

## 平 均 考

大阪教育大・教育 藤井 淳一 ( Jun Ichi Fujii )  
Osaka Kyoiku Univ.

山形大・工 高橋 眞映 ( Sin-Ei Takahasi )  
Yamagata Univ.

### 1. quasi-arithmetic mean

2つの正数  $a, b$  についての、いわゆる power-mean

$$M_r(a, b) = \left( \frac{a^r + b^r}{2} \right)^{1/r}$$

からはじめよう。これは良く知られているように、 $r$  の変化で、かなりの「平均」をカバーしていて、しかも単調に増加している (統一的にはじめて一般化を試みたからなのか、Cooper の定理 [2] と称するようである) :

$r$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\infty$
$M_r(a, b)$	最小 $\min(a, b)$	調和 $\frac{2ab}{a+b}$	幾何 $\sqrt{ab}$	算術 $\frac{a+b}{2}$	最大 $\max(a, b)$

ここで、 $a, b$  を素直に (可逆) 正作用素  $A, B$  に置き換えられるが、 $M_r(A, B)$  は、そのままでは久保-安藤の作用素平均 [19] にはならない。しかし久保-安藤平均の理論で言うところの adjoint \* は、「変数の逆数をとって平均した後に逆数を取って戻すもの」で、この場合にも導入可能である。すると

$$M_r^*(A, B) \equiv M_r(A^{-1}, B^{-1})^{-1} = M_{-r}(A, B)$$

という対称性が成り立ち、これらが整った平均族であることが分かる。この意味で幾何平均は「self-adjoint」である。

このように自然に作用素化できるだけでなく、容易に加重化・多変数化ができるこの型の平均は、実は、(単調性などが仮定された  $f$  について) **quasi-arithmetic mean**

$$Q_f(a, b) = f^{-1} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

と呼ばれている。もっと一般には「 $f$  を作用させた凸和を  $f^{-1}$  で戻したもの」

$$Q_{f,w}((x_k)) = f^{-1} \left( \sum_k w_k f(x_k) \right) \quad \left( w_k \geq 0, \sum_k w_k = 1 \right)$$

である。quasi-arithmetic mean の起源はよくわからないが、かなり古くから考察されていて、Hardy-Littlewood-Pólya のテキスト [14] にも（名前はないが、第 2 版では、III 章や 6.19, 20 などに）論じられているし、Math. SciNet で検索した中で最も古い 40 年代の論文 [3] で、すでに一般化が試みられている。また、伊藤-奈良 [16] によって連続版 quasi-arithmetic mean : 確率測度  $\mu$ , 単調増加関数  $f$  について

$$Q_f(g) = f^{-1} \left( \int_X f(g) d\mu \right)$$

も定められ、考察されている。さらに松本・富永 [21] は、関数を作用素  $A$  に、積分を単位的正值線型写像  $\Phi$  に置き換えて、quasi-arithmetic mean の作用素版

$$Q_{f,\Phi}(A) = f^{-1} (\Phi(f(A)))$$

として考察している。これは、行列の場合には固有値の幾何平均になる Fuglede-Kadison type [4] の（規格化）行列式 ( $\tau = \frac{1}{n} \text{Tr}$  として)

$$\Delta_\tau(A) = \exp(\tau \log A)$$

もしくは、固有値の加重幾何平均にあたる、単位ベクトル  $x$  についての行列式 [10]

$$\Delta_x = \exp \langle (\log A)x, x \rangle$$

の延長線上にある (see also [9])。  $Q_{f,\Phi}(A)$  については未知の部分が多いのでこれで留めておくが、 $\Delta_x$  は後述するカオス順序の特徴づけに利用できることにのみ触れておこう ([6])。

全体的にこれらの拡張の基礎は [14] にあり、連続化のみならず、 $\Phi$  への置き換えも示唆するように巧妙に述べてある。特に、「 $Q_{f,w}((x_k))$  は  $f$  についてアフィン変換不変

$$Q_{f,w}((x_k)) = Q_{\alpha f + \beta, w}((x_k))$$

である」とか、「homogeneous となる  $Q_{f,w}((x_k))$  の関数は  $f(x) = x^r$  に限る（アフィン変換を除く）」とかが示されている。

