

Hele-Shaw セル中を浮上する一つの泡の ダイナミクスのシミュレーション^{*1}

東京理科大学・理工学部 牛島 健夫 (Takeo K. Ushijima)
Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science^{*2}

and

宮崎大学・工学部 矢崎 成俊 (Shigetoshi Yazaki)
Faculty of Engineering, University of Miyazaki^{*3}

概要

本研究は、川口正美研究室に於いて実験している水で満たした縦置きヘレ-ショウセルの中を浮上する泡の運動の解析を目的としている。本稿では、単純化した流体モデル方程式の導出、及びその数値実験結果の一部を報告する。

1 はじめに

1.1 実験の概要と実験結果

図1にあるような縦置きヘレ-ショウセルに水が満たされている。ヘレ-ショウセルと

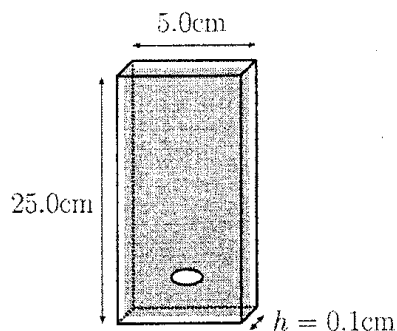


図 1: Hele-Shaw セル

は、2枚の板をそれぞれ地面に平行に近接して設置し、その隙間に液体を満たす装置で、2次元定常渦なし運動の流線の可視化のためにヘレ-ショウが考案したものである [HS1, HS2]. 本研究においては、アクリル板2枚を使ってヘレ-ショウセルを製作し、それを地面に垂直に設置する。左右側面と底面は接着し、天井は蓋をせず開けておく。底の中央に小さな穴を開け、そこから空気を注入する。川口正美研究室^{*4}においては、2平行アクリル板間

^{*1}「非線形現象の実験解析と数理解析@京都大学数理解析研究所 (2004.10.14)」講究録原稿。

^{*2}2641 Yamazaki, Noda-shi, Chiba 278-8510, JAPAN. *E-mail:* ushijima_takeo@ma.noda.tus.ac.jp

^{*3}1-1 Gakuen Kibanadai Nishi, Miyazaki 889-2192, JAPAN. *E-mail:* yazaki@cc.miyazaki-u.ac.jp

^{*4}三重大学工学部分子素材工学科

の距離を $h = 0.1\text{cm}$, アクリル板の幅と高さをそれぞれ 5.0cm , 25.0cm とした縦置きヘレシヨウセルを等温装置の中に設置している。

底面の穴より注入された一定量の体積の空気の単一の泡は、その大きさに応じてさまざまな挙動を示しつつ上昇する。図2は、泡の上昇の様子を CCD カメラにより撮影し、それを画像処理ソフトを用いて描画したものである [G]。

