数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 265-274

対称群の Sylow 部分群に関する Noether 問題とその応用 (Noether's Problem for Sylow subgroups of symmetric groups and its application)

上智理工 (Sophia Univ.)　角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)

0. 概要 (主定理)†

k を標数 0 の体 (特に無限体) とする。n 変数有理関数体 $L_n := k(x_1,\dots,x_n)$ への n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の置換作用 $(\sigma(x_i) := x_{\sigma(i)})$ に対し、次の問題を考える。

問題 (Noether 問題 (Noether's Problem, NP)). $\mathfrak{S}_n$ の部分群 H に対し、その固定体を L_n^H は再び k 上の純超越拡大か。即ち、$t_1,\dots,t_n \in L_n$ が存在して $L_n^H = k(t_1,\dots,t_n)$ となるか。(以下、この時 k 上有理的と呼ぶ。) ∎

本稿では、対称群の Sylow 部分群に対してこの問題を考え、次を示した。

定理 A. 素数 p に対し、p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ 内の p 次巡回群 C_p に対する p 変数の Noether 問題が肯定的ならば、任意の n に対し、n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の p-Sylow 部分群に対する Noether 問題も肯定的である。 ∎

射影一般線型群 $G := \mathrm{PGL}(2,k)$ は一次分数変換により対角的に $L_n = k(x_1,\dots,x_n)$ に作用する。G による固定体を $L_n^G = K_n$ とすると、K_n は x_i 達の複比で生成され、$\mathfrak{S}_n$ が作用する。この時、Noether 問題の変種、或は足掛かりとして次を考える。

問題 (複比型 Noether 問題 (Cross-Ratio Noether's Probrem, CRNP)). $\mathfrak{S}_n$ の部分群 H に対し、その固定体を K_n^H は再び k 上有理的か。即ち、$t_1,\dots,t_{n-3} \in K_n$ が存在して $K_n^H = k(t_1,\dots,t_{n-3})$ となるか。 ∎

$L_n^{\mathfrak{S}_n}$ が $K_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的であれば、複比型 Noether 問題から元々の Noether 問題が従う。L_n は K_n 上有理的なので、これが $\mathfrak{S}_n$-固定体に降下するかどうかの問題である。G の上三角部分群 B による固定体を $L_n^B = \widetilde{K}_n$ とすると、$\widetilde{K}_n$ にも $\mathfrak{S}_n$ が作用している。$L_n^{\mathfrak{S}_n}$ は $\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上は常に有理的であるので、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ が $K_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的かどうかが残る問題だが、これについて次を示した。

定理 B. (1) $n = 5$ のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k = \boldsymbol{Q}$ に対しても)、$\widetilde{K}_5^{\mathfrak{S}_5}$ は ${K_5}^{\mathfrak{S}_5}$ 上有理的である[1]。
(2) n が 6 以上の偶数のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k = \overline{k}$ であっても)、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は ${K_n}^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的でない。
(3) n が 7 以上で $n \equiv 3 \pmod 4$ のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k = \boldsymbol{Q}$ に対しても)、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は ${K_n}^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的である。 ∎

京大数研講究録原稿
† 次頁以降の本文と重複するが、この頁のみで題目と主定理とだけは判るように記しておく。
[1] 橋本喜一朗氏 (早稲田大学) との共同研究

1. Noether 問題

k を標数 0 の体 (特に無限体) とする。n 変数有理関数体 $L_n := k(x_1, \ldots, x_n)$ への n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の置換作用 $(\sigma(x_i) := x_{\sigma(i)})$ を考える。

Noether は 1910 年代に Galois 群の構成問題への関心から次の問題を提案した [N]。

問題 (Noether 問題 (Noether's Probrem, NP)). $\mathfrak{S}_n$ の部分群 H に対し、その固定体を L_n^H は再び k 上の純超越拡大か。即ち、$t_1, \ldots, t_n \in L_n$ が存在して $L_n^H = k(t_1, \ldots, t_n)$ となるか。(以下、この時 k 上有理的と呼ぶ。) ∎

この問題は様々な変種が考えられているため、区別のため、元々の Noether 問題 (Original NP) とか、置換 Noether 問題 (Permutation NP) とか呼ばれることもある。これが肯定的なら、k 上の有理関数体 $k(t_1, \ldots, t_n)$ 上に Galois 群 H を持つ拡大 $k(x_1, \ldots, x_n)/k(t_1, \ldots, t_n)$ が得られるので、k に対して Hilbert の既約性定理が使えれば (例えば k が有限次代数体なら)、t_i を k の元で特殊化することにより、k の H-拡大が得られるという作戦である。

しかしながら、最も簡単な群と思われる巡回群 C_n の場合でも、この問題は難しく、体 k 及び n によって当否が分かれる。例えば、最も興味のある $k = \boldsymbol{Q}$ の場合、$n \leq 7, 9 \leq n \leq 15, n = 17$ などでは肯定的だが、$8|n, n = 47, 113, 11^2$ などでは否定的であることが知られている ([Mas, Sw, EM, Len] 等)。