ここで、簡単な場合に各平均で加重による path を作ってみよう：

$$M_r(a, b)_t = ((1-t)a^r + tb^r)^{1/r}$$

加重のかけ方から、 $M_r(a, b)_0 = a$ ,  $M_r(a, b)_1 = b$  となって、 $a$  から  $b$  をつないでいて、元の平均が中央にある:  $M_r(a, b)_{1/2} = M_r(a, b)$ 。0 での微係数は、

$$\frac{1}{r}(b^r - a^r)a^{1-r}$$

特に  $r = 0$  のときに直接求めると、

$$\frac{d a^{1-t} b^t}{dt} = -a^{1-t} b^t \log a + a^{1-t} b^t \log b \quad \text{より、} \left. \frac{d a^{1-t} b^t}{dt} \right|_{t=0} = -a \log a + a \log b$$

となって、Kullback-Leibler 情報量というか、Umegaki entropy の萌芽が見えてくるし、前者の一般的な微分係数は人気の Tsallis entropy につながっている。

## 2. もう一つの平均族

しかし、上記の平均族の中に熱伝導で重要な「対数平均」(cf. [17])

$$L(a, b) = \frac{b - a}{\log b - \log a}$$

が含まれないのは、Shannon にも申し訳が立たない。この adjoint は

$$L^*(a, b) = \frac{-\log b + \log a}{1/b - 1/a} = \frac{ab(\log b - \log a)}{b - a}$$

であるので、これも含んでほしい。それを満たす族としては、

$$L_r(a, b) = \frac{r}{r-1} \frac{ab^r - ba^r}{b^r - a^r}$$

があり、Jensen の逆としての Kantorovich 不等式とのかかわりで、[23] で考察された。勿論、Ky Fan-Furuta constant と呼ばれるものと関連が深い（これについては古田テキスト [13]§3.6 を参照されたい）。また、作用素平均関係のノルム不等式を統一的に扱う試みの中 [15] でも論じられている。今度は  $r$  に関して単調減少し、0 が対数平均となる：

$r$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1/2$	$1$	$2$	$\infty$
$M_r(a, b)$	$\max(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$L(a, b)$	$\sqrt{ab}$	$L^*(a, b)$	$\frac{2ab}{a+b}$	$\min(a, b)$

adjoint という観点から見ると、上記のパラメータは対称性を欠いている。そこで、 $r$  を新たに  $\frac{1-3r}{2}$  と置きなおして整理すれば、

$$F_r(a, b) = \frac{3r-1}{3r+1} \frac{b^{\frac{3r+1}{2}} - a^{\frac{3r+1}{2}}}{b^{\frac{3r-1}{2}} - a^{\frac{3r-1}{2}}}$$

という（係数はうっとうしいが）バランス上見やすい形になるので [11] の中で利用した。（これよりさらに広いクラスとして、Mays[22] は、

$$G_{s,t}(a,b) = \frac{t b^s - a^s}{s b^t - a^t}.$$

を導入していて、この方がスッキリしているが）この場合には単調増加し、かつ対称性を保っている：

$r$	$-\infty$	$-1$	$-1/3$	$0$	$1/3$	$1$	$\infty$
$F_r(a,b)$	$\min(a,b)$	$\frac{2ab}{a+b}$	$L^*(a,b)$	$\sqrt{ab}$	$L(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\max(a,b)$

ここで、 $L(a,b) = F_{1/3}(a,b)$  であることに注意しよう。[11] では、次の Lin[20] によって示され、久保 [17] によって作用素平均まで拡張された結果；

$$\text{Lin-Kubo Theorem.} \quad \min \left\{ r \geq 0 \mid L(a,b) \leq M_r(a,b) \quad (\forall a,b > 0) \right\} = \frac{1}{3}.$$

をさらに拡張して、次の2つの平均族の一般的な関係を得た：

$$\text{Domination Theorem.} \quad \min \left\{ r \geq 0 \mid F_p(a,b) \leq M_r(a,b) \quad (\forall a,b > 0) \right\} = p.$$

話がスッキリしたのは、基本的にマイナスにして単調増加な平均族に表現しなおしたからである。元の平均も直してみると、上記の対称性を欠くがきれいな形になる：

$$L_r^-(a,b) \equiv L_{-r}(a,b) = \frac{-r}{-r-1} \frac{ab^{-r} - ba^{-r}}{b^{-r} - a^{-r}} = \frac{r}{r+1} \frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a^r - b^r} = \frac{r}{r+1} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b^r - a^r}.$$