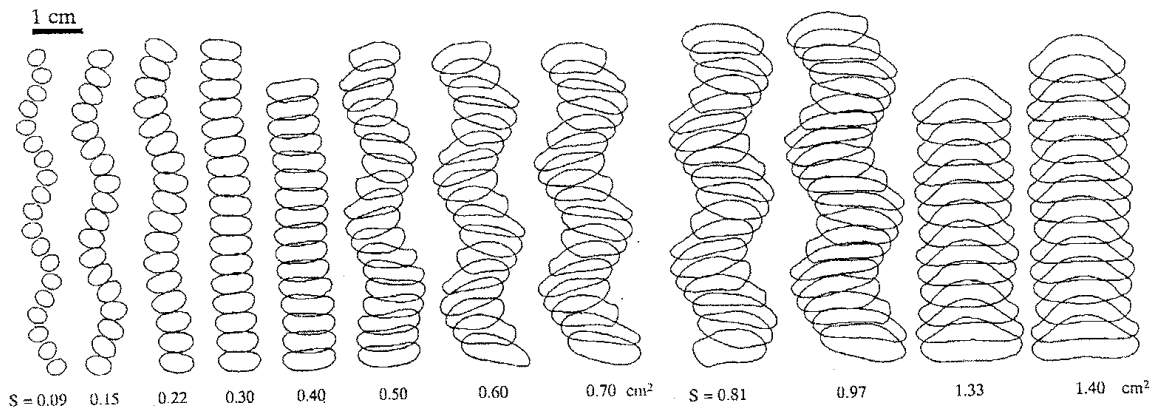


図 2: 郷 [G] より転載。泡のサイズに応じて、ほぼ一定の形状で、振動上昇と直線上昇の両方が観察される。

1.2 本研究の目的

本研究の目的は、図2にあるような泡の挙動の原理を解明することである。3次元水中を浮上する単一の気泡がジグザグ状に、あるいは螺旋状に運動することは、すでにレオナルド・ダ・ヴィンチがスケッチを残している。これは数ミリ程度の気泡、螺旋状に浮上していくこと（直線状にではなく）を指摘した最初の科学的報告といわれている [OTP, Appendix B]。泡の挙動自体は日常的に誰もが経験して知っているものであり、また泡の研究自体も格別目新しいものではない。物理実験や数値実験を含め数多くの研究がすでになされているであろうことは、流体の専門書やいくつかの論文を眺めることにより容易に想像される。例えば、泡の振動は、上昇直後に泡の後ろに発生する渦の列による作用であるという予想があるが、それを裏切らない実験解析もなされているし、泡の挙動をよく再現しているシミュレーションも報告されている。また、流体の領域をヘレシヨウセルの内部にとり、問題の2次元化を行った実験解析も少なくない [KW, 及び参考文献]。このように静水中を浮上する単一の気泡に関しては、かなりの研究がなされているが（乱流中、もしくは多数の気泡となるとより問題は複雑化する）、“振動”や“形状”、あるいは“体積による(?)振動の分岐”などの詳細な理解、つまり泡の挙動を制御できるほどの理解、もしくは数学的な解析による理解となるとまだ課題は残っているとよいであろう。制御できるとなると、その先には広範な医学工学的応用が待ち受けている [L]。

さて、数学的理解の難しさは、流体の基礎方程式（ナビエ・ストークス方程式）と、泡の表面の移動変形の解析の複合的な難しさに起因している。そこで我々はナビエ・ス

トークス方程式をヘレシヨウ近似などを用いて、2次元問題に帰着し、図2のような泡の挙動の原理を説明でき、逆に任意の挙動を制御できるような、できるだけ単純なモデルを提案することを目指す。また大きく分けて“振動”と“形状”を別々に再現するモデルを作り、理解を深めることを目標にする。現在、研究は道半ばであり、本稿では、モデル構築の途中段階の報告となるが、“形状”の再現を目指す単純化した流体モデル微分方程式の導出と数値実験結果の一部を紹介したい。

2 モデリング

図3のように xyz 座標系をとる。水の領域において、水の粒子の運動はナビエ・ストークス方程式

$$(NS) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

に従うものとする。ここで、 ρ は密度、 ν は動粘度、 g は重力加速度である。未知関数は、

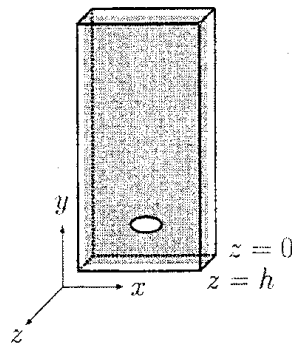


図 3: 座標系

圧力 p と、速度 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ である。速度の第3成分は0と仮定する。つまり、 z を固定するごとに xy 平面に平行な面内で流体の運動が記述されるとする。

以下、この方程式を簡略化していく。

定常ストークス近似

まず、次を要請する。

要請 I: 水の速度は非常に遅く、また定常的流れである。

定常流に対するストークス近似をすることになる。これより、(NS)の左辺が無視される：

$$(SS) \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

ヘレ-ショウ近似

次に、粘度 $\mu = \rho\nu$ を用いて、(SS)の各成分を書き下すと、

$$(SS') \quad \begin{cases} p_x - \mu \nabla^2 u = 0 \\ p_y + \rho g - \mu \nabla^2 v = 0 \\ p_z = 0 \end{cases}$$

となる。これより、圧力 p は x, y, t のみの関数であることがわかる： $p = p(x, y, t)$ 。ここで、 $p_x = \partial p / \partial x$ などは1階偏導関数である。

