは次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ とその微分 $\mathrm{d}^{\mathcal{M}}$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}},\ \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi\in\mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, -1,
- $[\mathrm{d}^{\mathcal{M}},\iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi),\iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi,\xi']_{\mathfrak{g}})$,

– $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$. □

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき

$$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$$

とおく.

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_a\}$, その双対基底を $\{e^a\}$ とする. そして以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1\mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1\mathfrak{g}^*$$

と書くことにする.

例 2.3. (a) G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. このとき M 上の微分形式全体 $\Omega(M)$ は G の作用の infinitesimal generator の Lie 微分, contraction を考えることにより $\mathfrak{g}$-微分空間になる.

(b) $\wedge\mathfrak{g}^*$ において, $\iota^{\wedge}(\xi)$ を contraction, $L^{\wedge}(\xi)$ を余随伴表現, そして微分を

$$\mathrm{d}^{\wedge} := \frac{1}{2}\sum_a y^a L^{\wedge}(e_a)$$

とすれば, $\wedge\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$-微分空間となる. □

$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴表現を $S\mathfrak{g}^*$ の derivation として拡張したものを $L^S(\xi)$ として,

$$(S\mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{M})_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker(L^S(\xi)\otimes 1 + 1\otimes L^{\mathcal{M}}(\xi))$$

とする.

定義 2.4. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする.

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{M})_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} := 1\otimes\mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a\otimes\iota^{\mathcal{M}}(e_a)$$

を Cartam 複体とよび, そのコホモロジー $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ を $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの Cartan モデルとよぶ. □

注意 2.5. G をコンパクトで連結な Lie 群, M を G が作用する多様体とする. このとき G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$, M 上の微分形式全体を $\Omega(M)$ とすると, $H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ はいわゆる同変コホモロジーと同型になる. つまり $EG\times_G M$ をホモトピー商とすると

$$H(EG\times_G M;\mathbb{R}) \cong H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$$

が成り立つ (例えば [3] を参照). □

3 小Cartan複体

以下 $\mathfrak{g}$ は reductive Lie 代数とする.

まず $\wedge\mathfrak{g}$ の次数を

$$(\wedge\mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i\mathfrak{g}, \quad (\wedge\mathfrak{g})^i := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定める. また

$$\langle \mathrm{d}^\wedge X, Y\rangle = \langle X, \partial Y\rangle, \quad X \in \wedge\mathfrak{g}^*, \ Y \in \wedge\mathfrak{g}$$

により $\partial : \wedge\mathfrak{g} \to \wedge\mathfrak{g}$ を定める. そして ($\wedge\mathfrak{g}$ ではなく) $(\wedge\mathfrak{g})[1]$ において Schouten 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を考えることにより, $((\wedge\mathfrak{g})[1], \partial, [\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}})$ は次数付き微分 Lie 代数になる. ただし $(\wedge\mathfrak{g})[1]^i := (\wedge\mathfrak{g})^{i+1}$ とする.

$(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間には非退化な pairing が存在するので, $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}, (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の積はそれぞれ $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, (\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積を導く. ただし $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ は $\mathfrak{g}$ の随伴表現の不変部分空間とする. このとき $x \in (\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ が primitive であるとは, Δ を $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積とすると

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

をみたすこととする. $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の場合も同様にして, $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}, (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元全体からなる次数付き部分空間をそれぞれ $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ とする. 実は $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ の間にも非退化な pairing が存在し, $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間となる. $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

また $S\mathfrak{g}^*$ の次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i\mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定め, $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} := \cap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker L^S(\xi)$ とおく. "Chevalley's transgression theorem" により c^j に対応する元を $p^j \in (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と書くことにする (詳しくは [1] 参照).

そして $\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型写像として

$$\iota : \wedge\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

と自然に拡張する.

定義 3.1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする.

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j)$$

を小 Cartam 複体とよび, そのコホモロジー $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}})$ を $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの小 Cartan モデルとよぶ. □

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であると主張したが，その証明にはギャップがあることがわかっている．

これを示すためには $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ の間にコチェイン写像であり，コホモロジーの同型を導くものを構成すればよいのだが，自然な包含写像 $i:\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を考えると

$$\begin{tikzcd}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{d}_{\mathfrak{g}}"'] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[d, "d_{\mathfrak{g}}"] \\
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "i"'] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{tikzcd}$$

は可換にならない．

$f=f_1\otimes f_2\in(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して

$$\iota(f)(p\otimes y):=f_1p\otimes\iota^{\wedge}(f_2)y$$

と定めることにより $\iota(f):C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\to C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ をえる．これを用いて，ある $f\in(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ により $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上で“ひねって”

$$\begin{tikzcd}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{d}_{\mathfrak{g}}"'] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "e^{\iota(f)}"] \arrow[d, "e^{-\iota(f)}\circ d_{\mathfrak{g}}\circ e^{\iota(f)}"] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[d, "d_{\mathfrak{g}}"] \\
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "i"'] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "e^{\iota(f)}"'] & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{tikzcd}$$

