数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 90-99

人間らしい初等幾何証明における角の取り扱いについて

白柳 潔
KIYOSHI SIRAYANAGI *
関川 浩
HIROSHI SEKIGAWA †
日本電信電話株式会社
NTT コミュニケーション科学基礎研究所
NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES

宮本 健司
KENJI MIYAMOTO ‡
山本 航
WATARU YAMAMOTO
法政大学工学部
FACULTY OF ENGINEERING,
Hosei University

1 はじめに

科学技術計算が今後ますます大規模かつ複雑になるにつれて，機械自らが計算手法を工夫して数学的な処理をしたり，人間の数学的な処理を支援したりすることが必要となってくる．そのため，我々は数学における機械創造の理論について研究を行っている．その第一歩として，初等幾何における定理の証明を題材とし，人間らしい証明を機械的に生成し，人間の証明支援に資することを目的とする．

我々はこれまで，機械自らが補助線を引くために，その補助線の探索手法 [6] やその効率化 [5] について報告し，実際にいくつかの問題を解くことに成功している．しかし，初等幾何証明において最も基本的な三角形の合同をまだ導入していなかった．これを導入すれば解ける問題の範囲が大幅に拡大される．そこで今回，その導入を試みたところ，意外にもある問題が浮き彫りになった．それが本論文の主題である「角の取り扱い」である．

そもそも角をいかに表現するかという問題は，幾何の機械証明において中心的なテーマの一つであった．初期の研究（[7],[8] など）では人間の表現方法を素朴にモデル化する方法がとられ $\angle BAC$ のように表現した（図 1 左）．このように，角を成す 3 点で表す方法を点角と呼ぶ．これに対して近年の幾何機械証明では代数的方法 [1],[4]，論理的方法 [3],[4] を問わず，図 1(右) に示すように角を成す 2 直線 l, m のペア lm で直線 l から直線 m に反時計回りで到達する角度を表現する方法（以下，線角と呼ぶ）にもとづいている．定義から lm と ml は互いに補角であることに注意せよ．

線角が点角に対して優位であるのは，点の選び方に由来する自由度がなく一意的で簡明である点と錯角や同位角など平行線に関する規則を適用できる条件が点配置の影響を受けず一定であるという点である．後者についてはたとえば次の状況を考えよう．直線 $k = AB$ と $l = DC$ が平行であり，直線 m は直線 k および l と点 A, D で交わっているものとする．このとき平行線の錯角／同位角の性質を点角で表すにはどのようにすればよいだろうか？たとえば図 2 に示すように $\angle ADC$ と $\angle BAD$ は点 C の l 上の位置によって錯角になる場合と互いに補角になる場合があり，$\angle ADC = \angle BAD$ は一般には正しくない．

*shirayan@theory.brl.ntt.co.jp
†sekigawa@theory.brl.ntt.co.jp
‡miyaken@k.hosei.ac.jp

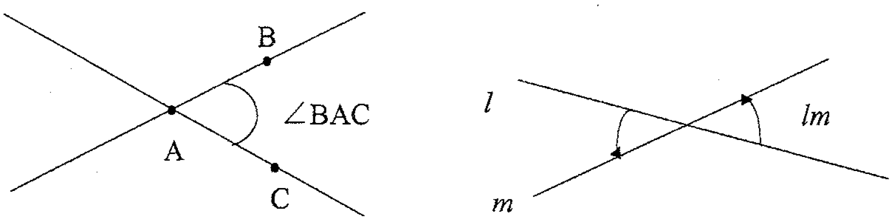


図 1: 点角 (左) と線角 (右)