要請 II: 速度 u, v の z を変数とするグラフが“ $u = v = 0$ at $z = 0, h$ ”を満たす放物線を描くとする。

これより、 $a = a(x, y, t)$, $b = b(x, y, t)$ として、 u, v が変数分離型 $u = az(z - h)$, $v = bz(z - h)$ となることがわかる。これらを (SS') に代入すると、 $p = p(x, y, t)$ であることから、 $a_{xx} + a_{yy} = b_{xx} + b_{yy} = 0$ 、結局 $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ が要請され、以下を得る：

$$(SS'') \quad \begin{cases} p_x - \mu u_{zz} = 0 \\ p_y + \rho g - \mu v_{zz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{p_x}{2\mu} z(z - h) \\ v = \frac{p_y + \rho g}{2\mu} z(z - h) \end{cases}$$

ここで、 $u_{zz} = \partial^2 u / \partial z^2$ などは2階偏導関数である。

要請 III: u, v の z 方向の平均をとる。

これより、2次元平均速度ベクトルは圧力勾配と重力項で表現される：

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz = -\frac{h^2}{12\mu} p_x$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dz = -\frac{h^2}{12\mu} p_y - \frac{\rho g h^2}{12\mu}$$

以上の近似をヘレ-ショウ近似と呼ぶ*5。

*5 通常のヘレ-ショウ近似は、 $g = 0$ としたものに相当し、ダルシーの法則と呼ばれる。

2次元問題へ帰着

以上より、水の2次元速度ベクトルを得る：

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = -\frac{h^2}{12\mu} \nabla p + \frac{\rho g h^2}{12\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega_1$$

ここで、 Ω_1 は水の領域である。

また、非圧縮性の仮定 $\nabla \cdot \mathbf{v} = \bar{u}_x + \bar{v}_y = 0$ から、

$$\nabla^2 p = p_{xx} + p_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega_1$$

を得る。つまり、水の領域において圧力は調和となる。

水の領域を Ω_1 、泡の領域を Ω_2 、水と泡の境界を Γ とする (図4)。

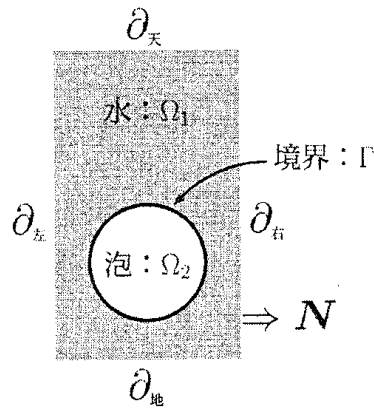


図4: 領域とセルの境界。 N は外向き法線ベクトル。

泡の内部のモデル

泡の内部についても水と同様にヘレシヨウ近似する^{*6}と、次のように2次元速度ベクトルを得る。

$$(V) \quad \mathbf{v}_i = -\frac{h^2}{12\mu_i} \nabla p_i + \frac{\rho_i g h^2}{12\mu_i} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega_i$$

ここで、添え字 $i = 1$ は水、 $i = 2$ は泡におけるそれぞれの未知関数、定数を表す。

^{*6} 空気に対して、定常ストークス近似とヘレシヨウ近似をとることは必ずしも妥当でないとも考えられる。したがって、気泡でない非圧縮性の流体を想定したモデルとなっている可能性がある。泡の圧力を一定 $p_2 \equiv p_*$ とするなり、圧縮性の速度場を想定するなり、モデルはいろいろ考えられるが、これについては今後の課題とする。

セルの境界条件

セルの境界 (図4) における条件を以下のようにする。まずセル上部の境界 $\partial_{\text{天}}$ においては、圧力は大気圧 p_a と等しいとする：

$$p_1 = p_a \text{ (大気圧)} \quad \text{on } \partial_{\text{天}}$$

次に、セルの左右と下部の境界 $\partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{地}}$ においては、外向き法線ベクトル N 方向の水の速度成分は0とする*7：

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{on } \partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{地}}$$

セルの境界は座標軸に平行であるので、この境界条件の实质は、

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad \text{on } \partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = -\rho_1 g \quad \text{on } \partial_{\text{地}}$$

