数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 137-144

KRASNOSEL'SKIĬ - MANN 型点列について

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

$\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の点列で, 以下の関係を持つものとする: 区間 $[0,1]$ 内の実数列 $\{\alpha_n\}$ が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ について,

$$z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n) z_n \tag{1}$$

を満たす. 本稿では, この点列 $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ を「Krasnosel'skiĭ - Mann 型点列」と呼ぶことにする [6, 8]. 1955 年, Krasnosel'skiĭ は以下の定理を証明した.

定理 1 (Krasnosel'skiĭ [6]). C を一様凸 Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. すなわち, すべての $x, y \in C$ について $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ を満たす. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} T x_n + \frac{1}{2} x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

Mann [8] はもう少し一般的な設定で議論をしている. これが Krasnosel'skiĭ - Mann 型点列の名前の由来である. この点列に関する最も素晴らしい定理は, 約 30 年前に Ishikawa によって証明された以下の定理である.

定理 2 (Ishikawa [5]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\limsup_n \alpha_n < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n \tag{2}$$

で定義する. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する.

本稿では, 以下の 3 種類の Krasnosel'skiĭ - Mann 型点列について議論する.

(A). $\|w_{n+1} - w_n\| \le \|z_{n+1} - z_n\|$;

キーワード. Krasnosel'skiĭ - Mann 型点列, 非拡大写像.
住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1 − 1 九州工業大学工学部数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

(B). $\|w_{n+1} - w_n\| \leq \|z_{n+1} - z_n\|$ かつ $\|w_{n+1} - z_{n+1}\| = \|w_n - z_n\|$;
(C). $\limsup_n \left(\|w_{n+1} - w_n\| - \|z_{n+1} - z_n\|\right) \leq 0$.

明らかに, (C) が最も弱い条件で, (B) が最も強い条件である.

講究録の目的に合わせるために, 本稿では, 通常の論文には書かないようなコメントも記述している. また, 本稿で定義されない概念については, 文献 [17–19] 等を参照のこと.

2. (A) 型

この節では, Krasnosel'skiĭ - Mann (A) 型点列について議論する. 既に述べているように, この点列に関する最も素晴らしい定理は定理 2 であると筆者は考えている. 他に紹介すべきとして, 以下の定理がある.

定理 3 (Edelstein & O'Brien [2]). E を Opial 条件を満たす Banach 空間とし, C を E の弱コンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. $\lambda \in (0,1)$ とし, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda) x_n$$

で定義する. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束する.

定理 4 (Reich [9]). E を Fréchet 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間とし, C を E の有界閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) = \infty$ を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と (2) で定義する. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束する.

Suzuki [13] により, 定理 3 は少し拡張されている. ところで, Goebel と Kirk は定理 2 と 3 の証明の本質部分について研究し, 以下の大変興味深い不等式を証明した.

命題 1 (Goebel & Kirk [3]). $\{z_n\}, \{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の点列とし, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0,1)$ 内の数列とする. (1) および (A) を仮定する. このとき, すべての $n, k \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n+i}\right) \|w_n - z_n\| \\
&\leq \|w_{n+k} - z_n\| + \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1-\alpha_{n+i}}\right) \left(\|w_n - z_n\| - \|w_{n+k} - z_{n+k}\|\right)
\end{aligned}$$

が成立する.

3. (B) 型

次の命題は, Krasnosel'skiĭ - Mann (B) 型点列に関するものである. この命題は命題1を用いて簡単に証明することができる. 本稿では, 命題1を用いない証明を与える.

命題 2 ([13]). $\{z_n\}, \{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の点列とし, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0,1)$ 内の数列とする. (1) および (B) を仮定する. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\|w_{n+1} - z_1\| - (1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\|w_1 - z_1\| = 0$$

が成立する.

命題の主張は, ある条件の下で, 折れ線の長さとその折れ線の始点と終点を結ぶ線分の長さが等しい, というものである. もちろん, E が狭義凸 Banach 空間の場合, その折れ線と線分は一致してしまうが, 狭義凸性のない場合, 一致しない例を簡単に作ることができる. さて, 証明を与える.

証明. $d = \|w_1 - z_1\|$ と置く. すべての $n, k \in \mathbb{N}$ について,

$$\|w_{k+n} - z_k\| = (1 + \alpha_k + \cdots + \alpha_{k+n-1})\, d \tag{3}$$

が成立することを示せば, 証明は完了する. n に関する帰納法を用いる. まず, $n = 1$ の場合, すなわち, すべての $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\|w_{k+1} - z_k\| = (1 + \alpha_k)\, d$$

が成立することを示す. 三角不等式とノルム凸性を用いて,

$$\begin{aligned}
d &= \|w_{k+1} - z_{k+1}\| \\
&\le \alpha_k \|w_{k+1} - w_k\| + (1 - \alpha_k)\|w_{k+1} - z_k\| \\
&\le \alpha_k \|z_{k+1} - z_k\| + (1 - \alpha_k)\|w_{k+1} - z_k\| \\
&= \alpha_k^2 \|w_k - z_k\| + (1 - \alpha_k)\|w_{k+1} - z_k\| \\
&= \alpha_k^2 d + (1 - \alpha_k)\|w_{k+1} - z_k\| \\
&\le \alpha_k^2 d + (1 - \alpha_k)\|w_{k+1} - z_{k+1}\| + (1 - \alpha_k)\|z_{k+1} - z_k\| \\
&= \alpha_k^2 d + (1 - \alpha_k) d + (1 - \alpha_k)\alpha_k d \\
&= d
\end{aligned}$$