いずれにせよ、この平均族は容易に多変数化できないし、そのまま非可換な作用素に置き換えることもできない。見かけ上のみならず、前章の Hardy-Littlewood-Pólya の結果からも、この族は一般には quasi-arithmetic mean  $Q_f(a,b)$  ではない異質な平均族であることがわかるのである。

### 3. 作用素の平均

上記の2つの平均族は、そのまま作用素を代入しても久保-安藤平均にはならない（後者では代入すら非可換では意味がない）。しかし、 $-1 \leq r \leq 1$  の範囲なら、次のようにこの意味で作用素平均にできる。まず  $a$  の方を1にした「表現関数」を考える：

$$m_r(x) \equiv M_r(1,x) = \left( \frac{1+x^r}{2} \right)^{1/r}, \quad f_r(x) \equiv F_r(1,x) = \frac{3r-1}{3r+1} \frac{x^{\frac{3r+1}{2}} - 1}{x^{\frac{3r-1}{2}} - 1}.$$

すると、これらは非負作用素単調関数となり、その結果、作用素凹関数にもなっている：

$$0 \leq A \leq B \implies 0 \leq f(A) \leq f(B), \quad f\left(\frac{C+D}{2}\right) \geq \frac{f(C)+f(D)}{2}.$$

作用素単調性を確かめるには、関数を複素関数と見直し（上半平面に解析接続でき）て、上半平面を不変にすることが同値条件と知られているから、偏角が増大しないことを確かめればよい（後者は [11] で確認済み）。したがって、作用素平均にするためには、それぞれ

$$A^{1/2}M_r(I, A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}, \quad A^{1/2}F_r(I, A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

とすればよい。このようにすると、元の関数の大小関係が、作用素の順序として、作用素平均の大小に反映される。以上のように、上記の平均族は  $-1 \leq r \leq 1$  の場合にかなり強い性質まで持っていることが分かる。

そのまま作用素に置き換えるという意味では、 $M_r(A, B)$  では自然に置き換えることができるが、この平均はどんな性質があるだろう。勿論作用素の順序としては、平均間の大小は久保-安藤平均と違って保存されない。ここで、対数を取って作用素の順序で比較する **chaotic order**（無秩序・混沌の秩序という禅問答的な用語ではなく、「カオス順序」と訳してください）を考えてみよう。 $r \leq s$  の場合（ただし局所的に考えて符号は同じとし、簡単のため両方正としておく）、作用素の順序で、 $0 < r/s \leq 1$  を指数に持つ関数の凹性について Jensen 不等式が成り立つので

$$\frac{A^r + B^r}{2} \leq \left( \frac{A^s + B^s}{2} \right)^{r/s}$$

となつて、対数の作用素単調性から

$$\log M_r(A, B) = \frac{\log \frac{A^r + B^r}{2}}{r} \leq \frac{\log \frac{A^s + B^s}{2}}{r \cdot s/r} = \frac{\log \frac{A^s + B^s}{2}}{s} = \log M_s(A, B)$$

と、 $M_r(A, B)$  は  $r$  について単調増加する族であることが分かり、Cooper 定理の chaotic 版が示せた (see also [12])。このように、実際には平均間の大小関係は Jensen の不等式がキーになっていることが多い。

ところで、平均のなかで、特に 0 では **chaotically geometric mean**

$$\exp\left(\frac{\log A + \log B}{2}\right), \quad \text{加重を付けると} \quad \exp((1-t)\log A + t\log B)$$

と呼ばれる作用素の平均になる (cf.[12])。この加重を付けたものは、また  $A$  から  $B$  への path となっているから、0 での微係数を求めてみよう。

$$\frac{d \exp((1-t)\log A + t\log B)}{dt} = (\log B - \log A) \exp((1-t)\log A + t\log B)$$

より、

$$\left. \frac{d \exp((1-t)\log A + t\log B)}{dt} \right|_{t=0} = (\log B - \log A)A$$

となって、 $-\text{Tr}$  を取れば、もはや知らない人は居ない **Umegaki entropy** に到達する。因みに久保-安藤平均型で同じことを考えると、

$$A\#_t B = \lim_{r \rightarrow 0} A^{1/2} M_r((1-t)I, tA^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}$$

という path になるが、0 での微係数はちょうど **相対作用素エントロピー** [7]

$$S(A|B) = A^{1/2} \log(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

になり [8, 17]、 $-\text{Tr}$  を取れば、Belavkin-Staszewski entropy [1] になる。作用素型の Tsallis entropy も基本的には既に [8] で導入済みである。

