

## 回転半球面上の西岸強化流の安定性

京都大学・数理解析研究所 谷口 由紀 (Yuki Taniguchi)  
Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

京都大学・数理解析研究所 山田 道夫 (Michio Yamada)  
Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

京都大学・大学院理学研究科 石岡 圭一 (Keiichi Ishioka)  
Graduate School of Science, Kyoto University

### 1 はじめに

地球上の大気運動や海洋の流体運動は複雑な系であるため、これらを力学的に理解するためには、まず、できる限り単純な系について基本的性質を理解し、それから、1つ1つ様々な効果を付け加えて理解していく方法をとる必要がある。こうしたときに、地球上の大気運動や海洋の流体運動の最も簡単な系として考えられるものの1つは回転半球面上の2次元流体運動である。しかしこの、回転の効果のみを取り入れた球面上の2次元流体運動が示す基本的性質についてすら、よくわかっていないのが現状である。

Williams(1978)は南北対称性や波数8対称性を課した回転半球面上2次元流体の強制乱流実験で経度方向に伸びた縞構造が出現することを示したが、その後、Yoden and Yamada(1993)は自転速度が十分に速い減衰乱流で極域に東風ジェットが形成されることや帯状の縞構造が出現することを対称性を仮定しない数値計算によって示した。この数値実験については、さらに、石岡、山田、林、余田(1998,2000)によって高解像度数値計算が行われ、その結果、減衰系で球自転角速度が速い場合の極域東風ジェットの出現が、初期条件に依存しないことや、初期エネルギーを十分小さなスケールに与えた場合に帯状縞構造が出現することを確認した。またこの間、1997年 Nozawa and Yoden が2次元強制乱流においても帯状縞構造が形成されることを示している。また、浅水系でも Cho and Polvani(1996)が減衰乱流から帯状縞構造が出現することを報告している。コンピュータの発達に伴い現実的效果を取り入れた大気大循環モデル等は1970年代から急速に発展したが、このような回転半球面上の2次元流体運動の基本的性質についての研究は、まだ約10年と歴史が浅く、その力学的機構には未知の部分が多い。

我々は、このような全球面上での結果を踏まえ、壁境界が球面乱流に及ぼす効果を明らかにするため、球面上で円形の粘着境界を持つ領域における2次元非圧縮性流体の流れパターンの形成について調べてきた。円領域の大きさや位置を変化させた一連の

数値実験から、円領域が縦半球 (半球の境界が経度線と一致) のときには、流れのパターンが東から西へと移動し、西側で流れが周期的に強くなることを見出した。また、円領域が南半球 (境界が赤道と一致) のときには、初期乱流場から南極付近に西風周極流が形成されることを見出している。この南極付近の西風周極流は、円領域の中心が南極にあれば、円領域の大きさや初期条件に依らず形成されるようである。一方、南半球で stress free 境界条件をもつ場合、(殆ど) 一様な初期乱流場に対しては東風周極流が形成される。この周極流の向きの違いは、粘着境界条件では境界における角運動量の選択的散逸、stress free 境界条件 (角運動量保存) では角運動量の緯度再分配にそれぞれ関係していると考えられる。

我々は、今までに得られた結果の中で、丸池が縦半球の場合、初期に与えた同心円状の流れのパターンが東から西へ移動し西側境界付近で周期的に流れが速くなる様子が観察されたことに着目し、海洋の風成循環を意識した2次元強制乱流運動を数値的に調べた。ここでは、Stommel による西岸強化流を念頭において、北半球で西風、南半球で東風になるような東西風強制項  $u = \frac{C}{2} \sin 2\theta$  ( $\theta$  は余緯度,  $C$  は定数) を加えて数値実験を行い、強制の強さを変えた場合の流れの安定性の変化について報告する。

## 2 数値計算法

丸池が縦半球以外の場合も念頭において、丸池の大きさと位置を任意に設定できるように、数値計算に当たっては、まず球面上の丸池の中心が球の頂点となるよう球面を回転した後、その頂点を基準とする等角写像によって丸池を平面単位円板に写し、この単位円板上で Navier-Stokes 方程式を解いた。変数変換後の単位円板上の渦度方程式は以下のようなになる (ここでは丸池の大きさが半球の場合のみを示す)。

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{(1+r^2)^2}{4r} \frac{\partial (\Psi, \Delta \Psi)}{\partial (r, \psi)} + \Omega \left\{ - (1+r^2) \sin \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left( 2 \cos \Theta - \frac{1-r^2}{r} \sin \Theta \cos \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right\} = F + \nu (\Delta + 2) \Delta \Psi.$$

ここで、 $r = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$  は半径、 $\psi$  は円板上の方位角を表し、

$$\Delta_{\text{sphere}} = \frac{(1+r^2)^2}{4} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right),$$

