

WEAK AND STRONG CONVERGENCE OF IMPLICIT
ITERATIONS FOR FAMILIES OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN
BANACH SPACES

芝浦工業大学 厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

Department of Mathematics,
Shibaura Institute of Technology

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときであり, $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す.

T を Banach 空間の空でない閉凸部分集合 C から C への nonexpansive mapping とする. u を C の元とし, t を $0 < t < 1$ の任意の実数とする. 任意の $x \in C$ に対して

$$T_t x = tu + (1 - t)Tx$$

で定義される C 上の縮小写像 T_t は唯一の不動点 x_t を持つ. Browder [6] は Hilbert 空間において, $t \rightarrow 0$ のときにこの $\{x_t\}$ が不動点に強収束することを証明した. Takahashi and Ueda [21] は Browder [6] の定理におけるこの $\{x_t\}$ の収束について Banach 空間で研究した. そして一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間において, $k \rightarrow 0$ のときに次の点列 x_k が T の不動点に強収束することを証明した ([13] も参照):

$$x_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Tx_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

ここで x は C の元とする. 一方, Xu and Ori [22] は有限個の写像 T_1, T_2, \dots, T_r に対して次の implicit iterative process を Hilbert 空間において研究した: $x = x_0 \in C$ とし,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n)T_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $T_n = T_{n+r}$ とする. そして (2) で定義される点列の弱収束定理を Hilbert 空間において証明した. Sun, He and Ni [18] は (2) で定義される点列を研究し, 一様凸な Banach 空間において, 写像族 T_1, T_2, \dots, T_r の中で semicompact となる写像 T_i が存在するという仮定のもとで強収束定理を証明した.

本論文では, [16, 18, 22] の考えを用いて, 2つの可換な nonexpansive mappings に対して implicit iterative process を導入し, nonexpansive mappings に対する弱収束定理を一

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47H09, 49M05.

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, weak convergence, strong convergence, iteration.

様凸で Opial 条件をみたす Banach 空間において証明する. また, 写像が *semicompact* であるという仮定のもとに, この *implicit iterative process* の強収束定理も示す ([1, 2, 8, 14, 15] も参照). *one-parameter nonexpansive semigroup* に対する弱収束定理と強収束定理も与える. さらにそれらを一般化した (*general*) *semigroup* をパラメタとする *nonexpansive mappings* の半群に対する *iterative process* を導入する. Banach 空間においてその半群の共通不動点への弱収束定理と強収束定理も得られたので報告する. 最後にこれの応用についても述べる.

2. 準備

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \rightarrow x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. \mathbb{R} と \mathbb{R}^+ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに \mathbb{N} はすべての正整数からなる集合を表す.

C 上の写像 T が *compact* であるとは T が連続であり, かつ有界な集合を相対コンパクト集合に写すときであると定義される. C 上の写像 T が $\xi \in C$ で *demicompact* であるとは, $y_n - Ty_n \rightarrow \xi$ をみたす C の任意の有界な点列 $\{y_n\}$ に対して, $y_{n_k} \rightarrow y$ かつ $y - Ty = \xi$ をみたす $\{y_n\}$ の部分点列 $\{y_{n_k}\}$ と $y \in C$ がとれるときという. 特に連続写像 T が 0 で *demicompact* であるとは, $y_n - Ty_n \rightarrow 0$ をみたす C の任意の有界点列 $\{y_n\}$ に対して, $y_{n_k} \rightarrow y$ をみたす $\{y_n\}$ の部分点列 $\{y_{n_k}\}$ と $y \in C$ がとれるときである. また, T が連続でかつ 0 で *demicompact* であるとき, T は *semicompact* であるといわれる ([22] 参照). 写像 T が C で *demicompact* であるとは, C 上の任意の点 ξ において *demicompact* になっていることであると定義される. T が C で *compact* であれば T は C で *demicompact* になることが知られている. *demicompact* 写像の例については [2, 1, 14, 15] を参照.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x + y\|/2 < 1$ が成立するときをいう. 狭義凸な Banach 空間 E では, 任意の $x, y \in E, \lambda \in (0, 1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1 - \lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる.