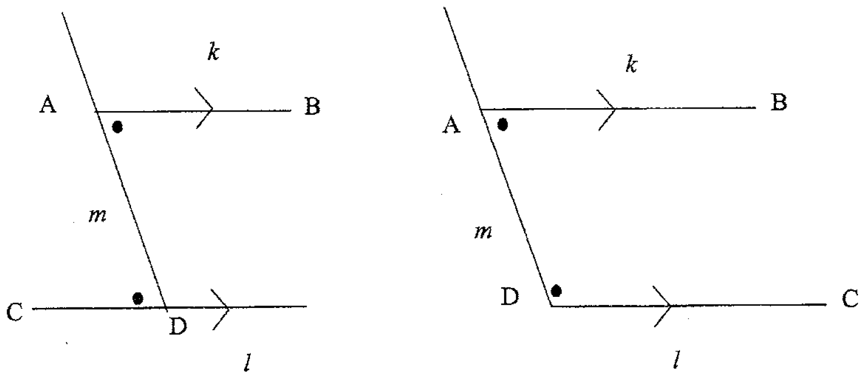


図 2: 点角の困難：錯角か否かは点配置に依存する．

点の配置を具体的に与えられない問題を点角で表現し証明するには逐一このような場合分けを行なわねばならず，このことが自動化を妨げる．これに対して，線角によればCの位置によらず $km = lm$ のように表現でき，これは常に正しい．このように線角による表現は具体的な点配置ではなく幾何学的関係だけで表された命題の証明に威力を発揮する．

しかしながら，人間的な推論を考える場合，線角には致命的な欠陥がある．人間が通常初等幾何で用いるのが点角であるということ以外に，線角では三角形の合同条件を表すのが困難なのである．線角で合同条件「三辺相等」を表現することを考えよう．2つの三角形 ABC と $A'B'C'$ で $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$ であるとしよう．このとき二つの三角形が図 3 の左および中のようであれば，線角を用いて，

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C' \ \vdash\ cb = c'b'$$

と推論することは正しい．ところが，三角形 ABC と $A'B'C'$ が鏡映の関係（図 3 左と右の関係）にある場合，cb と $c'b'$ は互いに補角の関係なっており上のように推論することは誤りである．これに対して点角で表される同様の規則

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C' \ \vdash\ \angle BAC = \angle B'A'C'$$

は点配置に依らず常に正しい．同様の困難は他の二つの合同条件「二角夾辺」および「二辺夾角」でも現れる．線角のこのような困難は線角が角度の向きの情報を含むことが原因であって，合同に限らず鏡映による角の相等を表す場合には常に問題になる．このように線角は点配置によらない抽象的な幾何学的条件下で推論を行なうには有利であるが，合同を用いた人間的な証明を取り扱うことができない．そこで推論が点配置によらないような枠組のなかで合同を取り扱えるようにする方法が求められている．

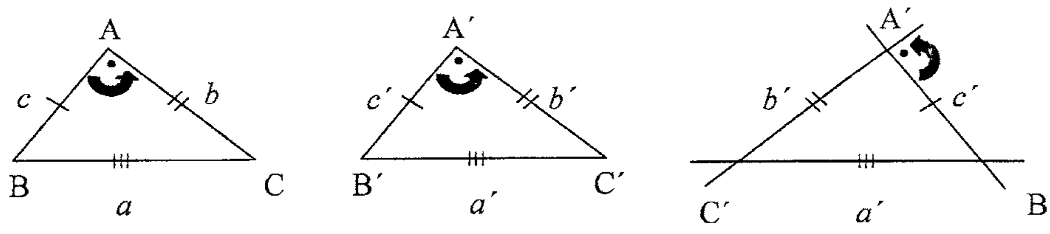


図 3: 鏡映による困難

本論文で述べる方法では，点角を用いながらも点配置に依存しない推論を行なう．このような推論のための規則は点配置によらず正しくなるように条件部分（前提）を強くすることで得られる．このような推論規則として平行線，等しい角の補角，および，同じ線上の点で表される角に関する推論規則を従来の証明器で用いる線角の推論規則と入れ換えたうえで古典的な 3 つの合同条件（規則）を加えて証明器を構成する．

実装した証明器では点角によって初等的に表された命題をそのまま入力でき，また，得られた証明は図に依らない幾何学的関係だけからなる抽象的なものでありながら，合同を用いた，初等的でわかりやすいものとなった．

合同に関する困難が解決できたことで初等幾何学の機械推論は人間の推論に近づいた．以下の章では，点配置に依存しない推論規則の詳細を述べた後，それらを実装した証明器による実験結果を見ていくことにする．