である。また、 $F$  は強制項を示す。この変数変換の利点は、渦度方程式の非線形項とラプラシアンが類似の形式で変換され、写像後の方程式が流体方程式に近い形になることである。丸池の境界における境界条件は no slip 条件 ( $\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$  ( $r = 1$ )) を採用し

た. 単位円板上では極座標を用いて, 角度方向にフーリエ展開

$$\Psi(r, \psi, t) = \sum_n R_n(r) e^{-in\psi},$$

を, 動径方向にはチェビシェフ多項式展開を行い選点法を用いた. このときの展開形は

$$\begin{aligned} R_0(r, t) &= (x-1)^2(x+2)a_0^{(0)}(t) + (x-1)^2(x+1)^2 \sum_{m=1}^M a_m^{(0)}(t) T_{m-1}(x), \\ R_1(r, t) &= (x-1)^2(x+1)(x+2)a_0^{(1)}(t) + (x-1)^2(x+1)^3 \sum_{m=1}^M a_m^{(1)}(t) T_{m-1}(x), \\ R_n(r, t) &= (x-1)^2(x+1)^2 \sum_{m=0}^M a_m^{(n)}(t) T_m(x), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

である. 時間積分については Crank-Nicolson 法と 2 次の Runge-Kutta 法を用い, 粘性係数と球自転角速度はそれぞれ  $\nu = 10^{-2}, \Omega = 400$  とした.

### 3 数値実験

縦半球における減衰系で初期流れ場が同心円状の流線をもつ場合について数値実験を行ったところ, 時間発展と共に南北対称の流れのパターンが東から西に移動し, 西岸において周期的に流れが速くなることが観察される. このときはロスビー波の振動のため流れのパターンが非定常で, Stommel が  $\beta$  面上で得たような定常な西岸強化流は得られない (図 1).

そこでここでは, 北半球で西風, 南半球で東風になるような強制項を加えて, 数値実験を行った. 本研究では,

$$u = \frac{C}{2} \sin 2\theta,$$

となる定常強制風を与えている ( $\theta$  は余緯度. 図 2). 定数  $C$  を変化させて数値実験を行った.

$C = 68.0$  の強制を与えたとき, 初期に静止していた流れ場は図 3 のような定常で安定な西岸強化流に落ち着く. 流れ場は, 反時計回り (北半球高緯度), 時計回り (北半球中緯度 ~ 南半球中緯度), 反時計回り (南半球高緯度) の 3 つの部分 (gyre) に分かれている. これは与えた強制関数  $u$  の *rotation* の法線方向の成分がゼロになる点が 2 つ存在するためである (Sverdrup balance). また, 2 つの反時計回りの流れ場は非線型項の影響のため対称ではない.

次に, 強制の強さを  $68.0 \leq C \leq 72$  で変化させ, 流れ場の安定性の変化を調べた. ここでは, 0.2 刻みで強制の強さ  $C$  を変化させ  $t = 90.0$  まで同様の数値実験を行い, 全エ

エネルギーの時間変化(振動振幅)から流れ場の安定性を調べた。  $t = 85.5 \sim 90.0$  における  $\langle(\text{振幅})\rangle$  と  $\langle(\text{振幅})^2\rangle$  を図4に示す。ここで  $\langle \cdot \rangle$  は時間平均を示す。この結果は、強制の強さ  $C$  が 69.5 付近で流れの安定性が変化している可能性を示唆している。  $C = 69.4$  と  $C = 69.6$  におけるエネルギーの時間変化を調べたところ、  $C = 69.6$  ではエネルギーの振動振幅がほぼ一定値を示すのに対し、  $C = 69.4$  の場合のエネルギー振動振幅はゆっくりだが単調に減少している様子が観察された(図5)。強制の強さ毎に、振幅  $A$  は指数的に変化するとしてエネルギー振幅の収束値  $a$  を、時刻  $t = 78.0, 84.0, 90.0$  の値を用いて

$$A = a + b \exp(-ct),$$

から求めたものが図6である。この結果は、  $C = 69.4$  から  $C = 69.5$  の間で解が分岐することを示している。分岐後の振幅のパラメータ依存性、及び、エネルギー変化の周期性から、この分岐はホップ分岐であると考えられる。

分岐後の流れ場の振動部分を抜き出して求めた固有関数を  $f(r, \psi), g(r, \psi)$  とする。

$$\begin{aligned} F(r, \psi, t) &= \Psi(r, \psi, t) - \langle \Psi(r, \psi, t) \rangle \\ &= \text{Re}[(f(r, \psi) + ig(r, \psi)) \exp(i\omega t)]. \end{aligned}$$