ここでは、対称群の Sylow 部分群に対してこの問題を考える。

2. Sylow 部分群の Noether 問題

定理 A. 素数 p に対し、p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ 内の p 次巡回群 C_p に対する p 変数の Noether 問題が肯定的ならば、任意の n に対し、n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の p-Sylow 部分群に対する Noether 問題も肯定的である[2]。 ∎

まず準備として、対称群の Sylow 部分群の構造を復習しておく (例えば [Ha])。

p を素数、C_p を p 次巡回群とし、自然数 $m \geq 0$ に対し帰納的に群 H_m を次で定める。

$$H_0 := \{1\}, \tag{2.1}$$

$$H_{m+1} := H_m \wr C_p \qquad (m \geq 0). \tag{2.2}$$

ここで $\wr$ は輪積 (wreath product, レス積) を表す。一般に群 G と n 次置換群 $H \subset \mathfrak{S}_n$ とに対し、次で定まる群 $G \wr H$ を輪積という。

$$G \wr H := (\overbrace{G \times \cdots \times G}^{n\text{ 個}}) \rtimes H, \tag{2.3}$$

ここに H は $G \times \cdots \times G$ に成分の置換で作用する。輪積 $G \wr H$ は H の抽象群構造だけでは決まらず、H の置換群としての実現 ($\mathfrak{S}_n$ への埋込) に依ることに注意しよう。また特に、G も m 次置換群 $G \subset \mathfrak{S}_m$ であれば、$G \wr H$ は mn 次置換群として構成される。

さて、すると n 次対称群の p-Sylow 部分群について次が成り立つのであった。

命題 . 自然数 n の p 進法表示を $n = \sum_{m=0}^{N} a_m p^m$ $(0 \leq a_m \leq p-1)$ とするとき、n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の p-Sylow 部分群を H とすれば、

$$H = \prod_{m=0}^{N} H_m^{a_m}$$

[2]始め筆者は後の応用を念頭に $p = 2$ の場合に示したが、一般の素数 p でも同様に出来ることは陸名・星両氏の示唆による。

である。ここに、n 個の文字を上の p 進法表示に従って p^m 個ごとに分けた時、各直積成分 H_m は対応する p^m 個の文字への置換として作用する。 ∎

定理の証明に進む。作用の仕方により $n=p^m$ の時が本質的であるので、以下この時のみ考える。即ち p^m 次対称群 $\mathfrak{S}_{p^m}$ の p-Sylow 部分群 H_m について考える。この時に限り $H=H_m$ は可移である。

証明 . m に関する帰納法で示す。帰納法の仮定から $k(x_1,\dots,x_{p^m})^{H_m}=k(\xi_1,\dots,\xi_{p^m})$ であるとする。p^{m+1} 個の変数に $x_i^{(j)}$ $(1\le i\le p^m, 1\le j\le p)$ と番号付ける。$H_{m+1}=(H_m\times\cdots\times H_m)\rtimes C_p$ の作用を、第 j 番目の H_m については $x_i^{(j)}$ $(1\le i\le p^m)$ への置換で、C_p については $x_i^{(1)}\mapsto x_i^{(2)}\mapsto\cdots\mapsto x_i^{(p)}\mapsto x_i^{(1)}$ で定める。

まず、帰納法の仮定により、$k(x_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 1\le j\le p)^{H_m\times\cdots\times H_m}=k(\xi_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 1\le j\le p)$ となる生成元 $\xi_i^{(j)}$ $(1\le i\le p^m, 1\le j\le p)$ で、C_p の作用が $\xi_i^{(1)}\mapsto\xi_i^{(2)}\mapsto\cdots\mapsto\xi_i^{(p)}\mapsto\xi_i^{(1)}$ となるものが取れる。C_p の作用は通常の p 変数への作用を p^m 重化したものである。このような多重化された作用の固定体に関しては、一重の場合に帰着出来ることが知られている (対称群の場合しか扱っていないが本質的には Mattuck[Mat]。尚、注 2 参照)。その核心は Hilbert の定理 90 である。今の巡回作用であれば、具体的に $\eta_i^{(j)}:=\sum_{\sigma\in C_p}\sigma\left(\xi_i^{(1)}\xi_i^{(j)}\right)$ $(2\le j\le n)$ と取れば、$\eta_i^{(j)}$ は C_p でも固定され、従って H_{m+1}-固定元である。また、

$$k(\xi_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 1\le j\le p)=k(\xi_i^{(1)}|1\le i\le p^m)(\eta_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 2\le j\le p) \tag{2.4}$$

であるので、

$$k(\xi_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 1\le j\le p)^{C_p}=k(\xi_i^{(1)}|1\le i\le p^m)^{C_p}(\eta_i^{(j)}|1\le i\le p^m, 2\le j\le p) \tag{2.5}$$