を得る. よって, すべての $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\|w_{k+1} - z_k\| = \frac{d - \alpha_k^2 d}{1 - \alpha_k} = (1 + \alpha_k)\, d \tag{4}$$

が成立する. 次に, 「すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して (3) を満たす」という条件が, ある $n \in \mathbb{N}$ に対して成立していると仮定する. この仮定を用

いて,

$$
\begin{aligned}
&(1+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+n})\,d \\
&=\|w_{k+n+1}-z_{k+1}\| \\
&\leq \alpha_k\|w_{k+n+1}-w_k\|+(1-\alpha_k)\|w_{k+n+1}-z_k\| \\
&\leq \alpha_k\sum_{j=k}^{k+n}\|w_{j+1}-w_j\|+(1-\alpha_k)\|w_{k+n+1}-z_k\| \\
&\leq \alpha_k\sum_{j=k}^{k+n}\|z_{j+1}-z_j\|+(1-\alpha_k)\|w_{k+n+1}-z_k\| \\
&=\alpha_k\sum_{j=k}^{k+n}\alpha_j d+(1-\alpha_k)\|w_{k+n+1}-z_k\| \\
&\leq \alpha_k\sum_{j=k}^{k+n}\alpha_j d+(1-\alpha_k)\|w_{k+n+1}-z_{k+n+1}\|+(1-\alpha_k)\sum_{j=k}^{k+n}\|z_{j+1}-z_j\| \\
&=\alpha_k\sum_{j=k}^{k+n}\alpha_j d+(1-\alpha_k)d+(1-\alpha_k)\sum_{j=k}^{k+n}\alpha_j d \\
&=(1+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+n})\,d,
\end{aligned}
$$

と式変形できる. よって

$$
\begin{aligned}
(5)\quad &\|w_{k+n+1}-z_k\| \\
&=\frac{1}{1-\alpha_k}\Big((1+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+n})\,d-\alpha_k(\alpha_k+\cdots+\alpha_{k+n})\,d\Big) \\
&=(1+\alpha_k+\cdots+\alpha_{k+n})\,d
\end{aligned}
$$

がすべての $k\in\mathbb{N}$ について成立する. 従って, 帰納法により, (3) を得る. □

以下は余談. 数年前, 筆者は命題 2 を用いて, Ishikawa の定理 (定理 2) を証明したことがある. 何故そのようなことをしたかと言えば, Ishikawa の定理を知らなかったからである. 非常に簡潔な理由である. 命題 2 の証明の式 (4), (5) を計算する際, 中学生のときに習った因数分解の公式「$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$」が使えて, 綺麗な式が出てきたときの喜びを今でも覚えている. 後に Ishikawa の定理の存在を知り, ぬか喜びに終わってしまったのであるが, この「(ぬか) 喜び」は, 現在, 筆者の数学を研究する上でのモチベーションの 1 つになっている. また, 言葉や式で表現するのは難しいが, 命題 2 を証明する際に得た感覚は, (C) 型の命題を後に証明する際に非常に役に立った. なお, 数年前の筆者の証

明を, 最近, 文献 [13] 535 ページに載せた. 命題の仮定は Ishikawa の定理より若干強い.

4. (C) 型

この節では, Krasnosel'skiĭ - Mann (C) 型点列について議論する. 最近, この点列は注目されている. というのも, 複数個の写像の共通不動点への収束定理を得る際に, この点列は使われるからである. 以下は, (C) 型点列に関する命題の起点となる命題である.

命題 3 (Suzuki [15]). $\{z_n\}, \{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の点列とし, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0,1]$ 内の数列とする. (1), (C) および $\limsup_n \alpha_n < 1$ を仮定する. d を

$$\liminf_{n\to\infty} \|w_n - z_n\| \le d \le \limsup_{n\to\infty} \|w_n - z_n\|$$

を満たす実数とする. このとき, すべての $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\liminf_{n\to\infty} \Big| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+k-1})\, d \Big| = 0$$

が成立する.

命題 3 は, 命題 2 の (C) 型版である. 命題 3 を用いると, 以下の命題を証明できる. これは, [11] の補助定理 2, [12] の補助定理 6 の拡張である.

命題 4 (Suzuki [14]). $\{z_n\}, \{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の有界な点列とし, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0,1]$ 内の数列とする. (1), (C) および $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を仮定する. このとき, $\lim_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

次の命題は, 非拡大写像族の共通不動点への収束定理を証明する為に, 命題 4 を変形したものである.

命題 5 (Suzuki [15]). C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ を C 上の非拡大写像からなる写像列とする. 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T_n x_n + (1 - \alpha_n)\, x_n$$

で定義する. $\{x_n\}$ が有界であることと,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{n+1} x_n - T_n x_n\| = 0$$

を仮定する. このとき, $\lim_n \|T_n x_n - x_n\| = 0$ が成立する.

