数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 112-116

局所グレブナ扇

高山信毅
NOBUKI TAKAYAMA
神戸大学理学部
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KOBE UNIVERSITY

バルー ルッシュディ
ROUCHDI BAHLOUL
神戸大学理学部, JSPS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KOBE UNIVERSITY, JSPS

(同次) 多項式イデアルのグレブナ扇は Mora, Robbiano [MR88] により導入され, また Sturmfels [St95] により別の手法で研究された. イデアルおよび変数に関する重みベクトルが与えられたとしよう. 重みできまる頭イデアル (initial ideal) による, 重みベクトルの同値関係に我々は興味がある. (同次) 多項式イデアルの場合, 重みベクトルの同値類 (グレブナ錐) の閉包達は多面体的扇であることが知られている. 微分作用素環の場合 Assi, Castro, Granger [ACG00] はグレブナ錐の集合が有限であることを証明した. その後それは多面体的扇であることが斎藤, Sturmfels および高山により証明された [SST00].

グレブナ扇の理論を冪級数環や冪級数環を係数とする同次微分作用素環 $h_{(0,1)}(\mathcal{D}_0)$ にたいして一般化することは可能であろうか? Assi, Castro-Jiménez, Granger [ACG01] は冪級数環を係数とする同次微分作用素環において, 解析的な標準錐 (グレブナ錐) が開集合, 多面体的, 凸であり, かつ標準錐の集合は有限であることを証明した. 冪級数環は $h_{(0,1)}(\mathcal{D}_0)$ の部分環であるので, 彼らの定理の系として, 冪級数環のイデアルの標準扇の有限性が証明されたこととなる. 冪級数環におけるこのような事実はよく知られていたようで, たとえば Assi によるノート等がある [As93]. しかしながら, この扇が多面体的であるかどうかはいままで調べられていない. 我々はこの標準扇が多面体的であることを証明し, さらに入力が多項式的であるときの計算アルゴリズムおよびその実装を与えた. 詳細は [BT] を参照されたい.

われわれの定理への導入として, 冪級数環での主イデアルの場合に我々の定理を解説しよう.

f を n 変数の形式冪級数とする $\sum_{\alpha\in E} c_\alpha x^\alpha$. ここで集合 E は冪の集合の台である. 凸の多面体

$$\mathrm{New}(f) = \mathrm{conv}\{\alpha + \mathbb{N}^n | \alpha \in E\}$$

を f のニュートン多面体と呼ぶ. 我々はこの多面体の構造に興味がある.

u を $\mathbb{R}^n_{\leq 0}$ のベクトルとする. 我々はこれを重みベクトルとよぶ. 与えられた重みベクトル u に対して, ニュートン多面体の点の u 方向の高さを考える. ニュートン多面体 New(f) の u 方向で最も高い点の集合

$$\mathrm{face}_u(\mathrm{New}(f)) = \{\alpha \in \mathrm{New}(f) \subset \mathbb{R}^n | u\cdot\alpha \geq u\cdot\alpha' \text{ for all } \alpha' \in \mathrm{New}(f)\}$$

を u できまる New(f) の face (面) とよぶ. face は有限個しかないことが知られている. 与えられた face $F = \mathrm{face}_u(\mathrm{New}(f))$ にたいして, F の正規錐 (normal cone) を

$$\mathrm{N}(F) = \{u' \in \mathbb{R}^n_{\leq 0} | \mathrm{face}_{u'}(\mathrm{New}(f)) = \mathrm{face}_u(\mathrm{New}(f))\}.$$

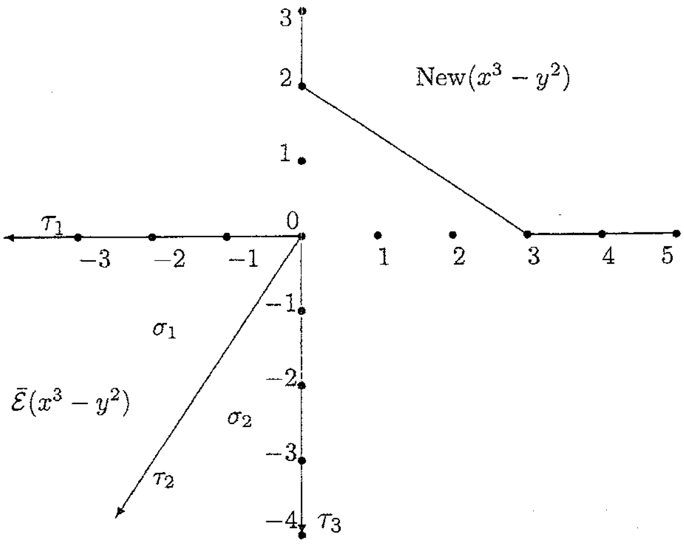

図 1: Normal fan and Newton polyhedron for $x^3 - y^2$

で定義する. ここで **計算代数の立場から注目すべきは, この正規錐は次のように頭イデアルを用いても定義できる** ということである.