となり、一重の C_p-作用による固定体の有理性に帰着する。それは定理の仮定にある。∎

注 1. 後にこのことは実質的には Kuyk[K] によって次の形で示されていることを知ったが、入手困難な学位論文である上、オランダ語の文献で、余り一般に知られていないように思われるので、改めてこの場合の証明を記した。

命題 (Kuyk[K]). n 次置換群 $G\subset\mathfrak{S}_n$ 及び m 次置換群 $H\subset\mathfrak{S}_m$ に対する Noether 問題が共に肯定的ならば、mn 次置換群 $G\wr H\subset\mathfrak{S}_{mn}$ に対する Noether 問題も肯定的である。 ∎

注 2. 多重化された作用を一重の場合に帰着する議論は後に拡張され、次の形で成り立つことが示されている。有用な命題なので、便宜の為に挙げておく。

命題 (Hajja-Kang[HK]). 体 L に有限群 G が忠実に作用しているとし、有理関数体 $L(x_1,\dots,x_m)$ に G の作用が次の形 (affine) に延びているとする:

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=A(\sigma)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}+B(\sigma)\qquad(\sigma\in G, A(\sigma)\in\mathrm{GL}_m(L), B(\sigma)\in L^m).$$

この時、$L(x_1,\dots,x_m)=L(z_1,\dots,z_m)$ となる G-固定元 $z_1,\dots,z_m\in L(x_1,\dots,x_m)^G$ が存在する。即ち、$L(x_1,\dots,x_m)^G=L^G(z_1,\dots,z_m)$ となる。 ∎

注 3. 証明を詳しく見れば、C_p に対する Noether 問題が肯定的であって生成元が x_i の斉次多項式で取れれば、p-Sylow 部分群に対する Noether 問題についても生成元を斉次多項式に取れることが判る。特に $p=2$ の時はそうなる。これは後の節で用いる。

3. 複比型 Noether 問題

$n \geq 5$ とする。射影一般線型群 $G := \mathrm{PGL}(2,k)$ は一次分数変換により対角的に $L_n = k(x_1,\dots,x_n)$ に作用する: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x_i = \dfrac{ax_i+b}{cx_i+d}$。その固定体 $K_n := L_n^G$ は、x_i 達の複比 (cross-ratio) によって生成される。特に、

$$K_n = k\left(\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2}\Big/\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\,\middle|\, i = 4,\dots,n\right) \tag{3.1}$$

であり、k 上超越次元 $n-3$ の有理関数体であって、L_n は K_n 上超越次元 3 の有理関数体である。K_n を**複比の体**と称する。

G の L_n への作用は $\mathfrak{S}_n$ の作用と可換なので、複比の体 K_n にも $\mathfrak{S}_n$ が自然に作用している。この状況で次の問題を考える。

<u>**問題**</u> (複比型 Noether 問題 (Cross-Ratio Noether's Probrem, CRNP)). $\mathfrak{S}_n$ の部分群 H に対し、その固定体を K_n^H は再び k 上有理的か。即ち、$t_1,\dots,t_{n-3} \in K_n$ が存在して $K_n^H = k(t_1,\dots,t_{n-3})$ となるか。 ▮

<u>**注**</u> **4.** 本来の置換 Noether 問題との関係は次の通り。もし、

(1) H に対する複比型 Noether 問題が肯定的 (即ち、$K_n^H : k$ 上有理的)

(2) $L_n^H : K_n^H$ 上有理的

ならば、L_n^H は k 上有理的となり、置換 Noether 問題も肯定的。但し、逆が成立するか (必要条件か) どうかは不明。

本稿では以下、上記(2) について専ら考える。(2) は、$H = \mathfrak{S}_n$ の場合に成り立てば全ての H に対しても成り立つ (同じ生成元でよい)。また、L_n^H/K_n^H は超越次元 3 であり、これを次のように更に 1 次元づつに 3 段階に分けて考えることが出来る。

$G = \mathrm{PGL}(2,k)$ の部分群の列

$$G = \mathrm{PGL}(2,k) \supset B := \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \supset U := \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \supset \{1\} \tag{3.2}$$

を考えると、L_n への作用の固定体の列 $L_n \supset L_n^U \supset L_n^B \supset L_n^G = K_n$ はそれぞれ超越次元 1 の相対的に有理的な拡大である。実際、

$$L_n^B = k\left(\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2}\,\middle|\, i = 3,\dots,n\right) = K_n\left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right), \tag{3.3}$$

$$L_n^U = k\left(x_i - x_1 \,|\, i = 2,\dots,n\right) = L_n^B(x_2 - x_1), \tag{3.4}$$

$$L_n = L_n^U(x_1) \tag{3.5}$$

である。L_n^U を**差の体**、L_n^B を**差の比の体**と称するのが良かろう。以下、$L_n^B =: \widetilde{K}_n$ と書く。この 3 段積みの純超越拡大が置換群による固定体に降下するかどうかが問題となる。