#### 4. 積分からできる平均

Hardy-Littlewood-Pólya も、伊藤-奈良 [16] も積分を使って連続版 quasi-arithmetic mean を考察したが、いわば「領域全体の平均」であったのに対して、Stokes の定理ばりにバウンダリの 2 数  $a, b$  の平均と見てみよう：正值の各区間で定義された確率測度族  $\mu = \{\mu^{[a,b]} | 0 < a \leq b\}$  が与えられたとき、単調な  $f$  について

$$T[\mu; f](a, b) = f^{-1} \left( \int_a^b f(x) d\mu^{[a,b]} \right).$$

と定義すれば、 $a \leq T[\mu; f](a, b) \leq b$  となり、 $a = b$  の場合には、どの測度についても  $\mu^{[a,a]} = \delta_a$  と解釈することにすれば、 $T[\mu; f](a, a) = a$  となるので、これも平均といってよい。これは 1, 2 章の平均族を統一的に見ようとする試みで、Lebesgue 測度  $m$  に対応する測度は、 $m^{[a,b]} = \frac{m}{b-a}$  となり、関数を  $f(x) = x^r$  とすれば、

$$T[m; x^r](a, b) = \left( \int_a^b x^r dm^{[a,b]} \right)^{1/r} = \left( \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \right)^{1/r}$$

となって、以下のようなになる：

$r$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$-1/2$	$0$	$1$	$\infty$
$T[m, x^r](a, b)$	$\min(a, b)$	$\sqrt{ab}$	$L(a, b)$	$\left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$	$\frac{b^{\frac{b}{b-a}} a^{\frac{a}{a-b}}}{e}$	$\frac{a+b}{2}$	$\max(a, b)$

(ここで  $r = 0$  の場合の平均は少し見慣れないが、**identric mean** として知られている。) この族は  $L_r(a, b)$  に似通ってはいるが、調和平均も  $L^*(a, b)$  も含まれていない。同じ関数で両端の Dirac 測度  $\delta_x$  の平均  $\mu_\delta^{[a,b]} = \frac{\delta_a + \delta_b}{2}$  を考えると、

$$T[\mu_\delta; x^r](a, b) = \left( \int_a^b x^r d\mu_\delta^{[a,b]} \right)^{1/r} = \left( \frac{b^r + a^r}{2} \right)^{1/r} = M_r(a, b)$$

と見事に一致し、調和平均が入ってくる。しかし  $L^*(a, b)$  は当然入らない。これは前述のように adjoint \* という概念と上記の定め方が余りマッチしていないからで、

$$T^*[\mu; f](a, b) = (T[\mu; f](1/b, 1/a))^{-1} = \left( f^{-1} \left( \int_{1/b}^{1/a} f(x) d\mu^{[1/b, 1/a]} \right) \right)^{-1}$$

が形式上なじまないのが原因であろう。そこで、測度の方で  $r$  を含むようにしてやり、 $f(x) = x$  としてみよう。測度  $x^{r-1} dx$  を確率測度にするために、 $d\mu_r^{[a, b]}(x) = \frac{r}{b^r - a^r} x^{r-1} dx$  とすると、

$$T[\mu_r; x] = \frac{r}{b^r - a^r} \int_a^b x^r dx = \frac{r}{b^r - a^r} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} = L_r^-(a, b)$$

となつて見事にもう一方が出てくる。さらにこれが包括的な平均である傍証として、あまり見かけない **exponential mean** と呼ばれる次の平均も、 $e^x dx$  に対応する測度族  $d\mu_e^{[a, b]}(x) = \frac{e^x}{e^b - e^a} dx$  について (部分積分を使って) 導くことができる:

$$T[\mu_e; x](a, b) = \frac{(b-1)e^b - (a-1)e^a}{e^b - e^a}.$$

この族の単調性について最後に触れよう。前章で単調性と凹性の連動に言及したが、この平均族でも関数を変えたとき、 $M[\mu; f](a, b) \leq M[\mu; g](a, b)$  となるためには、古典的な Jensen 不等式より、次のいずれかが成立すればよいことがわかる:

- |                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (i) $g$ が単調増加で、 $g \circ f^{-1}$ が凸  | (i') $g$ が単調減少で、 $g \circ f^{-1}$ が凹  |
| (ii) $f$ が単調増加で、 $f \circ g^{-1}$ が凹 | (ii') $f$ が単調減少で、 $f \circ g^{-1}$ が凸 |