ここで  $\langle \cdot \rangle$  は時間平均を表す。強制力が  $C = 70.0$  の場合の固有関数  $f(r, \psi), g(r, \psi)$  には振幅の空間的局在が認められる(図7)ことから、この不安定は流れ場の局所不安定であると考えられる。実際、数値計算の結果から、振動部分に見られる進行波について、東西方向(東向きが正の  $x$  軸)と南北方向(北向きが正の  $y$  軸)の位相速度と群速度を求めたところ、  $(c_x, c_y) = (-4.787, 3.685), (c_{gx}, c_{gy}) = (0.2715, -6.571)$  となり、局所不安定性の発生場所は gyre の領域の北西端(北緯約 55 度の西岸付近)にあることと矛盾しない。強制力が小さいときは局所不安定性は北西端でのみ発生したが、大きな強制力では高次不安定が発生し、北西端と南西端(南緯約 75 度の西岸付近)の2箇所に振幅の極大が現れた(図8)。

次に、現在の強制風  $u$  の形を変化させた場合に、強制力の大きさの変化が局所不安定性の発生に影響を及ぼす様子を調べるため、強制風の変曲点が赤道または両極に移動するように変化させて、同様な数値実験を行った。ここでは、強制風として

$$v(p, q) = -\frac{C}{2} pq^{\frac{1}{p}} \left(\frac{pq+1}{pq}\right)^q \frac{2\theta - \pi}{\pi} \left(1 - \left(\frac{2\theta - \pi}{\pi}\right)^p\right)^q.$$

を用いた。図9は (a):  $v(2, 3.5)$ , (b):  $v(2, 2)$ , (c):  $u = \frac{C}{2} \sin 2\theta$ , (d):  $v(4, 2)$ , (e):  $v(8, 2)$ , (f):  $v(10, 2)$  の場合の  $v(p, q)$  を示す。計算結果は、東西風の変曲点が両極に移動するにつれ、局所不

安定性の発生域が西端(領域B), 北西端(領域A), 南西端(領域C)の順に変化している(ここでは3つの gyre を北からそれぞれ A,B,C とする). 東西風の変曲点が赤道から遠ざかるにつれ, 強制力の大きさを増加させた時の局所不安定性の発生域は, B, B→A, A→B, A, A→C, C→A, C, と変化する. 流線の各格子点における時系列データから, 局所不安定性の発生域は次のような特有な周波数帯で分離できることがわかった. 領域 A:4.88–6.18Hz, 領域 B:8.79–10.42Hz, 領域 C:7.49–9.44Hz. これは, 強制関数が増加するとき, 局所不安定は, 流線の各格子点における時系列データの周波数スペクトルによって分離でき, かつ, その発生域を特定することができることを示している(図10).

## 4 まとめ

回転球面上の縦半球において, 強制項を加えた場合の2次元流体運動について調べた. ここでは, 強制力の大きさを変えたときの流れ場の安定性の変化および, 強制力の形を変えたときの局所不安定性の発生域の位置について調べ, 以下の結果が得られた.

- 北半球で西風, 南半球で東風の東西風強制を与えた場合, 強制力が小さいときは, 静止していた流体から定常で安定な西岸強化の流れ場が得られる.
- 強制力が大きくなると, 西岸強化流は Hopf 分岐によって不安定化する. 更に強制力が大きくなると, 異なる場所に振幅の極大を持つ高次不安定が発生する.
- 強制風を大きくするとき現れる高次不安定は空間的にも, 周波数スペクトルでも, 分離できる.

## 5 謝辞

本研究にあたり貴重なご助言をいただきました, 岡山大の柳瀬眞一郎先生, 東京農工大の佐野理先生, 北大の林祥介先生, 京大の余田成男先生, 同じく京大の酒井敏先生, 同じく京大の竹広真一先生に深く感謝申し上げます. なお, 数値計算には京大の大型計算機 VPP800 を, またグラフには地球脳倶楽部の DCL を使用しました.

## 6 参考文献

- P. B. Rhines, 1975, "Waves and turbulence on a beta-plane", *J. Fluid Mech.*, 69 (1975), pp.417-443.