このうち、上 2 段については有理性の降下は常に成立する。実際、

$$F(X) := \prod_{i=1}^{n}(X + x_i) =: X^n + \sum_{i=1}^{n} s_n X^{n-i} \tag{3.6}$$

$$F\left(X - \frac{s_1}{n}\right) =: X^n + \sum_{i=2}^{n} t_n X^{n-i} \tag{3.7}$$

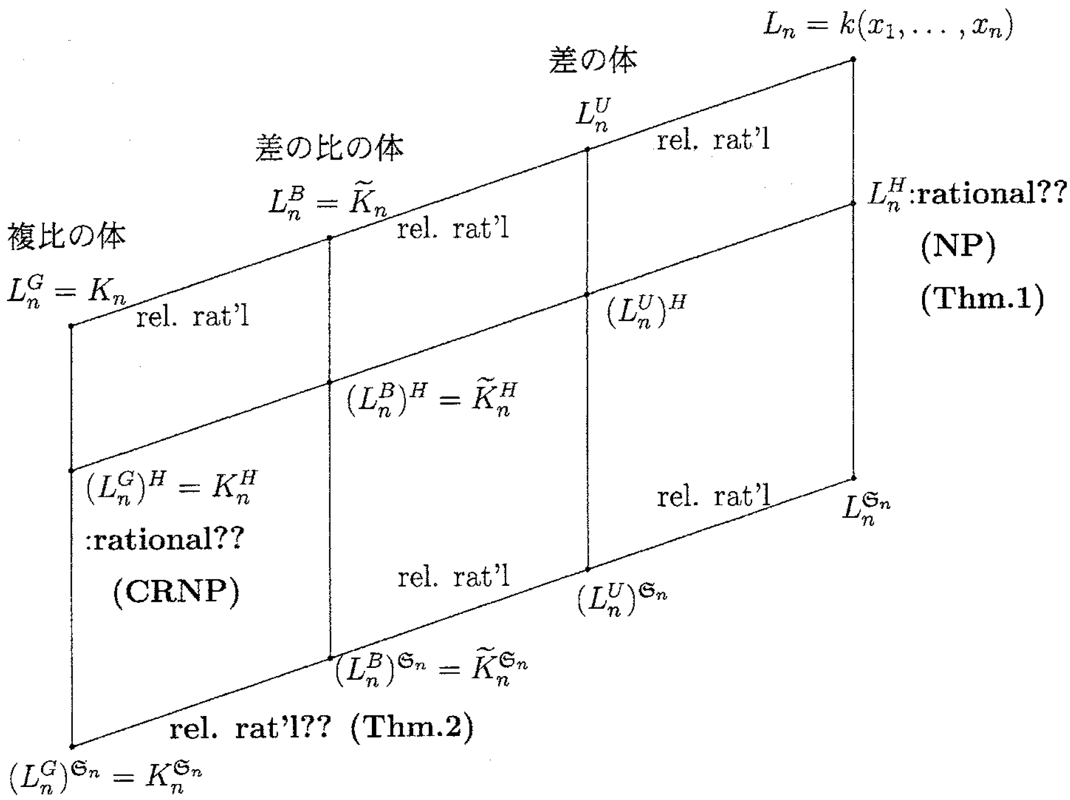

FIGURE 1. 本稿の全体図

とおけば、

$$L_n^{\mathfrak{S}_n} = k(s_1, \dots, s_n) = (L_n^U)^{\mathfrak{S}_n}(s_1) \tag{3.8}$$

$$(L_n^U)^{\mathfrak{S}_n} = k(t_2, \dots, t_n) = \widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}\left(\frac{t_2}{t_3}\right) \tag{3.9}$$

$$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n} = k\left(t_i\left(\frac{t_2}{t_3}\right)^i \middle| \, 3 \le i \le n\right) \tag{3.10}$$

である。従って残る一番下の部分の

- $\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は $K_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的か？

が懸案となる。

<u>**定理**</u> **B.** (1) $n=5$ のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k=\boldsymbol{Q}$ に対しても)、$\widetilde{K}_5^{\mathfrak{S}_5}$ は ${K_5}^{\mathfrak{S}_5}$ 上有理的である。
(2) n が 6 以上の偶数のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k=\overline{k}$ であっても)、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は ${K_n}^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的でない。
(3) n が 7 以上で $n \equiv 3 \pmod 4$ のとき、標数 0 の任意の体 k に対して (従って特に $k=\boldsymbol{Q}$ に対しても)、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は ${K_n}^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的である。 ∎

