数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 96-102

Multiplierの摂動とその存在

山形大学工学部 三浦 毅
Yamagata University, Takeshi Miura
日本工業大学（非常勤講師） 平澤 剛
Nippon Institute of Technology, Go Hirasawa
山形大学工学部 高橋 眞映
Yamagata University, Sin-Ei Takahasi

以下では A を Banach 環とする．特に断らない限り，Banach 環は可換とも限らないし，また単位元をもつとも限らない．

定義 1 写像 $T: A \to A$ が multiplier であるとは

$$aT(b) = T(a)b \qquad (\forall a, b \in A)$$

をみたすことである．

ここで，multiplier には線型性や連続性などの付加的条件は一切仮定していない．A が可換であるとき，multiplier の最も簡単な例は A の元 x を掛ける積作用素 $a \mapsto ax$ である．実際積作用素が multiplier になることを確かめるのは容易い．一般に multiplier の構造は非常に複雑であるが，例えば A が単位元をもつ場合は非常に簡単な形をしていることが直ちに分かる．

例 1 (1) A が単位元 e をもつとき，multiplier$T: A \to A$ は積作用素である．実際 $a = e$ を考えれば

$$T(b) = eT(b) = T(e)b \qquad (\forall b \in A)$$

が成り立つからである．つまり A が単位元をもつとき A 上の multiplier は積作用素だけに限られる．

(2) A を閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続関数全体のなす可換 Banach 環 $C([0,1])$ とする．このとき関数 $\sin(1/x)$ は $x=0$ では連続に拡張することができないので，特に A の元ではない．ところが

$$f \mapsto f \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad (\forall f \in A)$$

は（正確には $x=0$ のとき関数の値を 0 と定義して拡張することによって）A 上の multiplier となることが分かる．

我々の興味は multiplier そのものの構造ではなく，その摂動である．つまり，multiplier に "近い" 写像と multiplier との関連を調べたい．このとき問題となるのはその "近さ" であることはいうまでもない．我々は次の不等式の意味で multiplier に近い写像を考える．

定義 2 $\varepsilon \geq 0, p \geq 0$ とする．写像 $\phi\colon A \to A$ で

$$(*) \qquad \|a\phi(b) - \phi(a)b\| \leq \varepsilon \|a\|^p \|b\|^p \qquad (\forall a, b \in A)$$

をみたすものを A 上の**近似的 multiplier** と呼ぶ．

定義から明らかではあるが，任意の multiplier $T\colon A \to A$ はどんな $\varepsilon \geq 0, p \geq 0$ に対しても $(*)$ をみたす．したがって，直感的には $(*)$ をみたす ϕ の全体は A 上の multiplier を含む，より広いクラスを成している．

摂動を研究する上で最も典型的な問題として，近似的 multiplier に対して真の multiplier が（何らかの意味で）近くに存在するか，が考えられる．例えば，A が可換でさらに単位

元 e をもてば，任意の近似的 multiplier ϕ の近くに真の multiplier（この場合は積作用素）が存在する．実際 $(*)$ において $a = e$ とすれば，multiplier $a \mapsto \phi(e)a$ は

$$\|\phi(a) - \phi(e)a\| \leq \varepsilon \|a\|^p \qquad (\forall a \in A)$$

の意味で ϕ の近くにある．

ところで，近似的 multiplier に関する問題が意味をもつのは，その全体が A 上の multiplier 全体よりも真に広いクラスを成していることが大前提である（もしも両者が一致していれば，近似的 multiplier の近くには必ず真の multiplier があると主張しても，もちろん矛盾はしないが，何も言っていないことに等しい）．我々は A 上の近似的 multiplier の全体は，直感どおり，multiplier 全体よりも真に広いクラスを成していると予想し，またそのように期待したのであるが，多くの場合両者は一致することが分かった．この結果を述べるため，若干の準備を必要とする．

定義 3 A が **without order でない**とは $x_0 a = a y_0 = 0$ $(\forall a \in A)$ となる $x_0, y_0 \in A \setminus \{0\}$ が存在することである．

定義より，対偶を考えれば，A が without order であることは $x \in A$ に対して $xa = 0$ $(\forall a \in A)$ ならば $x = 0$，または $ax = 0$ $(\forall a \in A)$ ならば $x = 0$ のいずれか一方が成り立つことと同値である．例えば近似単位元をもつ Banach 環や半単純可換 Banach 環は without order であることが分かる．

定理 A は（可換とは限らない）複素 Banach 環で without order とする．また $\varepsilon \geq 0, p \geq 0,$

$p \neq 1$ とする．このとき

$$\|a\phi(b) - \phi(a)b\| \leq \varepsilon \|a\|^p \|b\|^p \qquad (\forall a, b \in A) \tag{1}$$

をみたす写像 $\phi: A \to A$ は multiplier である．

証明 まず ϕ は homogeneous であることを示す，つまり

$$\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall a \in A)$$

そのため $\lambda \in \mathbb{C}$ 及び $a \in A$ を任意にとる．また $x \in A$ を任意にとり固定する．さらに $s = (1-p)/|1-p|$ とおく．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (1) より

$$\begin{aligned}
\|n^s x[\phi(\lambda a) - \lambda\phi(a)]\| &\leq \|(n^s x)[\phi(\lambda a)] - [\phi(n^s x)](\lambda a)\| + \|[\phi(n^s x)](\lambda a) - (n^s x)\lambda\phi(a)\| \\
&\leq \varepsilon \|n^s x\|^p \|\lambda a\|^p + |\lambda| \varepsilon \|n^s x\|^p \|a\|^p \\
&\leq n^{sp} \varepsilon (|\lambda|^p + |\lambda|) \|x\|^p \|a\|^p
\end{aligned}$$

