数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 128-136

ある種の Morrey 空間，amalgam 空間上での特異積分作用素の有界性

大阪教育大学大学院 教育学研究科 米田 剛 (Tsuyoshi Yoneda)
Department of Mathematics, Osaka Kyoiku University
大阪大学大学院 理学研究科 冨田 直人 (Naohito Tomita)
Department of Mathematics, Osaka University
大阪教育大学 教育学部 中井 英一 (Eiichi Nakai)
Department of Mathematics, Osaka Kyoiku University
関西学院大学 理工学部 薮田 公三 (Kôzô Yabuta)
School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University

1. 背景

$u = (u_1, \cdots, u_d) : \mathbb{R}^d \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, $p : \mathbb{R}^d \times (0,T) \to \mathbb{R}$ とする．Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + (u,\nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0 & \text{for } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{for } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

に関連して，圧力 p と速度 u との関係式

$$-\Delta p = \sum_{j,k} \partial_{x_j}\partial_{x_k} u_j u_k \tag{1.1}$$

を考える．

関数 f の Fourier 変換と Riesz 変換をそれぞれ

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,$$

$$R_j f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} c_d \int_{|y|>\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{d+1}} f(x-y)\, dy, \quad j = 1, \cdots, d$$

とする．ただし

$$c_d = \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\pi^{-\frac{d+1}{2}}$$

である．このとき

$$\mathcal{F}(R_j f)(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi), \quad j = 1, \cdots, d$$

が成り立つ．

$u = (u_1, \cdots, u_d) \in (C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d))^d$ に対して，

$$p = -\sum_{j,k} R_j R_k u_j u_k$$

とおくと，$p \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ となって (1.1) を満たす．ただし

$$C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \mathrm{supp}\, f \text{ is compact}\},$$
$$C^\infty_0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : f(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty\}$$

である．実際，(1.1) の両辺の Fourier 変換を考えると

$$|\xi|^2 \hat{p}(\xi) = -\sum_{j,k} \xi_j \xi_k \mathcal{F}(u_j u_k)(\xi).$$

すなわち

$$\hat{p}(\xi) = -\sum_{j,k} \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \mathcal{F}(u_j u_k)(\xi).$$

さらに，$2 < q < \infty$ のとき，$C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ は $L^q(\mathbb{R}^d)$ で稠密であり，また R_j は $L^{q/2}(\mathbb{R}^d)$ 上で有界作用素であるから

$$\|p\|_{L^{q/2}} \le C \sum_{j,k} \|u_j u_k\|_{L^{q/2}} \le C \sum_{j,k} (\|u_j\|_{L^q} \|u_k\|_{L^q})^{1/2}$$

が成り立つ．よって $u \in (L^q(\mathbb{R}^d))^d$ に対して $p \in L^{q/2}(\mathbb{R}^d)$ が定まり，(1.1) は超関数の意味で成り立つ．すなわち，

$$\langle p, -\Delta\phi \rangle = \sum_{j,k} \langle u_j u_k, \partial_j \partial_k \phi \rangle \quad \text{for} \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

そこで，特異積分作用素 T に対し，次の性質を持つ Banach 空間 $X \subset \mathcal{S}'$ を探したい．

$$C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d) \subset X \quad \text{dense}, \qquad T : X \to X \quad \text{bdd}.$$

この問題は，慶応大学の菊池紀夫先生からご教授いただいた．ここでは X としてある種の Morrey 空間，amalgam 空間を考えることにする．

2. 関数空間の定義

集合 G を $w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ で次の条件を満たすものの全体とする：

$$
\begin{aligned}
w(a,r) &\le c w(a,s) \quad \text{for} \quad r \le s, \\
c^{-1} \le \frac{w(a,s)}{w(a,t)} &\le c \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \le \frac{s}{t} \le 2, \\
c^{-1} \le \frac{w(a,r)}{w(b,r)} &\le c \quad \text{for} \quad |a-b| \le r, \\
\inf_{|a|\le 1} w(a,1) &> 0.
\end{aligned}
$$

$B = B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |a-x| < r\}$ に対して $w(B) = w(a,r)$, $r = r(B)$ と書くことにする．$1 \le p < \infty$, $w \in G$ に対して関数空間を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
L^{p,w}(\mathbb{R}^d) &= \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{L^{p,w}} = \sup_B \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \\
M^{p,w}(\mathbb{R}^d) &= \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{M^{p,w}} = \sup_{r(B)=1} \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \\
\widetilde{M}^{p,w}(\mathbb{R}^d) &= \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}} = \sup_{r(B)\ge 1} \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \\
M^{p,w}_0(\mathbb{R}^d) &= \left\{ f \in M^{p,w}(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{w(a,1)} \int_{B(a,1)} |f(x)|^p \, dx \to 0 \text{ as } |a| \to \infty \right\}, \\
\widetilde{M}^{p,w}_0(\mathbb{R}^d) &= \Bigg\{ f \in \widetilde{M}^{p,w}(\mathbb{R}^d) : \\
&\qquad \sup_{B \cap B(0,R) = \emptyset, r(B) \ge 1} \frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)|^p \, dx \to 0 \text{ as } R \to \infty \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