作戦は次の通り。H を $\mathfrak{S}_n$ の 2-Sylow 部分群として、降下問題を更に 2 段階に分ける。
(1) $\widetilde{K}_n^H/K_n^H$ が有理的か? (2-Sylow 降下)
(2) $\widetilde{K}_n^H/K_n^H$ が有理的ならば、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}/K_n^{\mathfrak{S}_n}$ も有理的か? (奇数次降下)

このうち(2) の奇数次降下は、一般的な次の補題により常に正しい。(証明は Riemann-Roch の定理、或は Brauer 群の計算の演習問題。)

補題. K/k を1変数代数関数体とし、$\tilde{k}/k$ を有限次拡大で奇数次数とする。係数拡大した $K\tilde{k}/\tilde{k}$ が有理的 (或る $z \in K\tilde{k}$ があって $K\tilde{k} = \tilde{k}(z)$) ならば、元々 K/k が有理的である (即ち $z \in K$ に取れる)。 ∎

一方、(1) の 2-Sylow 降下の方は n に依存する。$n = 5$ の場合は k 上の超越次数や H の位数が小さいので、直接計算に訴えることが出来た。$n \equiv 3 \pmod 4$ の場合は $(n-3)$ 変数の置換 Noether 問題と結び付けることで証明した。それに対して n が 6 以上の偶数の場合は、(少なくとも筆者の当初の目論見に反して) 有理性が降下しない。$\mathfrak{S}_n$-固定体に降下すれば任意の部分群に対しても降下するので、否定的であることを示すには、$\mathfrak{S}_n$ の或る部分群 H (2-Sylow 部分群と限らない) に対して降下しないことを示せば十分であり、実際、うまく証明できる部分群を見つけた。

4. 複比の体への対称群の作用の計算

複比の体 K_n・差の比の体 $\tilde{K}_n$ の生成元の取り方、及び $\mathfrak{S}_n$ の作用の明示的計算は、次のようにすると簡明である (橋本-角皆 [HT] [3])。

順番付 n 標点射影直線のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{0,n}$ とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{0,n} &= \left((\mathbf{P}^1)^n \setminus (\text{weak diagonal})\right)/\mathrm{PGL}(2)\\ &= \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbf{P}^1, x_i \neq x_j (i \neq j)\}/\mathrm{PGL}(2),\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここに $\mathrm{PGL}(2) = \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$ は対角作用。$(x_1, \dots, x_n)$ の類を $[x_1, \dots, x_n]$ で表す。その関数体は複比の体 K_n である:

$$k(\mathcal{M}_{0,n}) = k(x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{PGL}(2)} = K_n. \tag{4.2}$$

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は置換により $\mathcal{M}_{0,n}$ に左作用する。

$$\sigma \cdot [x_1, \dots, x_n] := [x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}] \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \tag{4.3}$$

この引戻しによる関数体 $k(\mathcal{M}_{0,n})$ への左作用

$$\sigma \cdot \varphi := \varphi \circ \sigma^{-1} \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varphi \in K) \tag{4.4}$$

が、今まで考えてきた複比の体 K_n への作用に他ならない。

$\mathcal{M}_{0,n}$ の点 $P = [x_1, \dots, x_n]$ は PGL(2)-作用により、例えば $[y_1, \dots, y_{n-3}, 0, 1, \infty]$ の形に一意に書ける。この時、

$$y_i(P) = y_i = \frac{x_i - x_{n-2}}{x_i - x_n} \Bigg/ \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_n} \tag{4.5}$$

は $\mathcal{M}_{0,n}$ 上の関数と見做せ、これにより $K_n = k(\mathcal{M}_{0,n}) = k(y_1, \dots, y_{n-3})$ となる。この生成元 y_i への n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用は次のようにして書き下せる。

例. 簡単の為、$n = 5$ として例を挙げる。$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ の作用を考えよう。$P = [x_1, \dots, x_5] = [y_1, y_2, 0, 1, \infty]$ に対し、

$$\alpha^{-1}(P) = [x_2, x_3, x_4, x_5, x_1] = [y_2, 0, 1, \infty, y_1] = \left[\frac{y_2 - 1}{y_2 - y_1}, \frac{1}{y_1}, 0, 1, \infty\right] \tag{4.6}$$

[3] 2002 年の本集会での講演の報告集 (橋本-角皆 [HT*]) にも記述あり。但し、この原稿には数式の誤記を含む数箇所の誤りがあるので、修正版 `http://www.mm.sophia.ac.jp/~tsuno/research/rims02rev/` を参照されたい。

$(\xi \mapsto \dfrac{\xi - 1}{\xi - y_1}$ で再正規化) であるので、

$$\alpha : y_1 \longmapsto \frac{y_2 - 1}{y_2 - y_1}, \qquad y_2 \longmapsto \frac{1}{y_1}. \quad \blacksquare \tag{4.7}$$

次に $L_n^B = \widetilde{K}_n$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用を記述する。K_n 上の生成元としては $z := \dfrac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_{n-2}}$ が取れる: $\widetilde{K}_n = K_n(z)$。ここで z は形式的に

$$z = \lim_{x_{n+1} \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_{n-2}}{x_{n+1} - x_n} \Big/ \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_n} \tag{4.8}$$

