数理解析研究所講究録 1450 巻 2005 年 95-97

n 個の Shift Function について

東海大学理学部情報数理学科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)
Department of Mathematical Sciences,
Tokai University

$\mathbb{Q}$ は有理数, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, n は正の整数とする. $x,y \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}$ に和 $+$ と n 個の 1 変数関数 $\sigma_k(1 \leq k \leq n)$ を次のように定義する.

$$(x+y)(i_1,\ldots,i_n) = x(i_1,\ldots,i_n) + y(i_1,\ldots,i_n)$$

$$\sigma_k(x)(i_1,\ldots,i_n) = x(i_1,\ldots,i_{k-1},i_k+1,i_{k+1},\ldots,i_n)$$

つまり, $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}$ の元は n 次元空間の整数点に有理数を並べたもので, 和は各成分の和, σ_k は k 番目の方向に 1 つずらす同型写像である (この σ_k たちを shift function と呼ぶ). 構造 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n},+,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ の性質について考える.

$(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n},+)$ が divisible であることと, σ_k たちが $+$ を保存し互いに可換であることから, 変数 $x_i(i<l)$ とパラメータ $a_i \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}(i<m)$ を持つ positive atomic formula は次の形をしていると考えてよい.

$$\sum_{i=1}^{l} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i) = 0$$

ただし $f_i, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ は $\mathbb{Q}$ 上の n 変数多項式で, $f_i(x_i), g_i(a_i)$ は写像 $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ から生成される, 環 $\mathbb{Q}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ の群 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n},+)$ への自然な作用である. $n=1$ のときはこの環が単項イデアル整域であることを使って次の性質がわかる.

Fact 1 ([IW3], [W]) $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}},+,\sigma)$ は

- *quantifier* を消去することができる
- *quasi-minimal(*任意の *1* 変数論理式は, 解集合または解集合の補集合が可算*)* である
- *ω-stable* である

$n>1$ のときはこの方法は使えない (グレブナ基底を使えばよいかもしれない, 勉強中). 例えば

Example 2 $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ で $\sigma_1(x) = x$ の解は $x(i_1, i_2) = q_{i_2}$ という形をしていればよい. 各 i_2 に対して $q_{i_2} \in \mathbb{Q}$ は任意にとれるから解集合は非可算となり *quasi-minimal* ではなくなる. 同様に $n > 1$ のとき $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}$ で $\sigma_k(x) = x$ の解集合も非可算.

しかし, n 個の atomic formula の共通解を可算にすることはできる.

Example 3 $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^2}$ で $\sigma_1(x) = x \wedge \sigma_2(x) = x$ の解は $x(i_1, i_2) = q$ *(*各 i_1, i_2 について q は同じ*)* で $q \in \mathbb{Q}$ のとり方は可算だから解集合は可算. 同様に $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}$ で $f_1(x) = a_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = a_n$ の解も可算, ただし $f_i \in \mathbb{Q}[\sigma_i] - \{0\}$*(1* 変数多項式*)*, $a_i \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^n}$ *(*パラメータ*)*.

また, n 個の atomic formula があっても共通解が非可算になる場合もある.

Example 4 $f = (\sigma_1 - 1)(\sigma_1 - 2)$, $g = (\sigma_1 - 1)(\sigma_1 - 3)$ のとき, $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ との共通解は $(\sigma_1 - 1)x = 0$.

これらの例から, atomic formula たちの共通解が可算になるための条件を次のように予想する.

Conjecture 5
- n 個未満の *atomic formula* たちの共通解が可算になることはない.
- n 個の *unary atomic formula* $f_i(x) = a_i (1 \leq i \leq n)$ の共通解が可算になるための条件は

  1.
  $$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{\vec{AB} : A, B \in P(f_i)\}$$
  の張る空間が n 次元.

  2. $i \neq j$ ならば $P(f_i) \neq P(f_j)$.

  ただし, $f \in \mathbb{Q}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ に対して
  $$P(f) = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n : f \text{ の中の } \Pi_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^{i_k} \text{ の係数} \neq 0\}$$
  で, 各 f_i は *(* 必要ならば $f_i(x) = a_i$ 全体を σ_k^{-1} で移して*)* 次数最小になっているとする.

参考文献

[IW1] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *On quasi-minimal structures*, Kokyuroku of the Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto, vol. 1213 (2001), pp. 50–54

[IW2] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *Quasi-minimal structures and uncountable categoricity*, Proc. Sch. of Sci, Tokai Univ., Vol. 37(2002), pp. 1–8

[IW3] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *ω-saturated quasi-minimal models of* $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$, Math. Log. Quart, vol. 51 (2005), pp. 258–262

[ITW] Masanori ITAI, Akito TSUBOI, and Kentaro WAKAI, *Construction of saturated quasi-minimal structure*, J. Symbolic Logic, vol. 69 (2004), pp. 9–22

[MR] David Marker, **Model Theory**, Graduate Texts in Mathematics vol. 217, Springer, 2002

[W] Kentaro WAKAI, *Shift Function* について, Kokyuroku of the Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto, vol. 1390 (2004), pp. 54–56