$$\mathrm{N}(F) = \{u' \in \mathbb{R}^n_{\leq 0} | \mathrm{in}_{u'}(f) = \mathrm{in}_u(f),\ \mathrm{supp}(u') = \mathrm{supp}(u)\}, \tag{1}$$

ここで $\mathrm{supp}(u) = \{i \,|\, u_i \neq 0\}$. 正規錐 $\mathrm{N}(F)$ は開集合であり多面体的な錐であり, 頂点は有理数である. 正規錐の閉包の集合

$$\bar{\mathcal{E}}(f) = \{\overline{\mathrm{N}(F)} |\ F \text{ runs over the faces of New}(f)\}$$

をニュートン多面体の正規扇 (normal fan) と呼ぶ. 図 1 は $f(x,y) = x^3 - y^2$ に対するニュートン多面体と正規扇の図である. **正規扇は多面体的な扇である,** という事実は基本的である. ここで多面体的な扇の定義を復習しておこう.

定義 1 扇が多面体的であるとは扇を構成する閉錐が有限個であり次の二つの条件を満たすことである.

1. 各閉錐の面 (face) はまた扇の要素である.

2. 二つの閉錐の交わりはまた扇の要素である.

我々は冪級数環および解析的同次微分作用素環のグレブナ扇 (標準扇) がいま見た例と同様, 多面体的であることを証明した [BT]. さらに計算アルゴリズムおよび実装も与えた. Kan/sm1 のファイル `gfan.sm1` がその実装である.

`gfan.sm1` の `cone.sample2` を実行した結果とその解説を記す.

```
bash-2.05b: sm1
sm1>(gfan.sm1) run ;
Polymake is not installed in this system.
Using doPolymake.OoHG
sm1>cone.sample2 ;
```

```
BS for y and y-(x-1)^2, t1, t2 space, in doubly homogenized Weyl algebra.
The Grobner cones are dehomogenized to get local Grobner fan.
cone.input =
[    -y+t1 , x^2-2*x*H-y*H+H^2+t2*H , -2*x*Dt2+2*H*Dt2+H*Dx , Dt1+Dt2+Dy ]
入力した微分作用素の生成元. H が同次化微分作用素環の同次化パラメータ.
Trying a starting weight vector : [    t1 , -29 , t2 , -38 , Dt1 , 29 , Dt2 , 38 ]
これを出発点の重みベクトルとしてまずワイル代数でグレブナ扇を計算する.
Trying new weight [w,wv] is [ t1 , -11 , t2 , -9 , Dt1 , 11 , Dt2 , 9 ]
グレブナ錐の壁に関する flip 操作で見つけた次の重みベクトルを試す.
Flip succeeded.
二つのグレブナ錐が壁を共有するので flip 成功.
以上でワイル代数での構成は終了.
重みの同値類(最大次元のもの)は 2 次元の錐と線型空間の和.
cone.W =
 [
   [    -1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ]
   [    0 , -1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 ]
 ]
0 : begin cone ---------------------------------------
facets=
 [
   [    -1 , 1 ]      一番目の最大次元錐の facet の法線ベクトル達
   [    1 , 0 ]
 ]
---------------------------------------- end cone
1 : begin cone ---------------------------------------
facets=
 [
   [    0 , 1 ]       二番目の最大次元錐の facet の法線ベクトル達
   [    1 , -1 ]
 ]
---------------------------------------- end cone
次に冪級数で見た場合に同値な重みベクトルを与える錐を
マージしていく.
Step 1. Adding 1-th cone.
Step 2. Joining *** and new***
   Checking facets.
#dhcone.fan = 1
結局一つになった.
The number of cones = 1
以下得られたグレブナ錐の情報を表示.
0 : begin dhcone ---------------------------------------
facets=
 [
   [    1 , 0 ]
   [    0 , 1 ]
 ]
nextcid=
  [    -2 , -2 ]
cones=
  [    0 , 1 ]
---------------------------------------- end dhcone
0 : begin gbasis ---------------------------------------
initial=
 [
   [  -1+2*x-x^2 , -y , Dt2 , -2*Dt1+2*x*Dt1 ,
      -2*t1*x*Dt1+x*Dx-x^2*Dx-2*x*h , -4*t1*x*Dt1^2-6*x^2*Dt1*h ]
   [    t1,t2,x,y, , [    t1 , t2 ]  , [   ]  ]
 ]
weight=
  [    t1 , -29 , t2 , -38 , Dt1 , 29 , Dt2 , 38 ]
---------------------------------------- end gbasis
```