である。

境界 Γ 上での条件

まず、境界 Γ 上で質量保存則を考える。 Γ 上の水から泡へ向かう法線ベクトルを \mathbf{n} とする (図5)。水 ($i=1$) と泡 ($i=2$) の法線速度は、 $V_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}$ である。界面 Γ に対する相

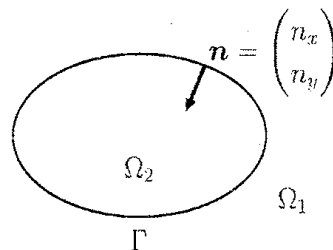


図5: 境界 Γ 上の法線ベクトル \mathbf{n} .

対速度を \hat{V}_i とする ($i=1,2$). このとき、質量保存則は、 $\rho_1 \hat{V}_1 = \rho_2 \hat{V}_2$ である。水と空気は混ざらないので、 $\rho_1 \hat{V}_1 = \rho_2 \hat{V}_2 = 0$ であるので、次の運動学的条件を得る：

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

次に境界 Γ 上で運動量保存則を考える。応力テンソルを T_i とすると、運動量流ベクトルは $\rho_i \mathbf{v}_i \hat{V}_i - T_i \mathbf{n}$ と与えられる。これより、動力的条件を得る：

$$\left[\left(\rho_i \mathbf{v}_i \hat{V}_i - T_i \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \right]_{i=1}^{i=2} = \sigma \kappa \quad \text{on } \Gamma$$

*7粘性流体を仮定しているので、粘着条件 $\mathbf{v}_1 = 0$ を課すことも考えられるが、この条件の实质は、各境界 $\partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{地}}$ で、 $\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$ かつ $\frac{\partial p_1}{\partial y} = -\rho_1 g$ の2つの条件を課すことに等しい。水に対しては未知関数は p_1 のみであるので、このままでは条件は過剰となる。この問題の処理については今後の課題である。

ここで、 $\sigma > 0$ は表面張力係数、 κ は \mathbf{n} 方向の曲率である*⁸。

さて、応力テンソル T は、

$$T = -pE + \mu \begin{pmatrix} 2\bar{u}_x & \bar{u}_y + \bar{v}_x \\ \bar{u}_y + \bar{v}_x & 2\bar{v}_y \end{pmatrix}$$

と与えられるので、速度場 (V) を代入して、

$$T_i = -p_i E - \frac{h^2}{6} \text{Hess}(p_i) \quad (i = 1, 2)$$

を得る*⁹。

以上をまとめて、条件

$$\left[p_i + \frac{h^2}{6} \text{Hess}(p_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right]_{i=1}^{i=2} = \sigma \kappa \quad \text{on } \Gamma$$

を得る。この条件は、粘性応力を無視した場合、

$$p_2 - p_1 = \sigma \kappa \quad \text{on } \Gamma$$

となる。これはラプラスの関係式と呼ばれる。

ところで、 Γ の移動速度 V は、質量保存則より、

$$V = V_1 = V_2 \quad \text{on } \Gamma$$

である。

モデル方程式

以上の議論をまとめて以下のモデル方程式を得る。未知関数は水の圧力 p_1 と泡の圧力 p_2 で、変数は x, y, t である。

- (1) $\nabla^2 p_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (i = 1, 2)$
- (2) $\left[p_i + \frac{h^2}{6} \text{Hess}(p_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right]_{i=1}^{i=2} = \sigma \kappa \quad \text{on } \Gamma$
- (3) $V_1 = V_2 \quad \text{on } \Gamma$
- (4) $V = V_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma$
- (5) $p_1 = p_a \quad \text{on } \partial_{\text{天}}$
- (6) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{on } \partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{地}}$

ここで、

$$\mathbf{v}_i = -\frac{h^2}{12\mu_i} \nabla p_i + \frac{\rho_i g h^2}{12\mu_i} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

*⁸泡が円るとき、正の符号をとる。

*⁹ $\text{Hess}(p) = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{pmatrix}$ はヘシアンと呼ばれる。