- G. P. Williams, "Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence", *J. Atmos. Sci.*, 35 (1978), pp.1399-1426.
- S. Yoden and M. Yamada, "A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *J. Atmos. Sci.*, 50 (1993), pp.631-643.
- T. Nozawa and S. Yoden, "Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere", *Phys. Fluids*, 9 (1997), pp.3834-3842.
- Y.-Y. Hayashi, K. Ishioka, M. Yamada and S. Yoden, "Emergence of circumpolar vortex in two dimensional turbulence on a rotating sphere", *Proceedings of the IUTAM/IUGG Symposium on "Developments in Geophysical Turbulence", Boulder 1998*, edited by R.M.Keer and Y.Kimura.
- S. Yoden, K. Ishioka, Y.-Y. Hayashi and M. Yamada, "A further experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *Nuovo Cimento C*, 22 (1999), pp.803-812.
- K. Ishioka, M. Yamada, Y.-Y. Hayashi and S. Yoden, "Technical approach for the design of a high-resolution spectral model on a sphere: Application to decaying turbulence", *Nonlinear Processes in Geophysics*, 7 (2000), pp.105-110.
- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Flow pattern formation in a two-dimensional flow on the rotating hemisphere bounded by the meridional line", *Proceedings of the 51st Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics*, edited by Koji Uetani, 51 (2002), pp.217-223.
- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Spontaneous formation of zonal currents in two-dimensional Navier-Stokes flow on a rotating hemisphere", submitted.
- S. Li, D.Montgomery and W.B.Jones, "Inverse, cascades of angular momentum", *J. Plasma Physics*, 56, 3 (1996), pp.615-639.
- Li, S., and D.Montgomery, "Decaying two-dimensional turbulence with rigid walls", *Physics Letters A*, 218 (1996), pp.281-291.
- Li, S., and D.Montgomery, "Two-Dimensional Turbulence with Rigid Circular Walls", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9 (1997), pp.167-181.

- K. Yamamoto, S. Yanase and R. Jiang, "Stability of the flow in a helical tube", *Fluid Dynamics Research*, 22 (1998), pp.153-170.
- S. Yanase, N. Goto and K. Yamamoto, "Dual solutions of the flow through a curved tube", *Fluid Dynamics Research*, 5 (1989), pp.191-201.
- S. Yanase and M. Mizuguchi, "Rotating magnetohydrodynamic free-shear flows. I. Linear stability analysis", *Physics of Fluids*, 13 (2001), pp.1946-1955.
- J. Y.-K. Cho and L. M. Polvani, "The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere", *Physics of Fluids*, 8 (1996), pp.1531-1552.

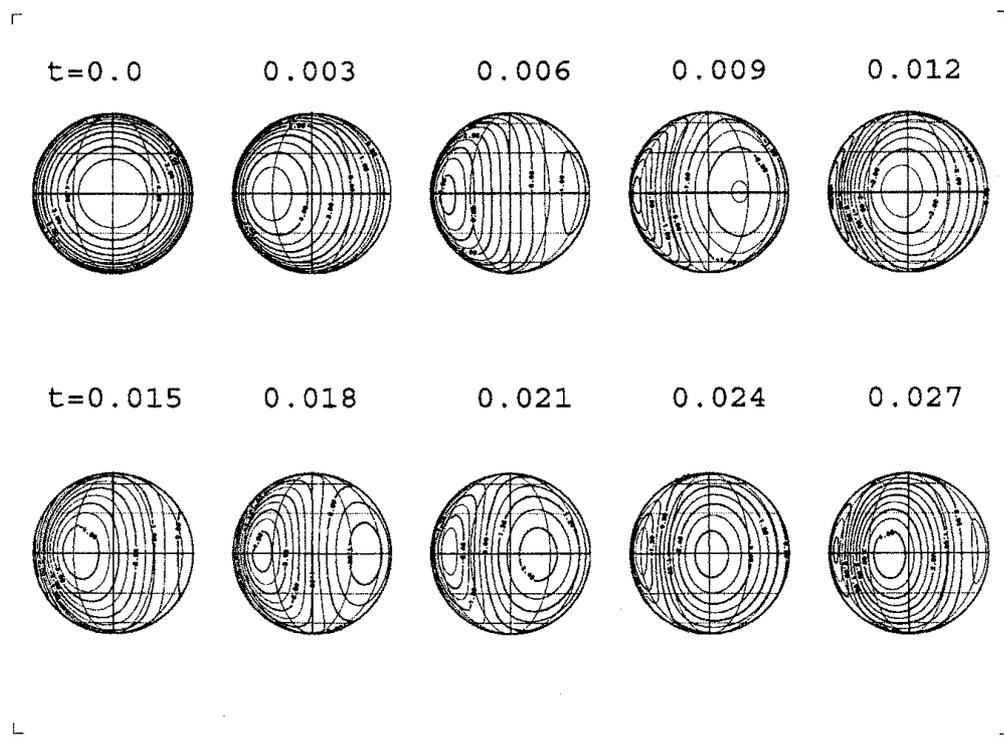


図 1:  $\Delta t = 0.003$  の流線の時間変化. 実線と破線は, 正と負の等高線を示す.