2 点配置に依存しない推論規則

この章では，推論で用いる幾何学的関係の表現と意味を定義し，点配置に依存しない推論規則を示したのち，最後に合同の推論規則をまとめる．

2.1 幾何学的関係の表現

本論文で取り扱う問題および証明における幾何学的関係は表 1 に示す述語による（事実とよぶ）原子式の集合によって表す．

$line(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を通る直線を意味する．

2.2 点配置に依存しない推論規則

ここでは点配置に依存しない推論規則を具体的に見ていく．なお，各規則のローマ字名称は，後述する証明中で用いる．

平行な 2 直線 BC, DE とそれらと交わり互いに 1 点 A で交わる 2 直線 $line(A,B,D)$，$line(A,C,E)$ があるとき，$\angle ABC = \angle ADE$ および $\angle BAC = \angle DAE$ を推論してよい．

規則 (平行線)

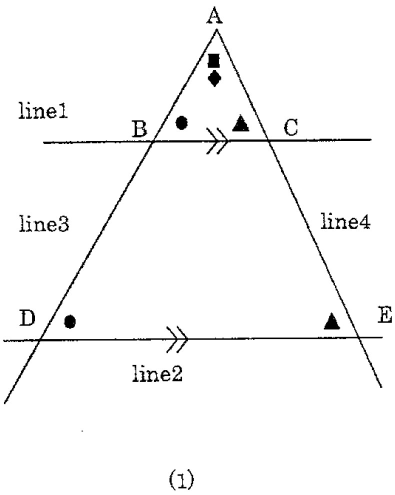
heikol: $BC//DE,\ col(A,B,D),\ col(A,C,E) \vdash$

$$\angle ABC = \angle ADE,\ \angle BAC = \angle DAE,\ \angle BAE = \angle DAC,\ \angle ACB = \angle AED.$$

表 1: 幾何学的関係

表記	意味
$point(P)$	点 P が存在する.
$col(A_1, A_2, \cdots, A_n)$	点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は同一直線上にある.
$A \to BC$	点 A, B, C は同一直線上にあり, かつ, A から見て B, C は同じ側にある.
$AB//CD$	直線 AB と CD は平行である.
$AB = CD, eqlength([A, B], [C, D])$	線分 AB と CD の長さは等しい.
$2AB = CD$	線分 AB の長さは CD の長さの半分である.
$\angle ABC = \angle DEF, eqangle([A, B, C], [D, E, F])$	角 $\angle ABC$ と $\angle DEF$ の大きさが等しい.
$on\_line(l, [A_1, \cdots, A_n])$	点 $A_1, \cdots, A_n$ が直線 l の上にある.

この規則が点配置によらないことは図 4 を見れば明らかである. 図 4(左) は点 B, C が直線 AD, AE 上 A から見て D, E と同じ側にある場合で $\angle ABC$ と $\angle ADE$ は同位角で等しい. また $\angle BAC$ と $\angle DAE$, $\angle BAE$ と $\angle CAD$ はそれぞれ同一の角 (同一角) であって等しい. 一方図 4(右) は A から見て反対側にある場合で $\angle ABC$ と $\angle ADE$ は錯角でやはり等しい. また $\angle BAC$ と $\angle DAE$, $\angle BAE$ と $\angle CAD$ もそれぞれ対頂角でやはり等しい.



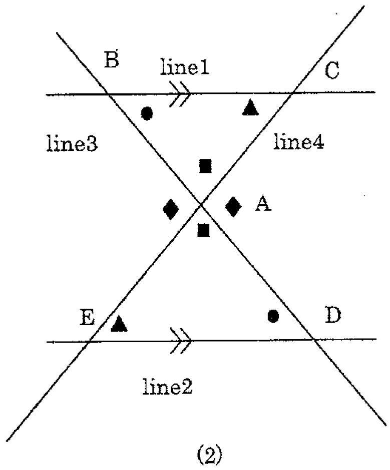


図 4: 平行線の規則が直線の配置によって同位角／同一角を表す場合 (左) と錯角／対頂角を表す場合 (右)

平行な 2 直線 BC, DF とそれらと交わり互いに 1 点 A で交わる 2 直線 $line(A, B, D)$, $line(A, C)$ に対して, 以下のように推論する.