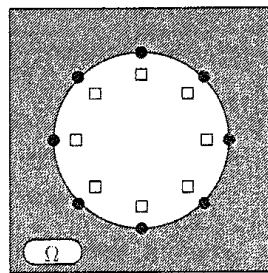
3 数値実験

3.1 数値スキーム

(1) ~ (6) を代用電荷法 (室田の不変スキーム [M])、及び境界追跡法 [K] を組み合わせて解く。代用電荷法においては、領域 Ω において調和な関数 p を以下のような基本解 $-\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ($\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \mathbf{y} \notin \bar{\Omega}$) の重ね合わせで近似する：

$$(CSM) \quad \begin{cases} \tilde{p}(\mathbf{x}) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N Q_k \log |\mathbf{x} - \mathbf{c}_k| & (\mathbf{x} \in \bar{\Omega}) \\ \sum_{k=1}^N Q_k = 0 \end{cases}$$

例えば、図6のように、 Ω が円の外部領域であった場合、境界を N 点の多角形で近似し、そこに拘束点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ を配置する。そして円の内部 (つまり $\bar{\Omega}$ の外部) に仮想電荷点 \mathbf{c}_k を



- 拘束点 : $\mathbf{x}_j \in \partial\Omega$ ($j = 1, \dots, N$)
- 仮想電荷点 : $\mathbf{c}_k \notin \bar{\Omega}$ ($k = 1, \dots, N$)

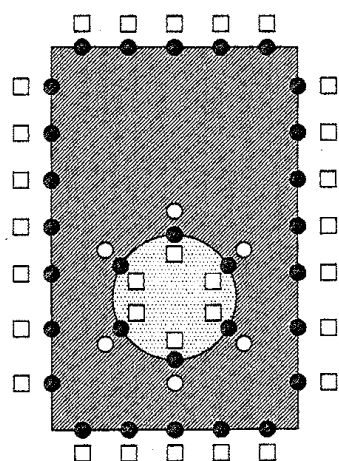
図6: 代用電荷法の拘束点と電荷点の配置の例。 Ω は円の外部領域。

配置する。領域 Ω においては、 $\nabla^2 \tilde{p} = 0$ を満たすので、各拘束点上で $\tilde{p}(\mathbf{x}_j)$ が境界条件を満たすとして、連立一次方程式 (CSM) を解き、仮想電荷 Q_0, \dots, Q_N を求める。

本稿で使用した数値スキームには以下に述べるような利点がある。代用電荷法においては、領域で解かない (つまり領域をメッシュで切る必要がない) ことに計算コストの利点があり、また、導関数 $\nabla p, \text{Hess}(p)$ の計算には、 $\nabla \tilde{p}, \text{Hess}(\tilde{p})$ を直接計算すればよいので近似計算が不要であることに大きな特徴が見出される^{*10}。そして、境界追跡法 [K] は、等間隔に配置しながら近似点を移動させるので、点の集積をさけることができる。

水の領域における未知圧力関数 p_1 を近似するために、セルの境界 $\partial_{\text{天}}, \partial_{\text{底}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{左}}$ と界面 Γ 上に拘束点を配置し、セルの外部と泡の内部に電荷点を配置した。また、泡の領域における未知圧力関数 p_2 を近似するために、界面 Γ 上に拘束点を配置し、水の領域に電荷点を配置した。電荷点はセルの境界、及び界面に沿うように配置した (図7)。詳しくは、初期楕円の径を D 、セルの幅を 10 、高さを $H = 20$ とし、セルの外側にはセルの境界上の拘束点から外向き法線 \mathbf{N} 方向に $2H = 40$ 離れた点に、泡の内部には Γ 上の拘束点から法線 \mathbf{n} 方向に 10^{-4} 離れた点に、泡の外部には Γ 上の拘束点から法線 $-\mathbf{n}$ 方向に $2D$ 離れた点に、それぞれ電荷点を配置した。

^{*10}他にも利点はある。例えば、電荷点の配置に対してロバストであるとか、うまく点を配置すれば指数収束性が得られる可能性があるなど。



- 拘束点: $\mathbf{x}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j^{(2)} \in \Gamma, \mathbf{x}_j^{(1)} \in \partial_{\text{天}}, \partial_{\text{左}}, \partial_{\text{右}}, \partial_{\text{地}}$
- 水の圧力 p_1 に対する仮想電荷点: $c_k^{(1)} \notin \overline{\Omega_1}$
- 泡の圧力 p_2 に対する仮想電荷点: $c_k^{(2)} \notin \overline{\Omega_2}$