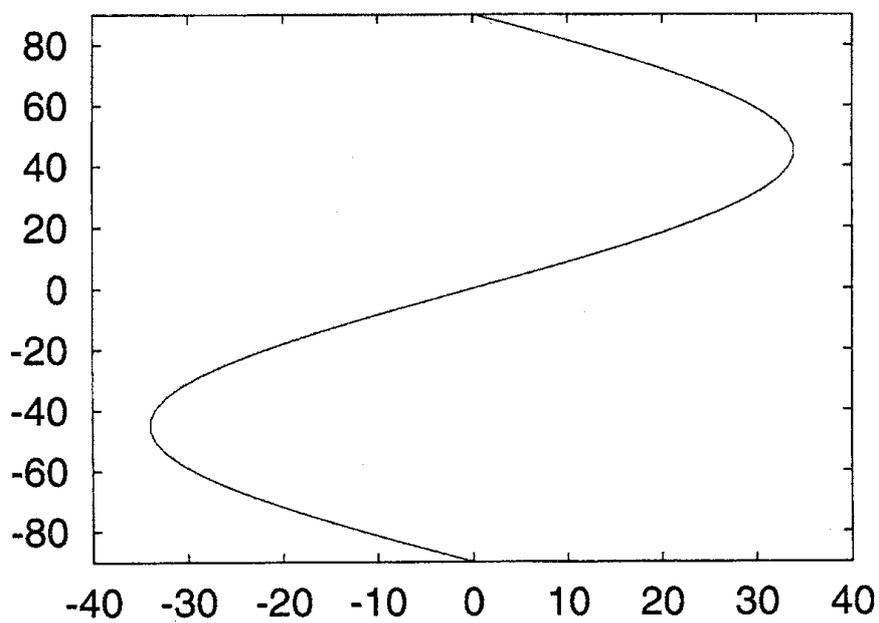


図 2: 東西風強制  $u = \frac{C}{2} \sin 2\theta$ .

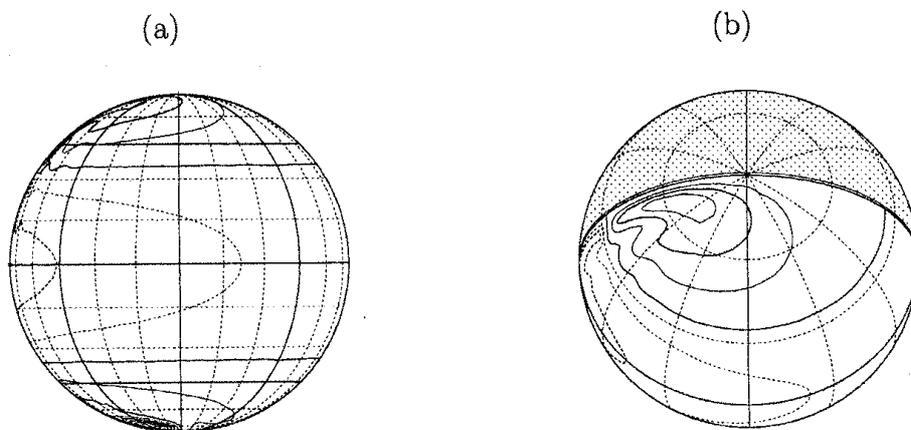


図 3:  $C = 68.0$  の強制力に対する  $t = 60.0$  の流線の等高線. (a) は赤道上空から, (b) は北極側から見た図.

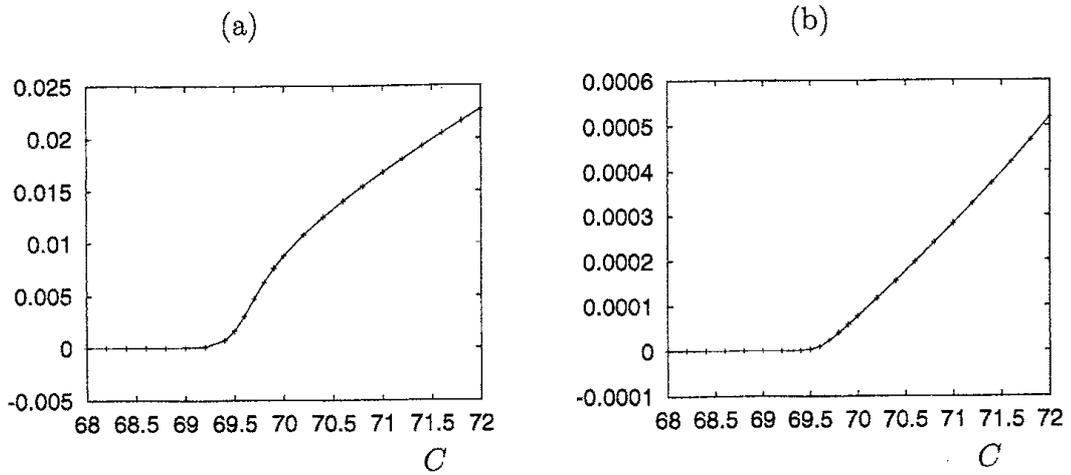


図4: 強制の強さに対し, (a) は (エネルギー振幅) の時間平均, (b) は (エネルギー振幅)<sup>2</sup> の時間平均.