が可換になるようにしたい．

ここで $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上では，$|f|$ が偶数ならば，

$$e^{-\iota(f)}\circ d_{\mathfrak{g}}\circ e^{\iota(f)}=1\otimes d^{\mathcal{M}}-\iota(\partial f+\frac{1}{2}[f,f]_{\wedge\mathfrak{g}}+\sum_a v^a\otimes e_a)$$

となるので，結局

$$\partial f+\frac{1}{2}[f,f]_{\wedge\mathfrak{g}}+\sum_a v^a\otimes e_a=\sum_j p^j\otimes c_j \tag{1}$$

をみたす $f\in(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在すればよいことがわかる．ただし $\wedge\mathfrak{g}$ の ∂, $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を

$$\partial(p\otimes y):=p\otimes\partial y,\quad [p\otimes y,p'\otimes y']_{\wedge\mathfrak{g}}:=pp'\otimes[y,y']_{\wedge\mathfrak{g}}$$

として $(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ 上に拡張した．

以上のことにより，Alekseev-Meinrenken は [1] において次のことを示した．

定理 3.2 **([1,Theorem 3.8]).** $(\mathfrak{k},\partial)$ を次数付き微分 Lie 代数であり，$i\ll 0$ または $i>0$ ならば $\mathfrak{k}^i=0$ であるものとする．$\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{z}$ の部分空間 $\mathfrak{l}$ であり，次をみたすものが存在すると仮定する：

– 任意の $X \in \mathfrak{l}$ に対して $\partial X = 0$,

– 包含写像 $\mathfrak{l} \hookrightarrow \mathfrak{k}$ が擬同型.

このとき,

(a) 任意の $X \in \mathfrak{z}_{\mathrm{even}}$ に対して $\partial X = 0$ ならば, 方程式

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\mathfrak{k}} = X \mod \mathfrak{l}$$

をみたす解 $f \in \mathfrak{k}^{-}_{\mathrm{odd}}$ が存在する.

(b)

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\mathfrak{k}} - X \in \mathfrak{l}$$

は f によらない. □

この定理より

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{k}^i, \quad \mathfrak{k}^i = (S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge^{1-i}\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}},$$
$$\mathfrak{l} = \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{l}^i, \quad \mathfrak{l}^i = (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge^{1-i}\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}},$$
$$X = -\sum_a v^a \otimes e_a$$

とすると方程式 (1) の解 f の存在がわかる. ここで $\mathfrak{k}$ の次数の付け方により, $|f|$ は偶数であることを注意しておく.

定理 3.3 ([1,Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数, $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする. 方程式 (1) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^{-})_{\mathrm{inv}}$ に対して

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としてのホモトピー同値写像である.
つまり $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \cong \tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が成り立つ. □

略証. $\mathrm{d}'_{\mathfrak{g}} := e^{-\iota(f)} \circ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)}$ とおく. また

$$h := -\sum_a L^S(e_a) \otimes \iota^{\mathcal{M}}(B^\sharp(e^a))$$

により $h : C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \to C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を定める. ただし $\mathfrak{g}$ 上の内積 B により定まる同型を $B^\sharp : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ とした.
このとき $\mathcal{L} := [\mathrm{d}'_{\mathfrak{g}}, h]$ とすると $\ker \mathcal{L} = \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ であることがわかる.
さらに $\Pi : C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \to \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を射影, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{L}$ の Green 作用素として, $\mathcal{H} := h\mathcal{G}$ とおくと $[\mathrm{d}'_{\mathfrak{g}}, \mathcal{H}] = 1 - \Pi$ が成り立つ. ■

4 小Cartan複体上の A_∞-構造

$\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ が次数付き代数でもあるとき，$\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ は普通の積に関して一般に derivation ではない．そこで Alekseev-Meinrenken [1] は新しい積 $\odot$ を導入した．

天下りではあるが，$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}\otimes\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ において方程式

$$\partial u+\frac{1}{2}[u,u]_{\wedge(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})}=\sum_j p^j\otimes(\Delta(c_j)-\phi(c_j))$$

を考える．ただし $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, $\xi\mapsto(\xi,\xi)$ より導かれる写像を $\phi:\wedge\mathfrak{g}\to\wedge(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})\cong\wedge\mathfrak{g}\otimes\wedge\mathfrak{g}$ とした．

定理 3.2 より

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}&=\bigoplus_{i\le 0}\mathfrak{k}^i, \quad \mathfrak{k}^i=\bigoplus_{s+t=1-i}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes\left(\wedge^s\mathfrak{g}\otimes\wedge^t\mathfrak{g}\right)_{\mathrm{inv}},\\
\mathfrak{l}&=\bigoplus_{i\le 0}\mathfrak{l}^i, \quad \mathfrak{l}^i=\bigoplus_{s+t=1-i}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes\left\{(\wedge^s\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}\otimes(\wedge^t\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}\right\},\\
X&=\sum_j p^j\otimes(\Delta(c_j)-\phi(c_j))
\end{aligned}$$