したがって

$$\|x[\phi(\lambda a) - \lambda\phi(a)]\| \leq n^{s(p-1)} \varepsilon (|\lambda|^p + |\lambda|) \|x\|^p \|a\|^p \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

ところで s の定義より $s(p-1) < 0$ であるから (2) において $n \to \infty$ とすれば $x[\phi(\lambda a) - \lambda\phi(a)] = 0$ となる．同様にして $[\phi(\lambda a) - \lambda\phi(a)]x = 0$ が成り立つことも分かる．$x \in A$ は任意で，しかも A は without order であったから $\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a)$ でなければならない．$\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A$ は任意だったので ϕ が homogeneous であることが示された．

以上で ϕ が multiplier であることを証明する準備が整った．いま示したように ϕ は homogeneous であるから $\phi(n^s a) = n^s\phi(a)$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．つまり $\phi(a) =$

$n^{-s}\phi(n^s a)$ である．先程も用いたように $s(p-1)<0$ であるから任意の $a,b\in A$ に対して

$$\begin{aligned}\|a\phi(b)-\phi(a)b\| &= n^{-s}\|(n^s a)\phi(b)-\phi(n^s a)b\| \\ &\leq n^{-s}\varepsilon\|n^s a\|^p\,\|b\|^p = n^{s(p-1)}\varepsilon\|a\|^p\,\|b\|^p \\ &\to 0 \quad \text{as } n\to\infty\end{aligned}$$

よって $a\phi(b)=\phi(a)b$ となり ϕ が multiplier であることが示された． ■

定理では，A に without order を仮定したが，最も自然と思われる $p=1$ の場合を除外している．それでは $p=1$ のときも定理と同様の結果が成り立つだろうか．この場合は，次の例が示すように，定理のような強い結果は一般には成り立たない．

例 2 任意の $\varepsilon>0$ に対して multiplier ではない関数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ で

$$|z_1 f(z_2)-f(z_1)z_2|\leq\varepsilon|z_1|\,|z_2| \qquad (\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}) \tag{3}$$

をみたすものが存在する．実際 $\varepsilon>0$ を任意にとり固定する．関数 $t\mapsto e^{it}$ の連続性により $|t|<2\pi(1-\delta)\Rightarrow|e^{it}-1|<\varepsilon$ となる $0<\delta<1$ が存在する．この δ に対して $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を以下で定義する：

$$f(z)=\begin{cases}0 & z=0\\ |z|e^{i\delta\theta} & z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\end{cases}$$

ここに $\theta\in[0,2\pi)$ は z の偏角である．このとき f は (3) をみたすことが次のようにして分かる．$z_1=0$ または $z_2=0$ の場合は自明であるから，$z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の場合を考える．もしも $z_j=|z_j|e^{i\theta_j}$ $(j=1,2)$ と書けていれば

$$|z_1 f(z_2)-f(z_1)z_2|=|z_1|\,|z_2|\,|e^{i(1-\delta)(\theta_1-\theta_2)}-1|$$

である．ここで $|\theta_1 - \theta_2| < 2\pi$ であるから δ の定め方より

$$|z_1 f(z_2) - f(z_1) z_2| \leq \varepsilon\, |z_1|\, |z_2|,$$

でなければならない．つまり f は (3) をみたす．また f は multiplier ではない．実際 $z_1 = 1$, $z_2 = i$ とすれば

$$z_1 f(z_2) = f(i) = e^{i\pi\delta/2} \neq i = f(1) i = f(z_1) z_2$$

であるから．

このように Banach 環にある自然な条件を仮定すれば，近似的 multiplier が存在するのは $p = 1$ の場合に限られる．例 2 の近似的 multiplier を見ても分かるように，これらは真の multiplier から大きくかけ離れているわけではなく，むしろ multiplier に非常に近く見える．実際，次が成り立っている．

注意 1 A を単位元をもつ可換 Banach 環とし，$\varepsilon \geq 0$ とする．このとき $\phi\colon A \to A$ が

$$\|a\phi(b) - \phi(a)b\| \leq \varepsilon\, \|a\| \|b\| \qquad (\forall a \in A)$$

をみたせば

$$\|\phi(a) - T(a)\| \leq \varepsilon\, \|a\| \qquad (\forall a \in A) \tag{4}$$

となる A 上の multiplier$T$ が存在する．実際 (4) において $b = e$ とすれば，任意の $a \in A$ に対して

$$\|a\phi(e) - \phi(a)\| \leq \varepsilon \|a\|$$

が成り立つから $T(a) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(e)a$ $(a \in A)$ とすればよい．

参考文献

[1] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431-434.

[2] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222-224.

[3] R. Larsen, *Introduction to the theory of multipliers*, Springer-Verlag (1971).

[4] Th. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.

[5] Th. M. Rassias and P. Šemrl, *On the behavior of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 989-993.

[6] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York-London, 1960.