$L^{p,w}(\mathbb{R}^d)$ は一般化された Morrey 空間である．$M^{p,w}(\mathbb{R}^d)$, $\widetilde{M}^{p,w}(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間, $M^{p,w}_0(\mathbb{R}^d)$, $\widetilde{M}^{p,w}_0(\mathbb{R}^d)$ はそれぞれの閉部分空間で $C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ を稠密に含む．

数列 $a = \{a_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ に対して

$$
\|a\|_{\ell^q} = \|\{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^q} = \begin{cases} \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} |a_z|^q\right)^{1/q} & 0 < q < \infty, \\ \sup_{z\in\mathbb{Z}^d} |a_z| & q = \infty \end{cases}
$$

とおく．$\|a\|_{\ell^q} < +\infty$ であるような数列 a の全体を $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ で表す．$a = \{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ かつ $|a_z| \to 0$ $(|z| \to +\infty)$ であるような数列 a の全体

を $c_0(\mathbb{Z}^d)$ で表す.

$$Q_0 = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_i| \le 1/2,\ i = 1, \cdots, d\},$$
$$Q_z = \{x \in \mathbb{R}^d : x - z \in Q_0\} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{Z}^d$$

とし, $1 \le p, q \le \infty$ に対して amalgam 空間を

$$(L^p, \ell^q)(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) : \left\{ \|f\|_{L^p(Q_z)} \right\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^q(\mathbb{Z}^d) \right\},$$
$$(L^p, c_0)(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) : \left\{ \|f\|_{L^p(Q_z)} \right\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \in c_0(\mathbb{Z}^d) \right\}$$

と定義する. $1 \le p, q \le \infty$ のとき,

$$\|f\|_{(L^p, \ell^q)} = \left\| \left\{ \|f\|_{L^p(Q_z)} \right\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^q}$$

をノルムとして $(L^p, \ell^q)(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間になる. $1 \le p, q < \infty$ のとき, $(L^p, \ell^q)(\mathbb{R}^d)$ は $C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ を稠密に含む. また, $1 \le p < \infty$ のとき, $(L^p, c_0)(\mathbb{R}^d)$ は $(L^p, \ell^\infty)(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間であり, $C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ を稠密に含む.

$w \equiv 1$ とすると $M^{p,w}(\mathbb{R}^d) = (L^p, \ell^\infty)(\mathbb{R}^d)$, $M^{p,w}_0(\mathbb{R}^d) = (L^p, c_0)(\mathbb{R}^d)$.

Hölder の不等式により以下の命題が成り立つ.

Proposition 2.1. $1 \le p_i < \infty$, $w_i \in G$ $(i = 1, 2, 3)$ とする.

$$1/p_1 + 1/p_2 = 1/p_3, \quad w_1(B)^{1/p_1} w_2(B)^{1/p_2} \le C w_3(B)^{1/p_3} \ (r(B) = 1)$$

ならば

$$\|fg\|_{M^{p_3, w_3}} \le C \|f\|_{M^{p_1, w_1}} \|g\|_{M^{p_2, w_2}}.$$

Proposition 2.2. $1 \le p_i < \infty$, $w_i \in G$ $(i = 1, 2, 3)$ とする.

$$1/p_1 + 1/p_2 = 1/p_3, \quad w_1(B)^{1/p_1} w_2(B)^{1/p_2} \le C w_3(B)^{1/p_3} \ (r(B) \ge 1)$$

ならば

$$\|fg\|_{\widetilde{M}^{p_3, w_3}} \le C \|f\|_{\widetilde{M}^{p_1, w_1}} \|g\|_{\widetilde{M}^{p_2, w_2}}.$$

Proposition 2.3. $1 \le p_i, q_i \le \infty$ $(i = 1, 2, 3)$ とする.

$$1/p_1 + 1/p_2 = 1/p_3, \quad 1/q_1 + 1/q_2 = 1/q_3$$

ならば

$$\|fg\|_{(L^{p_3}, \ell^{q_3})} \le C \|f\|_{(L^{p_1}, \ell^{q_1})} \|g\|_{(L^{p_2}, \ell^{q_2})}.$$

