

デファイナブル C^r 多様体のアフィン性について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

2005 年 3 月

1. 序文

塩田 [9] は、 $0 \leq r < \infty$ のとき、任意の C^r Nash 多様体は、アフィンであることを証明した。 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ を \mathbb{R} の標準構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡大とする。 $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ ならば、デファイナブル C^r 多様体は、 C^r Nash 多様体である。 \mathcal{M} 上のデファイナブル C^r カテゴリーは、 C^r Nash カテゴリーの一般化である。

順序極小構造の参考文献は、[1], [3], [10] である。ここでは、“デファイナブル” は、“パラメータつきで \mathcal{M} 上デファイナブル” を表し、多様体は、すべて境界をもたないとする。

さらなる順序極小構造の性質・構成法が、[2], [4], [8] によって研究されている。また、デファイナブルカテゴリーはセミアルジェブリックカテゴリーの一般化であり、 \mathcal{R} 上のデファイナブルカテゴリーはセミアルジェブリックカテゴリーに一致する。

r が非負整数で \mathcal{M} が多項式的有界 (指数的) ならば、デファイナブル C^r 多様体は、アフィンである [7] ([5])。

以下がこれらの結果を拡張したものである。

定理 1.1. $0 \leq r < \infty$ ならば、任意のデファイナブル C^r 多様体 X は、アフィンである。

Nash カテゴリー (i.e. $\mathcal{M} = \mathcal{R}$) であっても、定理 1.1 で $r = \infty$ ととることができない [9]。

定理 1.1 と 1.3 [5] より、以下の定理を得る。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 57R55, 58A05, 03C64.
Keywords and Phrases. Definable C^r manifolds, o-minimal, affine.

定理 1.2. $1 \leq s < r < \infty$ とするとき、任意のデファイナブル C^s 多様体は、デファイナブル C^r 微分同相を除いて、ただひとつのデファイナブル C^r 多様体構造をもつ。

2. デファイナブル C^r 多様体

$K \subset \mathbb{R}^n$ と $L \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。写像 $f: K \rightarrow L$ がデファイナブルとは、 f のグラフ ($\subset K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$) がデファイナブルとなることである。 $U \subset \mathbb{R}^n$ と $V \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル開集合とし、 $0 \leq r \leq \omega$ とする。 C^r 写像 $f: U \rightarrow V$ がデファイナブル C^r 写像とは、それがデファイナブルとなることである。デファイナブル C^r 写像 $h: U \rightarrow V$ がデファイナブル C^r 微分同相写像 ($r=0$ のときは、デファイナブル同相写像) とは、デファイナブル C^r 写像 $k: V \rightarrow U$ が存在して、 $h \circ k = id$ かつ $k \circ h = id$ となることである。

定義 2.1. ([6]) $0 \leq r \leq \omega$ とする。

(1) \mathbb{R}^n のデファイナブル部分集合 X が \mathbb{R}^n の d 次元デファイナブル C^r 部分多様体とは、各点 $x \in X$ に対して、 \mathbb{R}^n の原点におけるデファイナブル開近傍 U_x から \mathbb{R}^n の x におけるデファイナブル開近傍 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 ($r=0$ のときは、デファイナブル同相写像) ϕ_x が存在して、 $\phi_x(0) = x, \phi(\mathbb{R}^d \cap U_x) = X \cap V_x$ とできることである。ただし、 \mathbb{R}^d は \mathbb{R}^n の最後の $(n-d)$ 成分が 0 となる部分集合を表す。

(2) d 次元デファイナブル C^r 多様体 X とは、 C^r 多様体であって、有限個のチャート $\{\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ が存在して、各 i, j に対して、 $\phi_i(U_i \cap U_j)$ が \mathbb{R}^d のデファイナブル開部分集合で、写像 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}: \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像 ($r=0$ のときはデファイナブル同相写像) であることである。このとき、このチャートをデファイナブル C^r という。

(3) X (Y) をデファイナブル C^r 多様体でそのデファイナブル C^r チャートをそれぞれ $\{\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_i$ ($\{\psi_j: V_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}_j$) とする。 C^r 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル C^r 写像とは、各 i, j に対して、 $\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i)$ が \mathbb{R}^n で開かつデファイナブルで、 $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ がデファイナブル C^r 写像であることである。

(4) X と Y をデファイナブル C^r 多様体とする。 X が Y とデファイナブル C^r 微分同相 ($r=0$ のときはデファイナブル同相) とは、デファイナブル C^r 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $h: Y \rightarrow X$ が存在して $f \circ h = id$ かつ $h \circ f = id$ となることである。

(5) デファイナブル C^r 多様体がアフィンとは、それがある \mathbb{R}^n のデファイナブル C^r 部分多様体とデファイナブル C^r 微分同相 ($r=0$ のときはデファイナブル同相) となることである。