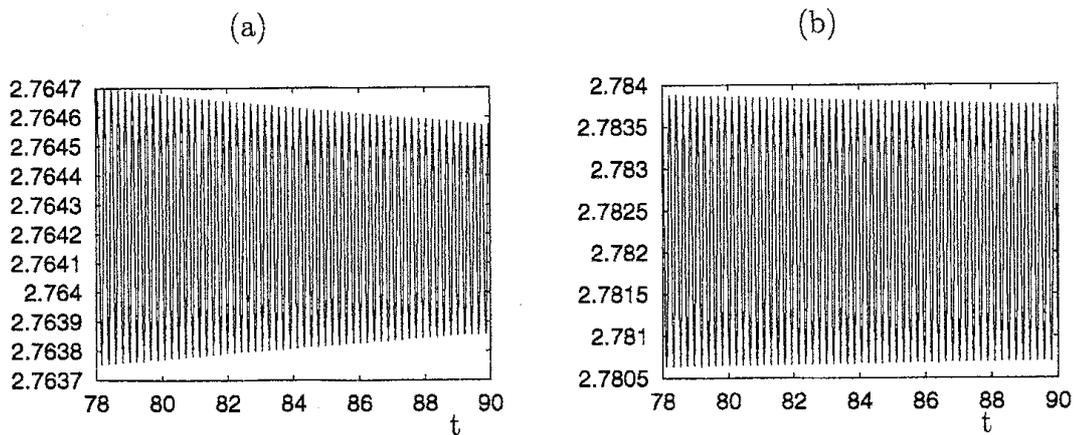


図5: エネルギーの時間変化. (a)  $C = 69.4$ , (b):  $C = 69.6$ .

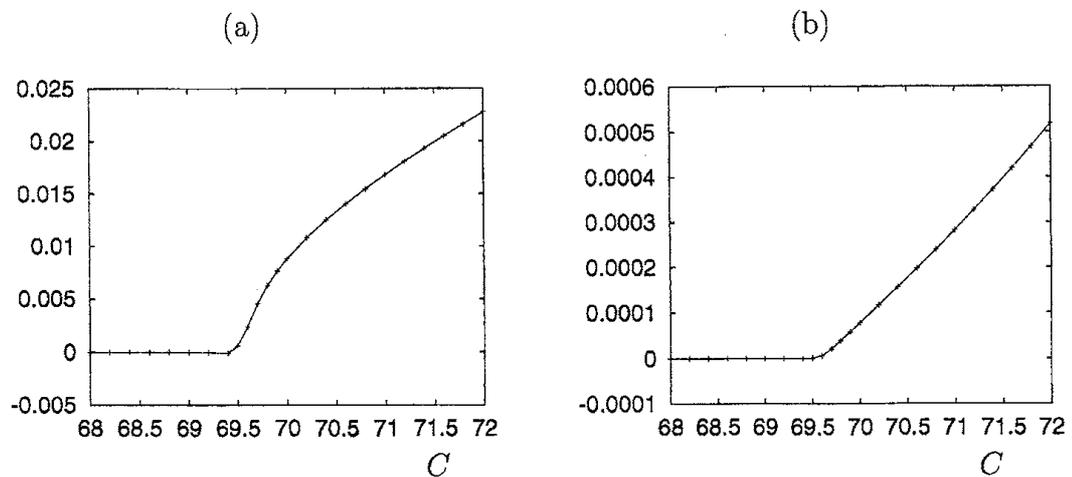


図6: エネルギー振幅の収束値. (a) は  $a$ , (b) は  $a^2$  を示す.

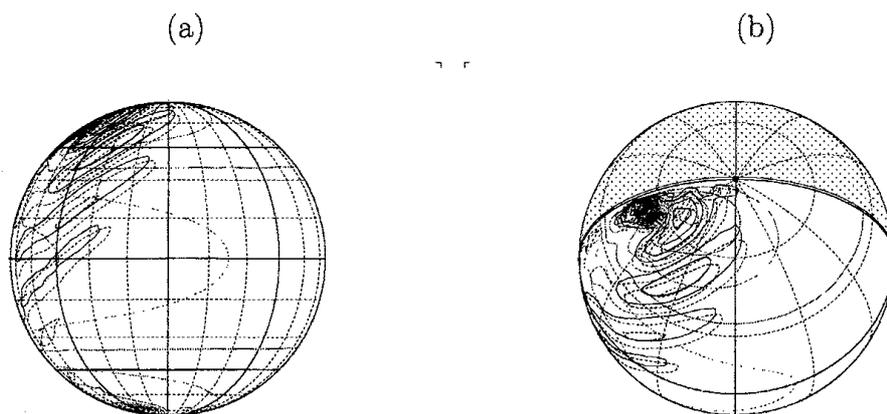


図7:  $C = 70.0, t = 84.0$ . (a): 赤道上空, (b): 北極側. 実線は  $f(r, \psi)$ , 点線は  $g(r, \psi)$ . 一点鎖線は流線.