命題 5 用いて最近得られた 3 つの定理を紹介したい. 最初に紹介する定理は定理 2 を可算個の族に拡張したものである. 定理 2 の出版が 1976 年, 定理 5 の出版は 2005 年であるので, この間, 実に 29 年経過している.

定理 5 (Suzuki [14]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, $\{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1/2]$ は

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \alpha_n > 0 \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$$

を満たしているとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \lambda \left(\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_n^k \right) T_1 x_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_n^{k-1} T_k x_n \right) + (1-\lambda)\, x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ強収束する.

次の定理は非拡大半群に関する収束定理である. Bochner 積分を使っていない所にこの定理の特徴がある.

定理 6 (Suzuki [15]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大半群とする. すなわち,

(i) 各 $t \geq 0$ について, $T(t)$ は C 上の非拡大写像である
(ii) すべての $s \geq 0, t \geq 0$ に対して, $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ である
(iii) すべての $x \in C$ に対して, $t \mapsto T(t)x$ は連続写像である

を満たすとする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 数列 $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ は

$$\liminf_{n\to\infty} t_n < \limsup_{n\to\infty} t_n \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \left(t_n - t_{n+1}\right) = 0$$

を満たしているとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \lambda T(t_n) x_n + (1-\lambda)\, x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点へ強収束する.

定理5の $\{\alpha_n\}$ と定理6の $\{t_n\}$ の条件の類似性に注目して頂きたい.

ところで, 上記2つの定理は写像族の共通不動点への収束定理であるが, 次の定理はシングルの非拡大写像の不動点への収束定理である. すなわち, 命題3は写像族だけでなく, シングルの写像に関しても有用である.

定理 7 (Suzuki [16]). C を一様滑らかな Banach 空間 E の有界閉凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は

(C1) $\lim_n \alpha_n = 0$
(C2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

を満たしているとする. $u \in C$ を固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\left(\lambda T x_n + (1-\lambda) x_n\right) \tag{6}$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

上記の収束定理は Halpern 型の収束定理と呼ばれるが, Halpern [4] は (6) において, $\lambda = 1$ とした形で収束定理を証明しているので, 若干イテレーションの形は異なる. 従来, (C1) と (C2) の他にもう 1 つの条件が必要であった. この第 3 の条件と文献について列挙する.

(C3) $\lim_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1}^2 = 0$ (Lions [7])
(C4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ (Wittmann [20])
(C5) $\lim_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1} = 0$ (Xu [21, 22])
(C6) $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \le o(\alpha_{n+1}) + \sigma_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ (Cho, Kang, Zhou [1])

条件 (C6) が最も弱い条件であるが, 「第 3 の条件をどこまで弱くすることができるのか」という問題が Reich [10] によって 1983 年に提起されている. なお, (C1) と (C2) は必要条件なので, これらを省くことはできない. 定理 7 はこの 22 年前に提起された問題に対する解答であり, その答えは「第 3 の条件は不要である」というものである. すなわち, 「(C1) かつ (C2) は必要十分条件である」ということが分かった.

参考文献

[1] Y. J. Cho, S. M. Kang and H. Y. Zhou, *"Some control conditions on the iterative methods"*, to appear in Internat. J. Comput. Numer. Anal. Appl.

[2] M. Edelstein and R. C. O'Brien, *"Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations"*, J. London Math. Soc., **17** (1978), 547–554.

[3] K. Goebel and W. A. Kirk, *"Iteration processes for nonexpansive mappings"*, Contemp. Math., **21** (1983), 115–123.

[4] B. Halpern, *"Fixed points of nonexpanding maps"*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[5] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71.

[6] M. A. Krasnosel'skiĭ, *"Two remarks on the method of successive approximations"* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123–127.

[7] P.-L. Lions, *"Approximation de points fixes de contractions"*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **284** (1977), A1357–A1359.

[8] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[9] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

[10] ———, *"Some problems and results in fixed point theory"*, Contemp. Math., **21** (1983), 179–187.

[11] T. Suzuki, *"Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal., **3** (2002), 381–391.

[12] ———, *"Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces"*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[13] ———, *"Krasnoselskii and Mann's type sequences and Ishikawa's strong convergence theorem"*, in Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp. 527–539, Yokohama Publishers, 2004.

[14] ———, *"Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123.

[15] ———, *"Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals"*, J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239.

[16] ———, *"Sufficient and necessary condition for Halpern's type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings"*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[17] 高橋渉, "非線形関数解析学", 近代科学社 (1988).

[18] ———, "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).

[19] W. Takahashi, *"Nonlinear Functional Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[20] R. Wittmann, *"Approximation of fixed points of nonexpansive mappings"*, Arch. Math. (Basel), **58** (1992), 486–491.

[21] H. K. Xu, *"Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings"*, Bull. Austral. Math. Soc., **65** (2002), 109–113.

[22] ———, *"Iterative algorithms for nonlinear operators"*, J. London Math. Soc., **66** (2002), 240–256.