3. 定理の証明

命題 3.1. X をアフィンデファイナブル C^r 多様体、 V を X のデファイナブル閉集合、 r を非負整数とする。このとき、非負デファイナブル C^r 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、 $f^{-1}(0) = V$ 。

証明 3.2 [6] より、 X は、ある \mathbb{R}^l の閉デファイナブル C^r 部分多様体とデファイナブル C^r 微分同相である。 X とその像を同一視する。このとき、 V は \mathbb{R}^l の閉集合なので、[3] より、デファイナブル C^r 関数 $\phi: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ で $\phi^{-1}(0) = V$ を満たすようにできる。 ϕ を制限することにより、デファイナブル C^r 関数 $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ で $\psi^{-1}(0) = V$ を満たすものを得る。よって、 $f := \psi^2: X \rightarrow \mathbb{R}$ が求める関数である。□

以下は、デファイナブル 1 の分解である。

命題 3.2. r を非負整数、 $\{U_i\}_{i=1}^k$ をデファイナブル C^r 多様体 X のデファイナブル開被覆とする。このとき、デファイナブル C^r 関数 $\lambda_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq k$) が存在して、 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たす。

X がアフィンのとき、命題 3.2 は 4.8 [6] で知られている。

証明. まず、 X のデファイナブル開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^k$ で、 $\bar{V}_i \subset U_i$, ($1 \leq i \leq k$) を満たすものが存在することを証明する。ただし、 \bar{V}_i は X における V_i の閉包とする。

k に関する帰納法で証明する。 $k=1$ のときは、明らかである。 X のデファイナブル開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^{k-1} \cup \{U_k\}$ で、 $\bar{V}_i \subset U_i$, ($1 \leq i \leq k-1$) を満たすものが存在したとする。

$X_{k-1} := \cup_{i=1}^{k-1} V_i$ とおく。帰納法の仮定より、 X_{k-1} のデファイナブル開被覆 $\{W_i\}_{i=1}^{k-1}$ が存在して、 $cl W_i \subset V_i$ を満たす。ただし、 $cl W_i$ は W_i の X_{k-1} における閉包を表す。

U_k はアフィンとしてよい。 $Z_k := U_k \cap \cup_{i=1}^{k-1} V_i$ とし、 $Cl Z_k$ を U_k における Z_k の閉包とする。命題 3.1 より、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi_k: U_k \rightarrow \mathbb{R}$ で $\phi_k^{-1}(0) = Cl Z_k$ を満たすものが存在する。 $cl W_1 \subset V_1$ なので、 ϕ_k は拡張できて、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi_k^1: U_k \cup W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ で $(\phi_k^1)^{-1}(0) = Cl Z_k \cup W_1$ を満たすようにできる。帰納的に、非負デファイナブル C^r 関数 $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $\phi^{-1}(0) = Cl Z_k \cup W_1 \cdots \cup W_{k-1}$ を満たすものがとれる。このとき、 $V_k = \{x \in X | \phi(x) > 0\}$ とおけば、 $\bar{V}_k \subset U_k$ であり、 $\{V_i\}_{i=1}^k$ が求める X のデファイナブル開被覆である。

命題 3.1 より、非負デファイナブル C^r 関数 $\mu_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ で $\mu_i^{-1}(0) = U_i - V_i$ を満たすものがとれる。このとき、 μ_i は非負デファイナブル C^r 関数 $\mu'_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ で $\mu'_i^{-1}(0) = X - V_i$ を満たすものに拡張できる。よって、 $\lambda_i := \mu'_i / \sum_{i=1}^k \mu'_i$ が求めるデファイナブル 1 の分解である。□

定理 1.1 の証明. $\{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i=1}^k$ を X のデファイナブル C^r アトラスとする。命題 3.2 より、デファイナブル C^r 関数 $\lambda_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, ($1 \leq i \leq k$) で、 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たすものがとれる。 $F(x) = (\lambda_1(x)\phi_1(x), \dots, \lambda_k(x)\phi_k(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x))$ で定義される写像 $F : X \rightarrow \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^k$ は、デファイナブル C^r 埋め込みである。よって、 X はアフィンである。□

REFERENCES

- [1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [2] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic field with exponentiation*, Ann. Math. **140** (1994), 183–205.
- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497–540.
- [4] L. van den Dries and P. Speissegger, *The real field with convergent generalized power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **350**, (1998), 4377–4421.
- [5] T. Kawakami, *Affineness of definable C^r manifolds and its applications* Bull. Korean Math. Soc. **40**, (2003), 149–157.
- [6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323–349.
- [7] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$* , Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.
- [8] Y. Peterzil, A. Pillay and S. Starchenko, *Definably simple groups in o-minimal structures*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 4397–4419.
- [9] M. Shiota, *Abstract Nash manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 155–162.
- [10] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.