規則 (平行線-補助点あり)

heiko2: $BC//DF$, $col(A, B, D)$ $\vdash$ $point(E)$, $col(A, C, E)$, $col(D, E, F)$, $\angle ABC = \angle ADE$, $\angle BAC = \angle DAE$, $\angle BAE = \angle DAC$, $\angle ACB = \angle AED$.

この規則の点 E のように帰結にあらわれる (前提にない) 新たな点を補助点と呼ぶ. 補助点はその規則によって生成されるという.

二等辺三角形の推論規則は，以下の２つである．これらの規則は [6][5] で用いたものの点角版である．

規則 (二等辺三角形)

nitohen1: $AB = AC \ \vdash \ \angle ABC = \angle ACB.$

nitohen2: $\angle ABC = \angle ACB \ \vdash \ AB = AC.$

点 O, P を共通にもつ２つの点角 $\angle AOP, \angle BOP$ が等しいとき直線 OP 上の任意の点 Q について $\angle AOQ = \angle BOQ$ が成り立つ．この性質を規則として用い，共点等角と呼ぶ．共点等角は Q が O に関して P と同じ側にあるか反対側にあるかに依らず正しいことに注意せよ．推論規則は以下のようになる．

規則 (共点等角) kyoutentoukaku: $\angle BOP = \angle AOP,\ col(P, O, Q) \ \vdash \ \angle BOQ = \angle AOQ.$

$A \to BD$，すなわち A から見て B, D が同一直線上同じ側にあるとき，任意の点 C に対して $\angle CAD = \angle CAB$ と推論してよい．

規則 (同角) doukaku: $A \to DB \ \vdash \ \angle CAD = \angle CAB.$

同じ長さの線分による和と差はやはり同じ長さになる．このことを同長と呼び以下の推論規則で表す．

規則 (同長)

doutyou1: $A \to BC,\ D \to EF,\ C \to AB,\ F \to DE, AB = DE, BC = EF \ \vdash \ AC = DF.$

doutyou2: $B \to AC,\ E \to DF, AB = DE, BC = EF \ \vdash \ AC = DF.$

中点連結定理の推論規則のうち補助点を生成しないものをまとめる．

規則 (中点連結定理)

tyuten1: $AB = BC,\ A \neq C,\ col(A, B, C),\ col(A, M, D),\ CD//BM \ \vdash$
$AM = MD,\ 2BM = CD.$

tyuten2: $AB = BC,\ A \neq C,\ col(A, B, C),\ col(A, M, D),\ AM = MD,\ A \neq D \ \vdash$
$CD//BM,\ 2BM = CD.$

補助点を生成する中点連結定理は以下のとおりである．

規則 (中点連結定理-補助点あり)

tyuten3: $AB = BC,\ A \neq C,\ col(A, B, C),\ A \neq D \vdash$
$point(M),\ AM = MD,\ CD//BM,\ 2BM = CD,\ col(A, M, D).$

平行四辺形の推論規則は前述の平行線の規則で $BD//CE$ の場合の困難を補うものである．

規則 (平行四辺形) heikoshihen: $AB//CD,\ AD//BC \ \vdash \ \angle BAC = \angle ACD.$

2.3 合同

合同の３条件は，点角を用いて以下のような推論規則で表す．ただし，三辺相等の場合のみすべての帰結を示し，他の場合は見やすくするため帰結の一部を省略した．これらは初等幾何学で述べられるものと基本的に同じである．

規則 (合同)

goudou1: $AB = A'B',\ BC = B'C',\ CA = C'A' \ \vdash$
$\angle ABC = \angle A'B'C',\ \angle BCA = \angle B'C'A',\ \angle CAB = \angle C'A'B'.$

goudou2: $AC = A'C',\ BC = B'C',\ \angle ACB = \angle A'C'B' \ \vdash \ AB = A'B',\ \angle ABC = \angle A'B'C'.$

goudou3: $BC = B'C',\ \angle ABC = \angle A'B'C',\ \angle ACB = \angle A'C'B' \ \vdash \ AB = A'B',\ \angle BAC = \angle B'A'C'.$