$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする. Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ をみたす $x, y \in B_1$ について $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである. 一様凸な Banach 空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ をみたす E の点列 $\{x_n\}$ と $x \in C$ について

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するときという ([12]). 回帰的な Banach 空間においては, この条件は $w\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha} = x$ をみたす E の net $\{x_{\alpha}\}$ と $x \in C$ について

$$\lim_{\alpha} \|x_{\alpha} - x\| < \lim_{\alpha} \|x_{\alpha} - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件と同値である ([4] 参照). もし双対写像 $x \mapsto \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ が弱点列的連続であるならば, E は Opial 条件をみたす. すべての Hilbert 空間は Opial 条件をみたすし, $1 < p < \infty$ のときの空間 ℓ^p は Opial 条件をみたす ([10, 12] 参照). $p \neq 2$ のときの L^p 空間は通常 Opial 条件をみたさないが, 任意の可分な Banach 空間は Opial 条件をみたすようにリノルミング可能である (see [7, 12]).

3. NONEXPANSIVE MAPPINGS に対する収束定理

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, T, U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. この節では, nonexpansive mappings に対して (3) で定義される点列 $\{x_n\}$ を考え, この点列の弱収束および強収束について考察する.

3.1. 補題.

nonexpansive mappings T と U の共通不動点への弱収束定理 (Theorem 3.4) や強収束定理 (Theorem 3.5) を示す前に, その証明に用いられる補題を与えておく.

Lemma 3.1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, T と U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (3) で定義される点列とする. このとき任意の $w \in F(U) \cap F(T)$ に対して $\|x_{n+1} - w\| \leq \|x_n - w\|$ が成立し, さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - w\|$ が存在する.

次の補題は [3] で証明されているが, この論文で重要な役割を担う.

Lemma 3.2 ([3]). C を一様凸な Banach 空間の空でない閉凸部分集合とし, T と U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でない

とする. このとき任意の $r > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in C \cap B_r} \left\| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j y - T \left(\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j y \right) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in C \cap B_r} \left\| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j y - U \left(\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j y \right) \right\| = 0 \end{aligned}$$

が成立する.

次の補題は Theorems 3.4, 3.5 の証明の中で本質的である.

Lemma 3.3. E を一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, T と U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (3) で定義される点列とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Ux_n\| = 0.$$

が成立する.

3.2. nonexpansive mappings に対する収束定理. 以上の補題を用いて, 2つの可換な nonexpansive mappings に対する弱収束定理および強収束定理を証明できる. さらにそれらと同様の考えで可換な有限個の nonexpansive mappings に対する弱収束定理と強収束定理を証明できる.

Theorem 3.4. E を一様凸で Opial 条件を満たす Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, T と U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^n T^i U^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき $\{x_n\}$ は T と U の共通不動点に弱収束する.

一方, 次の強収束定理も証明できる.

Theorem 3.5. E を一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, T と U は C から C への nonexpansive mappings で $TU = UT$ であり, $F(T) \cap F(U)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (3.4) で定義される点列とする. このとき S か U いずれかが semicompact であれば, $\{x_n\}$ は T と U の共通不動点に強収束する.

4. ONE-PARAMETOR NONEXPANSIVE SEMIGROUP に対する定理

この節では, one-parametor nonexpansive semigroup に対する弱収束および強収束定理を与える.

Banach 空間の閉凸部分集合 C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ が次の (i),(ii),(iii) をみたすとき, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor nonexpansive semigroup であるという.

- (i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する;
- (ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する;
- (iii) 任意の $x \in C$ に対して, $s \mapsto T(s)x$ は連続である;
- (iv) $T(0)x = x$ が任意の $x \in C$ に対して成立する.

定理 3.4 の考えを用いて次の定理を証明できる.

Theorem 4.1. E を一様凸で Opial 条件をみたす Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor nonexpansive semigroup で $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とし, $\{t_n\}$ は $t_n \rightarrow \infty$ をみたす正数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x_n ds, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に弱収束する.

定理 3.5 の考えを用いて次の定理を証明できる.

Theorem 4.2. E を一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor nonexpansive semigroup で $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とし, $\{t_n\}$ は $t_n \rightarrow \infty$ をみたす正数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (4.1) で定義される点列とする. このとき semicompact となる $T(s) \in \mathcal{S}$ が存在すれば, $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に強収束する.