3. 結果

T は核 $K(x,y)$ を持つ特異積分作用素とする．すなわち

$$|K(x,y)| \le C\frac{1}{|x-y|^d}$$

かつ $f \in C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f$$

と表現でき，$1 < p < \infty$ のとき

$$T : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{bdd.}$$

なお，R_jR_k はひとつの特異積分作用素で表すことができる．実際

$$R_jR_kf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} c_d{}' \int_{|y|>\epsilon} \frac{y_jy_k}{|y|^{d+2}} f(x-y)\,dy, \quad j \ne k,$$

$$R_j{}^2f(x) = -\frac{1}{d}f(x) + \lim_{\epsilon\to 0} c_d{}' \int_{|y|>\epsilon} \left(\frac{y_j^2}{|y|^{d+2}} - \frac{1}{d|y|^d}\right) f(x-y)\,dy.$$

ただし

$$c_d{}' = \frac{d(d-2)\Gamma((d-2)/2)}{4\pi^{d/2}}.$$

Remark 3.1. $w \equiv 1$ とすると $f \in M_0^{p,w}(\mathbb{R}^d) = (L^p, c_0)(\mathbb{R}^d)$ でかつ Tf が定義できない f が存在する．

$\Theta(x) = 1/(1+|x|)^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, とする．

Theorem 3.1. $1 < p < \infty$, $w, w^* \in G$ とする．

$$(w(\cdot,1)^{1/p} * \Theta)(a) \le Cw^*(a,1)^{1/p} \quad \textit{for} \quad a \in \mathbb{R}^d$$

ならば，

$$T : M^{p,w}(\mathbb{R}^d) \to M^{p,w^*}(\mathbb{R}^d) \quad \textit{bdd.}$$

Theorem 3.2. $1 < p < \infty$, $w \in G$ とする．

$$\int_r^\infty \frac{w(a,t)}{t^{d+1}}dt \le C\frac{w(a,r)}{r^d} \quad \textit{for} \quad a \in \mathbb{R}^d,\ r \ge 1 \tag{3.1}$$

ならば，

$$T : \widetilde{M}^{p,w}(\mathbb{R}^d) \to \widetilde{M}^{p,w}(\mathbb{R}^d) \quad \textit{bdd.}$$

Remark 3.2. (3.1) において $r \geq 1$ の代わりに $r > 0$ とすると

$$T : L^{p,w}(\mathbb{R}^d) \to L^{p,w}(\mathbb{R}^d) \quad \text{bdd.}$$

である ([6]).

Theorem 3.3. $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ ならば，$\forall \epsilon > 0$ に対して

$$T : (L^p, \ell^q)(\mathbb{R}^d) \to (L^p, \ell^{q+\epsilon})(\mathbb{R}^d) \quad \textit{bdd.}$$

Remark 3.3. その後の計算により，$1 < q < \infty$ のときには，この ϵ は除けることが分かった．その際，核 $K(x,y)$ について、次の性質を使う．

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| \leq C\frac{|y-z|}{|x-y|^{n+1}} \quad \text{for} \quad 2|y-z| \leq |x-y|.$$

4. 証明の概略

Proof of Theorem 3.1. $f \in M^{p,w}(\mathbb{R}^d)$ とする．半径 1 の任意の d 次元球 $B(a,1)$ に対して $f = f_1 + f_2$, $f_1 = f\chi_{B(a,3)}$ とし，

$$Tf(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f_2(y)\, dy \quad \text{for} \quad x \in B(a,1) \tag{4.1}$$

と定義する．T の L^p 有界性より

$$\|Tf_1\|_{L^p(B(a,1))} \leq C\|f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq Cw(a,1)^{1/p}\|f\|_{M^{p,w}}.$$

仮定より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(a,3)} |K(x,y)||f(y)|\, dy &\leq C(w(\cdot,1)^{1/p} * \Theta)(a)\|f\|_{M^{p,w}} \\ &\leq Cw^*(a,1)^{1/p}\|f\|_{M^{p,w}} \quad \text{for} \quad x \in B(a,1)\end{aligned}$$

が得られる．またすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $Tf(x)$ が矛盾無く定義できることもわかる．よって

$$\|Tf\|_{M^{p,w^*}} \leq C\|f\|_{M^{p,w}}$$

を得る． □

Proof of Theorem 3.2. 仮定より

$$\int_r^\infty \frac{w(a,t)^{1/p}}{t^{d/p+1}} dt \leq C\frac{w(a,r)^{1/p}}{r^{d/p}} \quad \text{for} \quad a \in \mathbb{R}^d,\ r \geq 1$$