と思えるので、形式的な極限操作と $\mathfrak{S}_n$-作用との可換性から、上の要領で第 $(n+1)$ 成分に z を置いておけば同時に容易に求められる。これは、境界への接埋込 $\mathcal{M}_{0,n} \to \mathcal{M}_{0,n+1}$ を考えているとも解釈できる。

<u>**例**</u>. 上の例で、

$$\alpha^{-1}([y_1, y_2, 0, 1, \infty; z]) = [y_2, 0, 1, \infty, y_1; z] = \left[\frac{y_2 - 1}{y_2 - y_1}, \frac{1}{y_1}, 0, 1, \infty; \frac{z - 1}{z - y_1}\right] \tag{4.9}$$

であるので、

$$\alpha(z) = \frac{z - 1}{z - y_1}. \quad \blacksquare \tag{4.10}$$

<u>**注**</u> **5.** 上の例で $[y_1, y_2, 0, 1, \infty]$ なる正規化を考えて計算したが、他の取り方でも良い。と言うか、計算の都合に合わせて便利な正規化 (生成元の取り方) を選ぶのが次節以降の計算の眼目であり、このような幾何的な解釈を利用すると、都合の良い生成元を見付け易い。

5. 定理 B・$n = 5$ の場合

本節は橋本喜一朗氏 (早稲田大学) との共同研究である。

肯定的結果を得るには 2-Sylow 降下が出来れば良い。正規化として $[y_1, y_2, -1, 1, \infty; z]$ の形を採る[4]。即ち、

$$y_i = 2 \cdot \frac{x_i - x_3}{x_i - x_5} \Big/ \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_5} - 1 \quad (i = 1, 2), \qquad z = 2 \cdot \frac{x_4 - x_5}{x_4 - x_3} - 1 \tag{5.1}$$

で、$K_5 = k(y_1, y_2), \widetilde{K}_5 = K_5(z)$ である。

$\sigma_1 := (1\ 2), \sigma_2 := (3\ 4), \sigma_3 := (1\ 4)(2\ 3)$ とおくと、$\mathfrak{S}_5$ の 2-Sylow 部分群の一つは $H := \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle \simeq D_4$ である。また、$V := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \simeq C_2 \times C_2$ とおく。$K_5, \widetilde{K}_5$ への作用は次の通り:

$$\sigma_1 : \begin{cases} y_1 \longmapsto -y_1, \\ y_2 \longmapsto -y_2, \\ z \longmapsto -z, \end{cases} \qquad \sigma_2 : \begin{cases} y_1 \longmapsto y_2, \\ y_2 \longmapsto y_1, \\ z \longmapsto z, \end{cases} \qquad \sigma_3 : \begin{cases} y_1 \longmapsto \dfrac{y_1 + y_2 - 2}{y_2 - y_1}, \\ y_2 \longmapsto \dfrac{y_1 + y_2 + 2}{y_2 - y_1}, \\ z \longmapsto \dfrac{y_1 + y_2 - 2z}{y_2 - y_1}. \end{cases} \tag{5.2}$$

[4]口演当日の配布資料と成分の順番だけ変更しました。

これより $K_5^V = k((y_1+y_2)^2, y_1y_2), \widetilde{K}_5^V = K_5^V((y_1+y_2)z)$ は容易に判る。

$$(5.3) \qquad a := \frac{4}{(y_1-y_2)^2}, \qquad b := 1 - y_1y_2, \qquad c := \frac{(y_1+y_2)z}{2}$$

とおくと、$K_5^V = k(a,b), \widetilde{K}_5^V = K_5^V(c)$ であって、

$$(5.4) \qquad \sigma_3 : a \longmapsto \frac{1}{a}, \qquad b \longmapsto ab, \qquad c \longmapsto 1 + a - ab - ac$$

であり、これより

$$(5.5) \qquad \begin{cases} r := a + \sigma_3(a) = a + \dfrac{1}{a}, \\ s := b + \sigma_3(b) = (1+a)b, \\ t := c + \sigma_3(c) = 1 + a - ab + (1-a)c \end{cases}$$

とおくと、$K_5^V = k(a,s), \widetilde{K}_5^V = K_5^V(t)$ であって、$K_5^H = k(r,s), \widetilde{K}_5^H = K_5^V(t)$ となり、$\widetilde{K}_5^H$ は K_5^H 上有理的である。 ∎

注 6. $n=5$ の場合の複比型Noether問題に関しては、5種の可移部分群 $(C_5, D_5, F_{5,4}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5)$ の全てについて、肯定的であることを既に示した (橋本-角皆 [HT])。従って、今回の結果により、元々の Noether 問題の再証明を与えたことになる。 ∎