3 点角を用いた初等幾何証明

本章では，前章で述べた推論規則にもとづく証明器で実際にいくつかの証明問題を解いてみることにする．また初等幾何学の問題集での統計も調べる．

3.1 問題と証明の形式

入力する問題は事実の集合 U(仮定) と結論となる事実 F からなり，$U \Rightarrow F$ のように書く．
出力の各行は証明のステップであり，形式は以下の通りである．

行番号: 推論規則名, [適用箇所 1,⋯, 適用箇所 k], [前提 1,⋯, 前提 m], [帰結 1,⋯, 帰結 n]

また，以下のような約束を設ける．

- 推論規則に関する等号の推移規則を，“equality_” のあとにその推論規則のローマ字名をつけて表した．
- 適用箇所は，規則の前提に現れる変数の値（点）をその変数が現れる順に示す．
- 使用しない帰結は「_」とした．
- 前提は問題の仮定の事実か行番号-帰結番号の形式かのいずれか（point(t),line(t,[a,...,z]) などは t とだけ記す）．
- 点の構文

  点 ::= シンボル | midpoint(点, 点) | crosspoint(点, 点)

以下でいくつかの具体的な問題について入力と出力 (証明) を示す．

3.2 実行例

問題 1. 底辺を共有する 2 つの二等辺三角形の頂点を結ぶ直線は，底辺を二等分する．

```
{ point(a),point(b),point(c),point(d),point(p),
line(line1,[a,b]),line(line2,[b,c]),line(line3,[c,d])
line(line4,[d,a]),line(line5,[b,p,d]),line(line6,[a,p,c])
eqlength([a,b],[a,d]), eqlength([c,b],[c,d]) }
```

$\Rightarrow$ eqlength([b,p],[p,d])

```
0:goudou1,[b,a,d,a,c,c],[[a,b]=[a,d],[c,b]=[c,d],[a,c]=[a,c]],[[b,a,c]=[c,a,d],_,_]
1:kyoutentoukaku,[b,a,c,d],[0-1,line6],[[b,a,p]=[d,a,p]]
2:goudou2,[a,b,a,d,p,p],[[a,b]=[a,d],[a,p]=[a,p],1-1],[[b,p]=[d,p],_,_]
```

具体的な点配置としては点 A, C が底辺 BD に関して同じ側にある場合と反対側にある場合が考えられるが，上に示した証明は，どちらの場合でも成り立つことに注意せよ．

問題 2. $AB = AC$ であるとき $\angle ABC = \angle ACB$ を証明せよ．

```
{ point(a),point(b),point(c),
line(line1,[a,b]),line(line2,[b,c]),line(line3,[c,a]),
eqlength([a,b],[a,c]) }
```

⇒ eqangle([a,b,c],[a,c,b])

```
0:goudou1,[a,b,a,c,c,b],[[a,b]=[a,c],[a,b]=[a,c],[b,c]=[b,c]],[[a,b,c]=[a,c,b],_,_]
```

問題 3. 四角形 $ABCD$ で $AB = DC$, AD の中点を M, BC の中点を N とするとき，$\angle FEG = \angle EFG$ であることを証明せよ．

```
{ point(a),point(b),point(c),point(d),point(e),
  point(f),point(g),point(m),point(n),
  line(line1,[a,b,e,g]),line(line2,[c,d,f,g]),line(line3,[a,m,d]),
  line(line4,[b,n,c]),line(line5,[e,m,n,f]),
  eqlength([a,m],[m,d]),eqlength([a,b],[c,d]),eqlength([b,n],[n,c])  }
```