5. NONEXPANSIVE SEMIGROUP に対する収束定理

この節では, Theorems 3.4, 4.1 および Theorems 3.5, 4.2, の考えをもとに, それら各々を一般化した nonexpansive semigroup に対する弱収束定理と強収束定理を示す.

5.1. 補題. 以後 S を (general) semigroup とする. Banach 空間の閉凸部分集合 C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup であるという.

- (i) $T(st) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;
- (ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する.

$F(S)$ は $T(s), s \in S$ の共通不動点, すなわち $F(S) = \bigcap_{s \in S} F(T(s))$ を表す.

以後, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする. また, X は $B(S)$ の部分空間を表す. $\mu \in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ は $\mu_t(f(t))$ とかくこともある. X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean といわれる. 任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $l_s f \in B(S)$ を

$$(l_s f)(t) = f(st), \quad t \in S$$

で定義する. また l_s^* で l_s の共役作用素を表す. さらに X は l_s -invariant であるとする, つまり任意の $f \in X$ に対して $l_s f \in X$ がすべての $s \in S$ に対して成り立つとする. このとき任意の $s \in S$ と $f \in X$ に対して $\mu(l_s f) = \mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は left invariant という. X 上の mean の点列 $\{\mu_n\}$ が任意の $s \in S$ に対して $\|\mu_n - l_s^* \mu_n\| \rightarrow 0$ をみたすとき, *strongly left regular* であるという. S が可換なときは, *strongly left regular sequence* は *strongly regular* とよばれる ([9, 11] 参照).

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $S = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(S) \neq \emptyset$ をみたすとする. さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する. X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle \in X$ が X の元であるものとする. このとき X 上の任意の mean μ と任意の $x \in C$ に対して $\langle T_\mu x, y \rangle = \mu_s \langle T(s)x, y \rangle$ が任意の $y \in E^*$ について成立する C の元 $T_\mu x$ が唯一存在する ([9, 19]). また, T_μ は C から C への nonexpansive mapping になることや $x \in F(S)$ に対して $T_\mu x = x$ が成立することも知られている.

この論文の主定理である, nonexpansive semigroup の共通不動点への弱収束定理 (Theorem 5.4) および強収束定理 (Theorem 5.5) を示す前に, それらの証明に用いられる補題を与えておく.

Lemma 5.1 ([5]). C を Banach 空間 E の空でない弱コンパクト凸部分集合とし, $S = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元であるとする. さらに $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で *strongly left regular* であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_{\mu_n} x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3)$$

で定義される点列とする. このとき任意の $w \in F(S)$ に対して $\|x_{n+1} - w\| \leq \|x_n - w\|$ が成立し, さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - w\|$ が存在する.

次の補題は [17] で証明されているが, この論文で重要な役割を担う.

Lemma 5.2 ([17]). C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して l_s -invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. $\{\mu_n\}$ を X 上の mean の点列で strongly left regular であるものとする. このとき任意の $r > 0$ と $t \in S$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in C \cap B_r} \|T_{\mu_n} y - T(t)T_{\mu_n} y\| = 0.$$

成立する.

次の補題は主定理 (Theorems 5.4, 5.5) の証明の中で本質的である.

Lemma 5.3 ([5]). C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元であるとする. さらに $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で strongly left regular であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (3) で定義される点列とする. このとき任意の $t \in S$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0.$$

が成立する.

5.2. nonexpansive semigroup に対する弱収束定理. これらの補題を用いて Theorems 3.4, 4.1 を一般化した次の弱収束定理を得る.

Theorem 5.4 ([5]). E を一様凸で Opial 条件をみたす Banach 空間とし, S は semigroup とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元であるとする. さらに $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で strongly left regular であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_{\mu_n} x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4)$$

で定義される点列とする. このとき $\{x_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する.

5.3. nonexpansive semigroup に対する強収束定理. Theorems 3.5, 4.2 を一般化した, nonexpansive semigroup に対する強収束定理も得られる.

Theorem 5.5 ([5]). E を一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, S は semigroup とする. また, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$

は X の元であるとする. さらに $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で strongly left regular であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_{\mu_n} x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (5)$$

で定義される点列とする. このとき semicompact となる $T(s) \in \mathcal{S}$ が存在すれば, $\{x_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する.

強収束のための必要十分条件も与えておく.