6. 定理 B・n: 偶数の場合

n が偶数で $n \geq 6$ とする。否定的であることの証明は、うまい (まずい?) $H \subset \mathfrak{S}_n$ を採って、$\widetilde{K}_n^H$ が K_n^H 上有理的でないことが示せれば良い。

$n = 2m+4$ $(m \geq 1)$ とおき、正規化を $[y_1, \ldots, y_{2m}, y_0, 0, 1, \infty; z]$ と採る。

$$(6.1) \qquad K_n = k(y_0, y_1, \ldots, y_{2m}), \qquad \widetilde{K}_n = K_n(z)$$

である。

$$(6.2) \qquad \begin{cases} H' := \mathfrak{S}_{2m} = \mathfrak{S}(\{1, \ldots, 2m\}) \qquad (\text{始めの } 2m \text{ 文字の置換}), \\ \sigma := (2m+1\ \ 2m+2)(2m+3\ \ 2m+4) = (n-3\ \ n-2)(n-1\ \ n), \\ H := H' \times \langle \sigma \rangle \subset \mathfrak{S}_n \end{cases}$$

とする。

H' は $y_1, \ldots, y_{2m}$ に置換で作用し、y_0, z を固定する。s_i $(1 \leq i \leq 2m = n-4)$ を $y_1, \ldots, y_{2m}$ の i 次基本対称式とすれば、$K_n^{H'} = k(y_0, s_1, \ldots, s_{2m}), \widetilde{K}_n^{H'} = K_n^{H'}(z)$ である。

$$(6.3) \qquad \sigma : \begin{cases} y_0 \longmapsto y_0, \\ y_i \longmapsto \dfrac{y_0}{y_i} \quad (1 \leq i \leq 2m), \\ z \longmapsto \dfrac{y_0}{z}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} s_i &\longmapsto \frac{y_0^i s_{2m-i}}{s_{2m}} \quad (1 \leq i \leq 2m-1), \\ s_{2m} &\longmapsto \frac{y_0^{2m}}{s_{2m}} \end{aligned}$$

であるので、$t := \dfrac{s_{2m}}{y_0^m}$ とおくと $\sigma(t) = \dfrac{1}{t}$ である。

$$
\begin{aligned}
&u^{\pm} := t \pm \sigma(t) = t + \frac{1}{t}, \qquad u_m := s_m + \sigma(s_m) = s_m\left(1 + \frac{1}{t}\right), \\
&u_i^{\pm} := \frac{s_i \pm \sigma(s_i)}{u^{\pm}} \quad (1 \le i \le m-1)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

とおくと、

$$K_n^H = k(y_0, u_1^{\pm}, \ldots, u_{m-1}^{\pm}, u^+), \qquad K_n^{H'} = K_n^H(u^-) \tag{6.5}$$

となる。また、

$$w^{\pm} := z \pm \sigma(z) = z \pm \frac{y_0}{z}, \qquad v := \frac{w^-}{u^-} \tag{6.6}$$

とおくと、$\widetilde{K}_n^H = K_n^H(w^+, v)$ で、

$$(w^+)^2 - \left((u^+)^2 - 4\right)v^2 = 4y_0 \tag{6.7}$$

を満たす。これは(如何なる係数体 k についても) K_n^H 上の非有理円錐曲線 (K_n^H-有理点 (w^+, v) を持たない) なので、$\widetilde{K}_n^H$ は K_n^H 上有理的でない。 ∎

注 7. ここで採った H は奇置換を含んでいる。$H = \mathfrak{A}_n$ について考えて、$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{A}_n}$ が $K_n^{\mathfrak{A}_n}$ 上有理的かどうかを問うのは依然として興味深い問題であろう。

注 8. $n = 6$ の場合には、位数 2 の部分群 $\langle(1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)\rangle$ に対して、既に固定体に有理性が降下しないことも判る。

7. 定理 B・$n \equiv 3 \pmod 4$ の場合

肯定的結果を得るには 2-Sylow 降下が出来れば良い。

$n = 4m + 3$ $(m \ge 1)$ とおく。正規化として $[y_1, \ldots, y_{4m}, -1, 1, \infty; z]$ の形を採る。

$$K_n = k(y_1, \ldots, y_{4m}), \qquad \widetilde{K}_n = K_n(z) \tag{7.1}$$

である。

$$
\begin{cases}
H' : \ \mathfrak{S}_{4m} = \mathfrak{S}(\{1, \ldots, 4m\}) \ (\text{始めの } 4m \text{ 文字の置換}) \text{ の 2-Sylow 部分群}, \\
\sigma := (4m+1 \ \ 4m+2) = (n-2 \ \ n-1), \\
H := H' \times \langle\sigma\rangle \subset \mathfrak{S}_n
\end{cases}
\tag{7.2}
$$