⇒ eqangle([f,e,g],[e,f,g])

```
0:tyuten3,[d,m,a,b],[[a,m]=[m,d]],[midpoint(b,d),line(m,midpoint(b,d))//line1,_,
  2*[m,midpoint(b,d)]=[a,b],_,line(m,midpoint(b,d))]
1:tyuten2,[b,n,c,d],[[b,n]=[n,c]],[_,line(n,midpoint(b,d))//line2,_,
  2*[n,midpoint(b,d)]=[c,d],_,_]
2:equality_length,[1-4,0-4,[a,b]=[c,d]],[[m,midpoint(b,d)]=[n,midpoint(b,d)]]
3:nitohen1,[0-1,m,n],[2-1],[[n,m,midpoint(b,d)]=[m,n,midpoint(b,d)]]
4:heiko2,[e,g,m,0-1,f],[0-2,line5,line2],[_,_,_,
  [f,e,g]=[f,m,crosspoint(line2,line(m,midpoint(b,d)))],
  [e,f,g]=[m,f,crosspoint(line2,line(m,midpoint(b,d)))],_,_]
5:heiko2,[n,0-1,f,c,m],[1-2,line5,0-6],[_,_,_,
  [m,n,midpoint(b,d)]=[m,f,crosspoint(line2,line(m,midpoint(b,d)))],
  [n,m,midpoint(b,d)]=[f,m,crosspoint(line2,line(m,midpoint(b,d)))],_,_]
6:equality_angle,[3-1,4-5,5-4],[[n,m,midpoint(b,d)]=[e,f,g]]
7:equality_angle,[6-1,4-4,5-5],[[e,f,g]=[f,e,g]]
```

3.3 問題集での実験

本証明器を用いて市販の問題集「高校入試集中トレーニング よく出る合同・相似」(教学研究社，1997年 10 月刊）の全問（５９問）について実験した結果を表２に示す．

表２で「うち図にもとづく点順序指定」とは，問題文からだけでは図形を再現することが出来ないため点順序を指定した問題であり,「証明不能」とは現時点では公理が足りないため, 解くことが原理的に不可能な問題のことである．

表に示すとおり，この問題集に関しては，証明可能なものはすべて本証明器で証明できている．

表 2: 点角を用いた証明の正答数と証明不能な問題数

問題数		59 問
正答		26 問
うち図にもとづく点順序指定		4 問
証明不能	長さを含む問題	16 問
	角度を含む問題	6 問
	面積を含む場合	6 問
	直角・垂直を含む問題	4 問
	角の和と差を含む問題	7 問
	平行を結論に含む問題	4 問

4 実装

4.1 証明器のシステム構成

証明器の基本的な構成は [6][5] と同様である．証明器は，推論規則データベース，知識表現部，推論部からなる．同図に示すように，前提と帰結からなる推論規則群を格納する推論規則データベースと各推論ステップで得られた幾何情報を蓄積管理する知識表現部と知識表現部で見つかった適用箇所候補を前提として各推論規則を適用したときの帰結として得られる幾何情報を知識表現部に追加する推論部からなる．

4.2 アルゴリズム

(1) 同側関係の初期化
内分ないし外分が問題の条件に与えられている場合は，これから得られる同側の関係をデータベースに追加する．

(2) 次を繰り返す
推論規則群のうちから一つを何らかの優先順位で選び，適用箇所探索器によって得られる適用箇所の一部または全部に適用し，結果を知識表現部に蓄積する．ここで，同角に関する知識が得られる推論が可能になるような推論を行うたびに，同角を更新するか後で更新するための情報を更新する．知識表現部分に知識が追加されるたびに，証明すべきことがらが知識として得られたか否かを検査する．もし得られていたならば，その知識を得るまでに必要となった推論すべてをそれらの依存関係とともに出力し停止する．(終り)

特に今回の実験では推論規則を選ぶ優先順位として [6] と同様に規則の複雑さ（前提になる条件の数）の順とし，補助点追加の優先順位として共有適用点の優先化 ([6]) を用いた．

探索戦略としては [5] にしたがって反復拡大法を用いている．反復拡大法では探索空間膨張の原因になる無限枝を生じる枝を拡大枝と呼び，拡大枝による探索 1 ステップとそれ以外による全探索を交互に行なう．今回の推論規則で拡大枝となるのは補助点追加型の中点連結定理のみである．(平行線の規則で生じる補助点はすでにある直線の交点を追加するのみなので膨張には寄与しないことに注意せよ.)