図 7: 水の圧力 p_1 に対する仮想電荷点は、セルの外部と泡の内部に、泡の圧力 p_2 に対する仮想電荷点は水の領域に配置する。 Γ 上の拘束点は水と泡で共通のものとする。上付き添え字 (i) ($i = 1, 2$) は水 (1) と泡 (2) をそれぞれ表すものとする。

3.2 数値実験結果

大中小の3種の円といくつかの楕円を初期の泡の形状とし、数値実験をおこなった。いずれも界面 Γ を 32 点の閉折れ線で近似し、セルの境界上には、30 点の拘束点を均等に配置した。15 度傾けた長径 2、短径 1 の楕円を初期の泡の形状としたシミュレーションは図 8 のようになった。円に収束している様子がみられる。より詳しくは、面積 A は保存し、

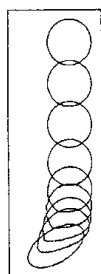


図 8: 15 度傾けた長径 2、短径 1 の楕円を初期値としたシミュレーション。

泡の重心の y 座標は一定速度で上昇し、等周比 $\frac{L^2}{4\pi A}$ (L は泡の周長) が 1 に収束する^{*11} 数値結果を得た (図 9)。

面積が保存することは方程式から導出できる:

$$\frac{d}{dt} |\Omega_2| = - \int_{\Gamma} V d\Gamma = 0.$$

^{*11} 単純閉曲線に対して、等周比は常に 1 以上である: $\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1$. これを等周不等式と呼ぶ。等周比が 1 に等しくなるのは円の場合だけである。そういう意味で、等周比 (もしくはその逆) を円形度と呼ぶこともある。等周不等式は等周問題「一定の周長のもので最大面積をもつものは何か」と深い関係にある。

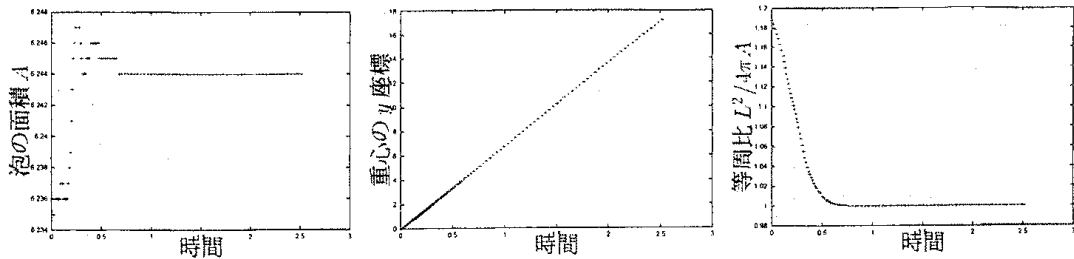


図 9: 数値実験結果：面積保存、等速上昇、円への収束。

等速上昇はどうだろうか。数値実験結果からは概ね等速上昇の様子が見て取れる（図 10）。また、面積が等しい（半径 1 の円と径比が 2 : 0.5 の楕円、及び径比が 2 : 1 の楕円と

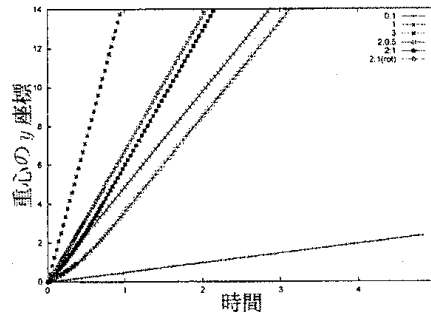


図 10: 等速上昇（初期円の半径 0.1, 1, 3, 初期楕円の径比 2 : 0.5, 2 : 1, 2 : 1(15 度傾斜)）。

傾斜楕円) もののグラフの傾き、さらに面積の増加と傾きの増加の様子から、上昇速度は面積をパラメータとした単調増加関数であることが予想される^{*12}。

4 まとめ

4.1 Q and A

講演中に出た質問・意見や他の講演中に出たそれをまとめておく^{*13}。

Q1. セルの表面の滑らかさ（傷の小ささ）と平面度（湾曲していないか）の精度はどのくらいか。

A1. セルの表面粗さは、1 ミクロン以下である。セルの加工、すなわち切断などによって加わる熱で変形する可能性もあるが、切断時には充分な放熱をしながら行っているので問題は無いと考えている。