とすれば、H は $\mathfrak{S}_n$ の 2-Sylow 部分群である ($n \equiv 3 \pmod 4$ であることが効いている)。

H' は $y_1, \ldots, y_{4m}$ に置換で作用し、z を固定する。定理 A とその後の注 3 とにより、$K_n^{H'}$ は k 上有理的であり、$K_n^{H'} = k(\eta_1, \ldots, \eta_{4m})$ となる斉次多項式 $\eta_i \in k[y_1, \ldots, y_{4m}]$ $(1 \le i \le 4m)$ が取れる。そのうち、η_1 のみが奇数次で、$\eta_2, \ldots, \eta_{4m}$ が偶数次としてよい。また、$\widetilde{K}_n^{H'} = K_n^{H'}(z)$ である。

$$
\sigma : \begin{cases}
y_i \longmapsto -y_i \quad (1 \le i \le 4m), & \eta_1 \longmapsto -\eta_1, \\
z \longmapsto -z, & \eta_i \longmapsto \eta_i \quad (2 \le i \le 4m)
\end{cases}
\tag{7.3}
$$

であるから、

$$K_n^H = k(\eta_1^2, \eta_2, \ldots, \eta_{4m}), \qquad \widetilde{K}_n^H = K_n^H(\eta_1 z) \tag{7.4}$$

となり、$\widetilde{K}_n^H$ は K_n^H 上有理的である。 ∎

注 9. 実は H として 2-Sylow 部分群を考えなくても、群指数 $(\mathfrak{S}_n : H)$ が奇数である (即ち 2-Sylow 部分群を含む) ような或る部分群 H で同様の議論が出来れば良かった。実際、$H := \mathfrak{S}_{4m} \times \langle \sigma \rangle \subset \mathfrak{S}_n$ とすれば、$K_n^{\mathfrak{S}_{4m}}$ は $y_1, \ldots, y_{4m}$ の対称式の体であるから、2-Sylow 部分群に関する前半の結果を用いずとも (しかも更に簡明に) 証明できたのであった (題目に偽り有り!?)。しかし、n の合同条件によって結果が分かれるのは、$n-3$ から n に上がるまでの 2-Sylow 部分群の成長具合の違いによるものなので、敢えて上の証明を掲げておく。実際、$n \equiv 1 \pmod 4$ の時には 2-Sylow 部分群の成長が統制できないので、現在の所は結果不明である。

注 10. これにより $n \equiv 3 \pmod 4$ の時は、複比型 Noether 問題から元々の Noether 問題が直ちに従うことが判った。しかし、残念ながらこの道筋が Noether 問題への有効な手段とも言い難い。確かに複比型 Noether 問題では変数が 3 つ減るが、その代わり非線型な作用になるので一般的な議論が難しい。$n = 5$ の時は $5 - 3 = 2$ が十分に小さく計算機などを用いた直接計算で手が届いたが、$n = 7$ でも $7 - 3 = 4$ で、4 変数多項式での Gröbner 基底などの計算は計算機にとっても重過ぎるのが現状である。であれば、むしろ変数を減らさないままで、或は $(n-1)$ 変数の線型作用である L_n^U の線で議論する方が、諸々の一般論が使えて有効なのかも知れない。

参考文献

[EM] S. Endô, T. Miyata, Invariants of finite abelian groups, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 7–26.

[Ha] M.Hall,Jr., The theory of groups, Macmillian, 1959. (日本語訳:群論 (上下), 榎本彦衛・坂内英一訳, 吉岡書店,1970)

[HK] M. Hajja, M.C. Kang, Some actions of symmetric groups, J. Algebra 177 (1995), no. 2, 511–535.

[HT] K. Hashimoto, H. Tsunogai, Generic polynomials over $\boldsymbol{Q}$ with two parameters for the transitive groups of degree five, Proc. Japan Acad., 79A (2003), 148–151.

[HT*] 橋本喜一朗, 角皆宏, 5 次可移群に対する $\boldsymbol{Q}$ 上 2 助変数生成的多項式の構成, 京都大学数理解析研究所講究録 1324「代数的整数論とその周辺」(2003), 207–216 (修正版 `http://www.mm.sophia.ac.jp/~tsuno/research/rims02rev/`).

[K] W. Kuyk, Over het omkeerprobleem van de Galoistheorie (Dutch), Vrije Universiteit te Amsterdam, Amsterdam 1960.

[Len] H. W. Lenstra, Rational functions invariant under a finite abelian group, Invent. Math. 25 (1974), 299–325.

[Mas] K. Masuda, Application of the theory of the group of classes of projective modules to the existance problem of independent parameters of invariant, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 223–232.

[Mat] A. Mattuck, The field of multisymmetric functions, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 764–765.

[N] E. Noether, Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, Math. Ann. 78 (1916), 221–229.

[Sw] R.G. Swan, Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Invent. Math. 7 (1969), 148–158.

上智大学理工学部数学科 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7–1

E-mail address: `tsuno@mm.sophia.ac.jp`