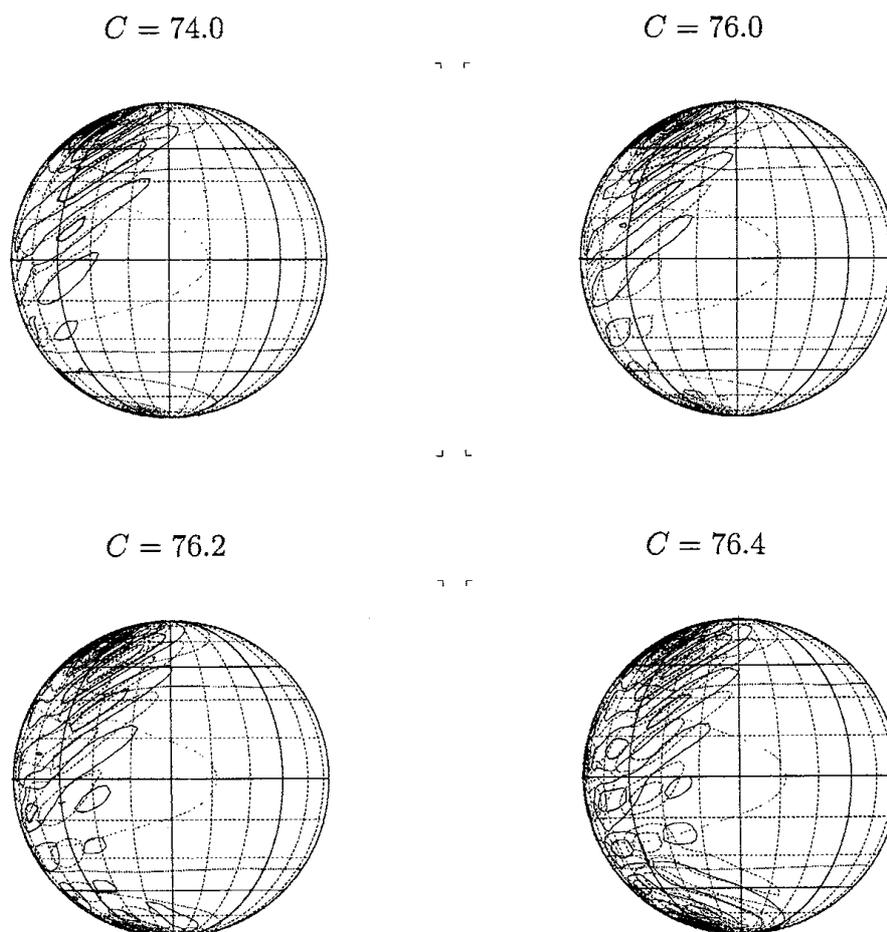


図8: 実線は  $f(r, \psi)$ , 点線は  $g(r, \psi)$ . 一点鎖線は流線.

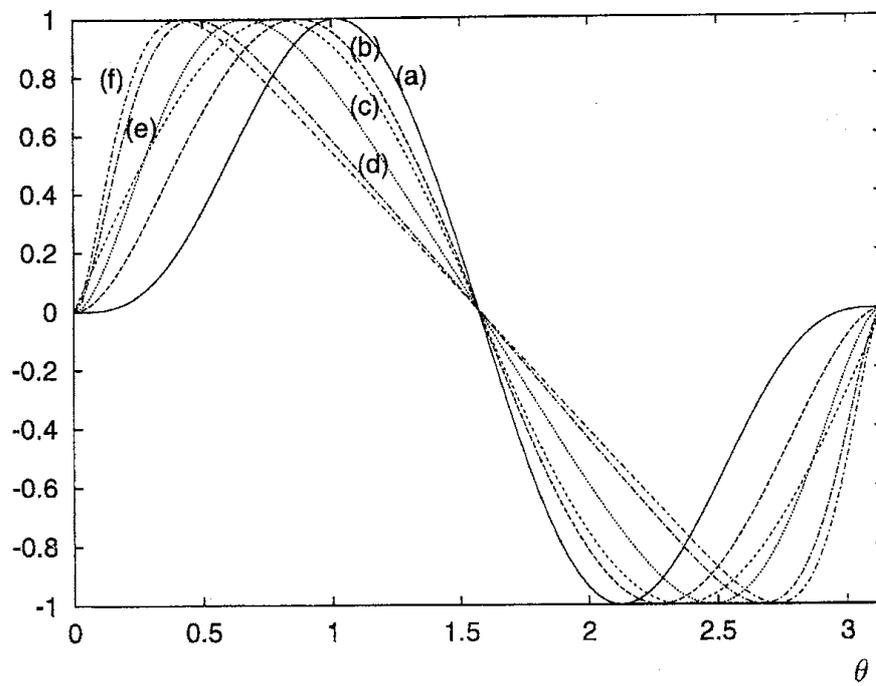


图 9: 強制関数  $v(p, q)(\theta)$ . 本文参照.