が成り立つことに注意する．

$f \in M^{p,w}(\mathbb{R}^d)$ とする．任意の d 次元球 $B(a,r)$ $(r \geq 1)$ に対して $f = f_1 + f_2$, $f_1 = f\chi_{B(a,2r)}$ とし，

$$Tf(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f_2(y)\,dy \quad \text{for} \quad x \in B(a,r)$$

と定義する．T の L^p 有界性より

$$\|Tf_1\|_{L^p(B(a,r))} \leq C\|f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq Cw(a,r)^{1/p}\|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}}.$$

仮定より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(a,2r)} |K(x,y)||f(y)|\,dy \\
=&\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |K(x,y)||f(y)|\,dy \\
\leq& C\sum_{k=1}^{+\infty} (2^k r)^{-d} \int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |f(y)|\,dy \\
\leq& C\sum_{k=1}^{+\infty} (2^k r)^{-d} \int_{B(a,2^{k+1}r)} |f(y)|\,dy \\
\leq& C\sum_{k=1}^{+\infty} (2^k r)^{-d} |B(a,2^{k+1}r)|^{1/p'} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)} |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\
\leq& C\sum_{k=1}^{+\infty} (2^{k+1} r)^{-d/p} w(a,2^{k+1}r)^{1/p} \|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}} \\
\leq& C\int_r^{\infty} \frac{w(a,t)^{1/p}}{t^{d/p+1}}\,dt\,\|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}} \\
\leq& C\frac{w(a,r)^{1/p}}{r^{d/p}} \|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}} \quad \text{for} \quad x \in B(a,r)
\end{aligned}$$

が得られる．またすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $Tf(x)$ が矛盾無く定義できることもわかる．よって

$$\|Tf\|_{\widetilde{M}^{p,w}} \leq C\|f\|_{\widetilde{M}^{p,w}}$$

を得る． □

Proof of Theorem 3.3. 中心が $z \in \mathbb{Z}^d$ で辺の長さが 1 の d 次元立方体 Q_z に対して，同じ中心で辺の長さが 3 の d 次元立方体を $\tilde{Q}_z$ で表す．

$f \in (L^p, \ell^q)(\mathbb{R}^d)$ とする．$z_0 \in \mathbb{Z}^d$ に対して $f = f_1 + f_2$, $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}_{z_0}}$ とし，

$$Tf(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f_2(y)\,dy \quad \text{for} \quad x \in Q_{z_0}$$

と定義する．T の L^p 有界性より

$$\|Tf_1\|_{L^p(Q_{z_0})} \le C\|f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \cap \tilde{Q}_{z_0}} \|f\|_{L^p(Q_z)}.$$

また $x \in Q_{z_0}$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d \setminus \tilde{Q}_{z_0}} |K(x,y)||f(y)|\,dy &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{Q}_{z_0}} \int_{Q_z} |K(x,y)||f(y)|\,dy \\
&\le C \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{Q}_{z_0}} \int_{Q_z} \frac{|f(y)|}{(1+|z_0 - z|)^d}\,dy \\
&\le C \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{Q}_{z_0}} \frac{1}{(1+|z_0 - z|)^d} \|f\|_{L^p(Q_z)}
\end{aligned}$$

であるから

$$\|Tf_2\|_{L^p(Q_{z_0})} \le C \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{Q}_{z_0}} \Theta(z_0 - z) \|f\|_{L^p(Q_z)}.$$

$\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を $1/(1+\delta) + 1/q = 1 + 1/(q+\epsilon)$ と定める．

$$\{\Theta(z)\}_{z \in \mathbb{Z}} \in \ell^{1+\delta}(\mathbb{Z}^d), \quad \left\{\|f\|_{L^p(Q_z)}\right\}_{z \in \mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$$

であるから，数列の Young の不等式より

$$\left\| \left\{ \|Tf_2\|_{L^p(Q_z)} \right\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^{q+\epsilon}} \le C \left\| \left\{ \|f\|_{L^p(Q_z)} \right\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^q}$$

が得られる．よって

$$\|Tf\|_{(L^p, \ell^{q+\epsilon})} \le C\|f\|_{(L^p, \ell^q)}$$

を得る． □

References

[1] J.-P. Bertrandias, C. Datry and C. Dupuis, *Unions et intersections d'espaces L^p invariantes par translation ou convolution (French)*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978), no. 2, v, 53–84.

[2] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Mat. Appl. (7) 7 (1987), no. 3-4, 273–279.

[3] M. Cowling, S. Meda and R. Pasquale, *Riesz potentials and amalgams*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), no. 4, 1345–1367.

[4] J. J. F. Fournier and J. Stewart, *Amalgams of L^p and l^q*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 13 (1985), no. 1, 1–21.

[5] F. Holland, *Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q*, J. London Math. Soc. (2) 10 (1975), 295–305.

[6] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. 166 (1994), 95–103.