Q2. 高分子は流れを記憶するか^{*14}。

^{*12} 比例関係かどうかは今後の課題である。

^{*13} 一部の技術的な回答は川口先生より伺ったものである。

^{*14} 川口研究室においては、高分子溶液中の泡の浮上実験も行っていることからこの質問がでた。[G] 参照。

A2. 高分子濃度が高くなると緩和時間が長くなり、記憶が残る場合もある。川口研究室の実験の場合は、高分子濃度が低く、また泡を上昇させる時間間隔を充分取っているので、記憶による影響は無いと考えている。

Q3. 泡の形をセルの隙間からみたときの凹凸の形状はどのようになっているのか。

A3. 泡が水を押し出す形で丸く凸になっていると思われるが、実際に確認してみたい。

Q4. 泡から離れた部分、セルの端の方などの流れはどうなっているのか。

A4. 可視化データはないが、流れはないと予想としている。数値計算で、流線の計算をしてみたい。

Q5. 泡を2つ入れたとき、その泡が接合することはないのか。また、上部にある小さい泡に、下部にある大きい泡が追いつくことはあるのか。

A5. 偶然だが、大きな泡が追いつき、小さな泡と合体して単一の泡になることを観察したことがある。数値計算で、小さい泡と大きい泡を上下に配置して計算してみたい。

4.2 今後の課題

本モデルは、方程式(1)~(6)から「面積保存」と「渦なし」モデルであることはすぐわかる。その他、数値実験より示唆された事柄で、数学的に示したいことを列記する：

- 等速上昇するか。
- 上昇速度は面積の単調増加関数であるか。
- 円に収束するか。
- 円は定常解（特解）か。
- ρ_1 と ρ_2 , μ_1 と μ_2 を入れ替えると、円は下降し、また、 $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_1 = \mu_2$ とすると円は動かないことを数値的に確かめた。一般の形状でもいえるか。

泡の振動には渦の影響が大きくかかわっていることが知られている。本モデルでは渦はでない。今後は、渦ありモデルの構築とともに、以下の疑問に注意しつつ、泡の振動の原因や特徴的な形状となる要因を探っていきたい。

- 泡の内部の圧力を一定としてよいか。
- 渦のないモデルでは本質的に泡の振動はおこらないのか。
- セルの境界条件は粘着条件でなくてもよいか。

謝辞

最後になりましたが、講演の機会を与えてくださいました研究集会代表の長山雅晴先生と有益な意見をいただいた聴衆の皆様に謝意を表します。

参考文献

- [HS1] Hele-Shaw, H. S., *The flow of water*, Nature **58** (1898) 34-36.
- [HS2] Hele-Shaw, H. S., *Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream-line motion under certain experimental conditions*, Trans. Instn Naval Architects **40** (1898) 21-46.
- [G] 郷伸彰, 高分子溶液中を上昇する泡のダイナミクス, 平成 14 年度・三重大学大学院・修士論文 (工学研究科・博士前期課程・分子素材工学専攻)
- [OTP] Ohl, C. D., Tijink, A. and Prosperetti, A., *The added mass of an expanding bubble*, J. Fluid Mech. **482** (2003) 271-290.
- [KW] Kelley, E. and Wu, M., *Path instabilities of rising air bubbles in a Hele-Shaw cell*, Physical review letters **79** (1997) 1265-1268.
- [L] Lohse, D., *Bubble puzzles*, Physics Today **56**(2) 2003. (訳: 家泰弘「泡の不思議、バブルの効用」パリティ **18** (2003) 34-42.)
- [M] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌 **34** (1993) 533-535.
- [K] Kimura, M., *Accurate numerical scheme for the flow by curvature*, Appl. Math. Lett. **7** (1994) 69-73.