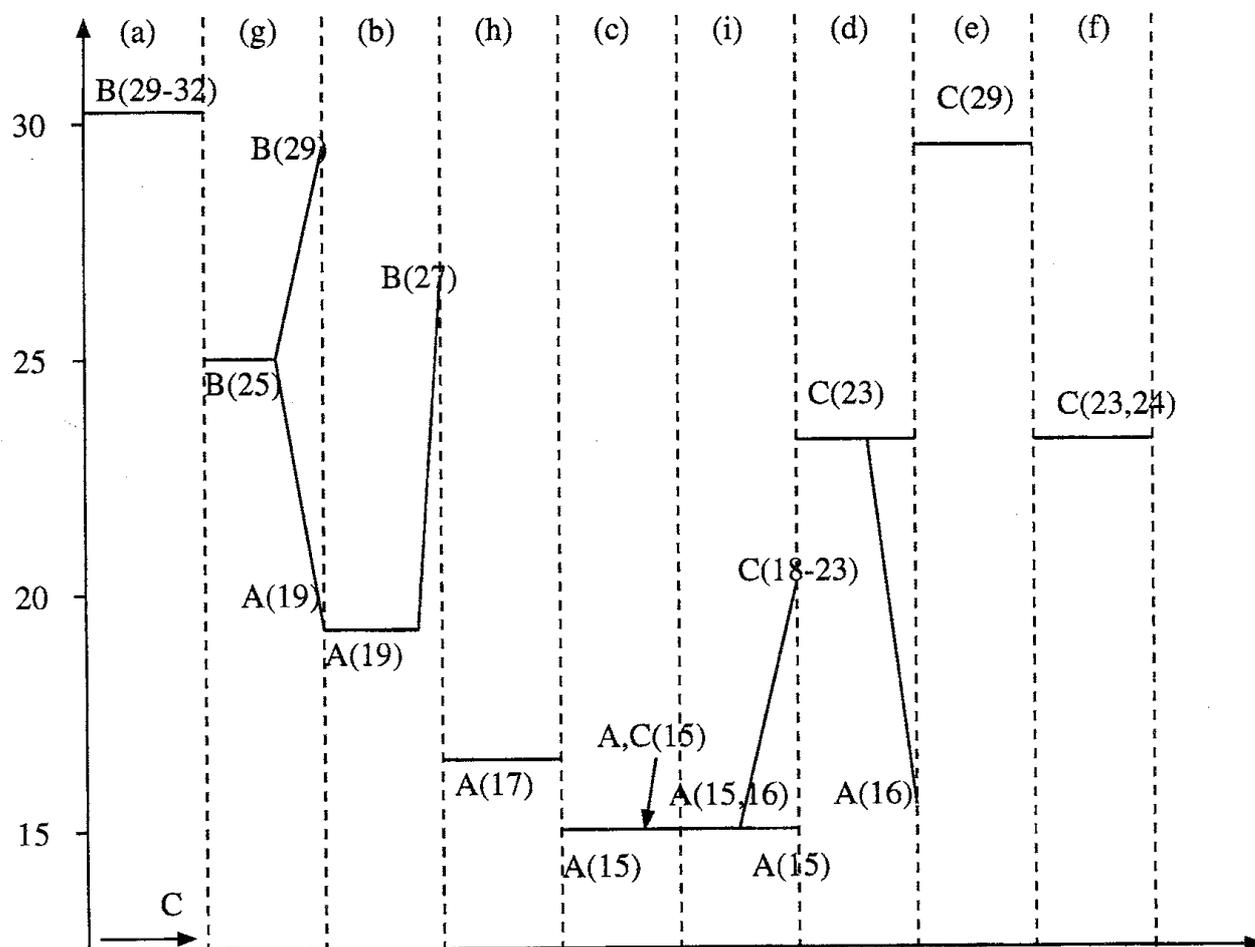
$k(\text{frequency}=k/3.072)$ 


図 10: 強制関数 (a)~(f) に対し, 強制力を増加させたときに発生する局所不安定の発生域と周波数域の変化を示す. 縦軸は周波数を示す. (a)~(f) 内で横軸の方向は強制力の増加方向を示す.