とすれば，解 $u\in(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}\otimes\wedge\mathfrak{g})^-_{\mathrm{inv}}$ の存在がわかる．

これより，$\mathcal{M}$ の積を $\mu_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ として

$$(p\otimes y)\odot(p'\otimes y'):=(1\otimes\mu_{\mathcal{M}})e^{\iota(u)}(pp'\otimes y\otimes y')$$

と新しい積を定義する．

このとき Alekseev-Meinrenken [1] は，微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としての準同型写像 $H:\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\otimes\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\to C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ であり

$$e^{\iota(f)}(x\odot x')-(e^{\iota(f)}x)\cdot(e^{\iota(f)}x')=\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}H(x,x')+H(\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}x,x')+(-1)^{|x|}H(x,\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}x')$$

をみたすものが存在することを示した．

これより直ちに $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ が $\odot$ に関して derivation であることがわかる．しかし $\odot$ は結合的ではない！

以下では $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$, $\odot$ に高次の積を加えて $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上に A_∞-構造を与える．

定義 4.1. A_∞-代数とは，次数付きベクトル空間 V についての reduced テンソル余代数

$$\overline{T}V[1]:=\sum_{i\ge 1}V[1]^{\otimes i}$$

と次数 1 の coderivation $b:\overline{T}V[1]\to\overline{T}V[1]$ で $b\circ b=0$ をみたすものの組とする．

A_∞-代数については，例えば [4] 等を参照.

reduced テンソル余代数

$$\overline{T}\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1] := \bigoplus_{i\geq 1} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]^{\otimes i}$$

の次数 1 の coderivation b を与えることは，次数 1 の写像 $b_i : \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]^{\otimes i} \to \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]$ の族を与えることと同値であり，$\{b_i\}$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
b_1(x) &:= (-1)^{|x|}\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}x, \\
b_2(x_1, x_2) &:= (-1)^{|x_1|(|x_2|+1)}x_1 \odot x_2, \\
b_3(x_1, x_2, x_3) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+1)|x_3|}\Pi e^{-\iota(f)}H(b_2(x_1, x_2), x_3) \\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+1)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, b_2(x_2, x_3)) \\
&\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+1)+|x_2||x_3|+|x_3|}\times \\
&\quad\ \Pi e^{-\iota(f)}\{e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, x_2)\cdot e^{\iota(f)}x_3 \\
&\qquad\qquad -(-1)^{|x_1|}e^{\iota(f)}x_1 \cdot e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_2, x_3)\}, \\
b_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+|x_3|)|x_4|}\Pi e^{-\iota(f)}H(b_3(x_1, x_2, x_3), x_4) \\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+|x_4|)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, b_3(x_2, x_3, x_4)) \\
&\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+|x_4|+1)+|x_2|(|x_3|+|x_4|)+|x_3|(|x_4|+1)}\times \\
&\quad\ \Pi e^{-\iota(f)}\{(-1)^{|x_1|+|x_2|}e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, x_2)\cdot e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_3, x_4)\},
\end{aligned}$$

そして $i \geq 5$ かつ奇数のとき

$$\begin{aligned}
b_i(x_1, \ldots, x_i) &:= (-1)^{(|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|+1)|x_i|}\Pi e^{-\iota(f)}H(b_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}), x_3) \\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\cdots+|x_i|+1)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, b_{i-1}(x_2, \ldots, x_i)),
\end{aligned}$$

最後に $i \geq 6$ かつ偶数のとき

$$\begin{aligned}
b_i(x_1, \ldots, x_i) &:= (-1)^{(|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|)|x_i|}\Pi e^{-\iota(f)}H(b_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}), x_i) \\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\cdots+|x_i|)}\Pi e^{-\iota(f)}H(x_1, b_{i-1}(x_2, \ldots, x_i)).
\end{aligned}$$

上の $\{b_i\}$ がすべての $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{n=r+s+t,\\ u=r+1+t}} b_u(\mathbf{1}^{\otimes r}\otimes b_s \otimes \mathbf{1}^{\otimes t}) = 0$$

をみたすことと，$\{b_i\}$ より次数 1 の coderivation

$$b : \overline{T}\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1] \to \overline{T}\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]$$

が unique に定まることから，次が成り立つ.

定理 4.2. 上記のように b を定めると $b \circ b = 0$ が成り立つ．つまり $(\overline{T}\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1], b)$ は A_∞-代数になる． $\square$

注意 4.3. M. Franz が同様のことを主張している ([1]) が，詳細は未発表． $\square$

参考文献

[1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, math.DG/0406350 v2, to appear in Duke Mathematical Journal.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[3] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.

[4] B. Keller, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, Homology Homotopy Appl. 3 (2001), no.1, 1–35.