## おわりに

最初にお断りすべきでしたが、この講究録の原稿は高橋眞映先生単独で講演された内容に基づき、興味を持った第一著者が相互の discussion を経て記録したもので、この「おわりに」のみ個人的な文章です。従来から「平均」について統一的に考察しようという試みは、数多く行われて来たに違いありません。久保-安藤の作用素平均に関わり続けて、凸関数の平均についてもこの路線で考えてみました [5]。しかし、最近特にそれでは捉えきれなくなり、「平均考」に非常に興味を持ち、この原稿を書くことになりました。初歩的な内容ながら、温故知新の精神で少しでも新しいことが見えるようにしたいというのが希望でした。( [22] に簡単なケースは  $V_f$  としてありますが) 最後の章でオリジナルな平均  $T[\mu; f](a, b)$  が出てきたと思われるので、個人的にはこれを高橋平均と呼びたいところです。

以上、平均についてあれこれ寄り道しながら述べてきましたが、高橋先生が述べたかったことも含めて、簡単なことながら簡単には述べられず、当事者ですら理解不足な点が多かったかもしれません。最後に共通の師の言葉を引用して、戒めとしたいと思います:

「世の中 evident を示すぐらい難しいことはない」 天城一

## 参考文献

- [1] V.P.Belavkin and P.Staszewski: *C\*-algebraic generalization of relative entropy and entropy*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A. **37**(1982), 51–58.
- [2] R.Cooper: *Notes on certain inequalities, II*, J. London Math. Soc. **2**(1927), 159–163.
- [3] E.L.Dodd: *The substitutive mean and certain subclasses of this general mean*, Ann. Math. Statistics **11**(1940). 163–176.
- [4] B.Fuglede and R.V.Kadison: *Determinant theory in finite factors*, Ann. of Math., **55**(1952), 520–530.
- [5] J.I.Fujii: *Kubo-Ando theory for convex functional means*, Sci. Math. Japon. **57**(2003), 351–363.
- [6] J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida: *Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio*, Sci. Math., **2**(1999), 63–64.
- [7] J.I.Fujii and E.Kamei: *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348 .
- [8] J.I.Fujii and E.Kamei: *Interpolational paths and their derivatives*, Math. Japon., **39**(1994), 557–560.
- [9] J.I.Fujii, M.Nakamura and Y.Seo: *Operator valued determinant and Hadamard product*, Sci. Math. Japon., **60**(2004), 1–8.
- [10] J.I.Fujii and Y.Seo: *Determinant for positive operators*, Sci. Math., **1**(1998), 153–156.
- [11] J.I.Fujii and Y.Seo: *On parametrized operator means dominated by power ones*, Sci. Math., **1**(1998), 301–306.
- [12] M.Fujii and R.Nakamoto: *A geometric mean in the Furuta inequality*, Sci. Math. Japon., **55**(2002), 615–621.
- [13] T.Furuta: “Invitation to Linear Operators”, Taylor&Francis, London-New York, 2001.
- [14] G.H.Hardy, J.E.Littlewood and G.Pólya: “Inequalities”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934 (2nd ed. 1951).
- [15] F.Hiai and H.Kosaki: *Means for matrices and comparison on their norms*, Indiana Univ. Math. J., **48**(1999), 899–936.
- [16] T.Ito and C.Nara: *Quasi-arithmetic means of continuous functions*, J. Math. Soc. Japan **38**(1986), 697–720.
- [17] E.Kamei: *Paths of operators parametrized by operator means*, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.
- [18] F.Kubo: *On logarithmic operator means*, Tenth-Symp. Appl. Func. Anal., (1987), 47–60.
- [19] F.Kubo and T.Ando: *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.
- [20] T.-P.Lin: *The power mean and the logarithmic mean*, Amer. Math. Monthly, **81** (1974), 879–883.
- [21] A.Matsumoto and M.Tominaga; *Mond-Pečarić method for a mean-like transformation of operator functions*, Sci. Math. Japon., **61**(2005), 243–247.
- [22] M.E.Mays: *Functions which parametrize means*, Amer. Math. Monthly, **90** (1983), 677–683.
- [23] S.-E. Takahasi, M. Tsukada, K. Tanahashi and T. Ogiwara: *An inverse type of Jensen's inequality*, Math. Japon., **50**(1999), 85–92.