4.3 同側探索の枝刈り

同側関係 $A \to BC$ が成り立つような知識が追加されるのは (1) 内分・外分が明示されたときと，(2) 中点連結定理 tyuten1，tyuten3 が適用されたときのいずれかに限られる．これらの場合，即座に同側の規則

を用いて同角のデータベースの更新を行い，関係 $A \to BC$ の探索を避ける．

5 議論

初等幾何の証明問題にたいして，合同を使ったわかりやすい証明を生成する方法について述べた．

三角形の合同の規則を自然に表現するために3点による角度表現を用いたが，点配置によらず常に正しい推論規則を用いることで図によらない抽象的な証明が得られた．

2に示した推論規則では冗長な帰結など論理的に不要な帰結も含めて表している．たとえば，平行線の規則では $\angle ACB = \angle AED$ は不要である．しかしながら，これらを追加しておくことで全体的として適用回数が少なくなり，得られる証明の深さも短縮され，より初等的な証明になる．

推論規則の適用条件の検査に要する計算コストについては線の数を N とした場合，線角の数が最大 N^2 であるのに対して点の数 M が N^2 のオーダーであり，点角が3点の組み合わせであることから点角の数は $M^3 = N^6$ のオーダーである．これが点角を前提に含む推論規則の適用箇所探索の計算コストとなっている．実際に点角で問題3を解くのに要した時間は同じ問題を線角で表した場合の3倍程度であった．

関連研究

点角を用いた証明器としては，1章でのべたように [7] があげられる．[7] では問題を入力する際，直線上の点順序も含めてで入力しなければならない．したがって，幾何学の命題を一般的に証明しようとするならば図4のように配置が異なる場合ごとに証明しなければならない．

[7] ではまた，平行を取り扱う際，直線の向きを考慮した「同方向平行」という概念を用いる．同方向平行とは，$line(A,B,C,D)//line(E,F,G)$ であるとき平行な2直線上の点が表記の順で同じ向きに並んでいなければならないとするものである．平行を証明しようとしても必ずしも同方向平行とはならないので，証明できないことがある．

Geometry EXpert (GEX) [2] は本研究と同じく補助線の追加が可能だが，深さ1までしか行わないため問題3を解くことが出来ない．また，線角を用いているため合同を含む問題を証明することが出来ない．

将来研究

円を含む問題や垂直・直角を含む問題，あるいは平行が結論となる問題，さらに具体的な長さや面積に関する問題は現在推論規則を欠いており証明不能である．今回基本的な合同の規則が実現できたことでこれらにかかわる規則は比較的容易に追加できると予想される．

参考文献

[1] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II: Proving theorems with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 17, pp. 349–379, 1996.

[2] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. An Introduction to Geometry Expert, Proc. of the 13th *International Conference on Automated Deduction*, pp. 235–239, 1996.

[3] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. A decuctive database approach to automated geometry theorem proving and discovering. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 25, pp. 219–246, 2000.

[4] 松山隆司, 新田知明. 「論理的推論と代数的推論の融合による幾何推論」人工知能学会誌, Vol. 8, No. 3, pp. 74–85, 1993.

[5] 宮本健司, 大矢孝次, 関川 浩, 白柳 潔. 「初等幾何の自動証明における効率的な補助線の発見について」数理解析研究所講究録 *1395, "Computer Algebla—Design of Algorithms, Implementations and Applications,"* pp. 157–163, 2004.

[6] 宮本健司, 関川浩, 白柳潔, 町田文彦.「初等幾何における読みやすい証明の生成手法について」京都大学数理解析研究所講究録 *1335*, *"Computer Algebra—Algorithms, Implementations and Applications,"* pp. 20–27, 2003.

[7] Arthur J. Nevins. Plane geometry theorem proving using forward chaining, *Artificial Intelligence*, Vol. 6, pp. 1–23, 1975.

[8] 西村敏男.「定理の証明」情報処理, Vol. 11, No. 11, pp. 646–651, 1970.