Theorem 5.6 ([5]). C を Banach 空間 E の空でない弱コンパクト凸部分集合とし, \mathcal{S} は semigroup とする. また, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathcal{S}\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(\mathcal{S})$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in \mathcal{S}$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元であるとする. さらに, $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で strongly left regular であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (5) で定義される点列とする. このとき $\{x_n\}$ が $F(\mathcal{S})$ の元に強収束するための必要十分条件は $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(\mathcal{S})) = 0$ である.

Theorem 5.7 ([5]). C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, \mathcal{S} は semigroup とする. また, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathcal{S}\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(\mathcal{S})$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in \mathcal{S}$ について l_s -invariant であり, 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元であるとする. さらに $\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で strongly left regular であるとし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする.

$$\|(I - T(s))z\| \geq kd(z, F(\mathcal{S})) \quad (6)$$

が全ての $z \in C$ に対して成立する $s \in \mathcal{S}$ と $k > 0$ が存在すると仮定する. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を (5) で定義される点列とする. このとき $\{x_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する.

6. 主定理の応用

定理 5.4 から直接, 定理 3.4 や定理 4.1 が, また定理 5.5 から直接, 定理 3.5 や定理 4.2 が得られるが, その他に以下の結果も得られる ([20] 参照).

Theorem 6.1 ([5]). E を一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, T は C から C への nonexpansive mapping で $F(T)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n T^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき E が Opial 条件をみたすならば $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束し, T が semicompact であれば $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する.

Theorem 6.2 ([5]). E, C と T は Theorem 6.1 と同様とする. $\{q_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ を $q_{n,m} \geq 0$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$ をみたし, $\lim_n \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$ をみたす実数列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} T^m x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき E が Opial 条件をみたすならば $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束し, T が semicompact であれば $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する.

Theorem 6.3 ([5]). E, C は Theorem 6.1 と同様とする. $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parameter nonexpansive semigroup で $\bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} F(T(t))$ が空でないとする. $\{r_n\}$ は $r_n \rightarrow 0$ をみたす正数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) r_n \int_0^{\infty} e^{-r_n t} T(t) x_n dt \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき E が Opial 条件をみたすならば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に弱収束し, semicompact となる $T(s) \in \mathcal{S}$ が存在すれば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に強収束する.

Theorem 6.4 ([5]). E, C と $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は Theorem 6.3 と同様とする. $\{q_n\}$ を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への連続関数の列で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\int_0^{\infty} q_n(t) dt = 1$ が成立し, 任意の $t \geq 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t) = 0$ が成立し, 任意の $s > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |q_n(t+s) - q_n(t)| dt = 0$ が成立するものとする. $\{\alpha_n\}$ は $0 < \alpha_n < 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) \int_0^{\infty} q_n(t) T(t) x_n dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする. このとき E が Opial 条件をみたすならば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に弱収束し, semicompact となる $T(s) \in \mathcal{S}$ が存在すれば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} F(T(s))$ の元に強収束する.

REFERENCES

- [1] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings*, Comm. Appl. Non-linear Anal. **9** (2002), 57-68.

- [2] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp.9–16, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.
- [3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.
- [4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math., **21** (1998), 61–81.
- [5] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive semi-groups in Banach spaces*, to appear in Fixed point theory and applications.
- [6] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of non-expansive non-linear mappings in Banach spaces*, Arch. Rational. Mech. Anal. **24** (1967) 82–90.
- [7] D. Van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London. Math. Soc. **25** (1982), 139–144.
- [8] M. K. Ghosh and L. Debnath, *Convergence of Ishikawa iterates of quasi-nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **207** (1997), 96–103.
- [9] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.
- [10] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math. **40** (1972), 565–573.
- [11] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.
- [12] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.
- [13] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.
- [14] W.V. Petryshyan, *Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **14** (1966), 276–284.
- [15] W.V. Petryshyan and T.E. Williamson, *Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **43** (1973), 459–497.
- [16] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.
- [17] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semi-groups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.
- [18] Z.H.Sun, C.He and Y.Q.Ni, *Strong convergence of an implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **8** (2003), 595–602.
- [19] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.
- [20] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [21] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **104** (1984), 546–553.
- [22] H. K. Xu and R.G.Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22** (2001), 767–773.