なお“多面体的である”という定理があるので, 最大次元の錐のみを数えあげれば十分であることを注意しておく.

参考文献

[As93] A. Assi, *Some remarks on universal standard bases*, preprint, 1993.

[ACG96] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *How to calculate the slopes of a $\mathcal{D}$-module*, Compositio Math. **104** (1996), no. 2, 107–123.

[ACG00] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *The Gröbner fan of an $\mathbf{A}_n$-module*, Journal of Pure and Applied Algebra **150** (2000), 27–39.

[ACG01] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *The analytic standard fan of a $\mathcal{D}$-module*, Journal of Pure and Applied Algebra **164** (2001), 3–21.

[Ba05] R. Bahloul, *Démonstration constructive de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math. **141** (2005), 175–191 (to appear).

[BT] R. Bahloul, N. Takayama, Local Gröbner fan: polyhedral and computational approach, `Math.AG/0412044`

[BS] D. Bayer and M. Stillman, *Macaulay: A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra.* Source and object code available for Unix and Macintosh computers. Contact the authors, or download from `zariski.harvard.edu` via anonymous ftp.

[CG04] F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *Explicit calculations in rings of differential operators.* Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, 89–128, Sémin. Congr., **8**, Soc. Math. France, Paris, 2004

[CN97] F.J. Castro-Jiménez, L. Nárvaez-Macarro, *Homogenising differential operators*, preprint n° 36, Universidad de Sevilla, 1997.

[CKM97] S. Collart, M. Kalkbrener, D. Mall, *Converting bases with the Gröbner walk*, Computational algebra and number theory (London, 1993), J. Symbolic Comput. **24** (1997), 465–469.

[FGLM93] J. C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, T. Mora, *Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering*, J. Symbolic Comput. **16** (1993), 329–344.

[OpenXM] OpenXM, a project to integrate mathematical software systems, 1998–2004, `http://www.openxm.org`

[GJ] E. Gawrilow, M. Joswig, *Polymake*, `http://www.math.tu-berlin.de/polymake`

[Gr94] Gräbe H.-G., *The tangent cone algorithm and homogenization*, J. Pure Appl. Algebra **97** (1994), no. 3, 303–312.

[GOT04] M. Granger, T. Oaku, N. Takayama, *Tangent cone algorithm for homogenized differential operators*, to appear in J. Symbolic Comput.

[GP96] G.-M. Greuel, G. Pfister, *Advances and improvements in the theory of standard bases and syzygies*, Arch. Math. **66** (1996), 163–176.

[GPS04] G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 2.0.5 A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Center for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2004). `http://www.singular.uni-kl.de`

[HT00] B. Huber, R. Thomas, *Computing Gröbner fans of toric ideals*, Experimental Mathematics **9** (2000), no. 3, 321–331.

[Lau87] Y. Laurent, *Polygône de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 3, 391–441.

[LM99] Y. Laurent, Z. Mebkhout, *Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), no. 1, 39–69.

[Laz83] D. Lazard, *Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations*, EUROCAL'83, Springer Lecture Notes in Computer Science **162** (1983), 146–156.

[LT73] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, *Transversalité, polygone de Newton, et installations*, Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. études Sci. de Cargèse, 1972), pp. 75–119. Astérisque, Nos. 7 et 8, Soc. Math. France, Paris, 1973.

[Ma89] H. Matsumura, *Commutative ring theory.* Translated from the Japanese by M. Reid. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Meb96] Z. Mebkhout, *Le polygone de Newton d'un $\mathcal{D}_X$-module*, Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), 237–258, Progr. Math., 134, Birkhäuser, Basel, 1996.

[Mo82] F. Mora, *An algorithm to compute the equations of tangent cones*, Proc. EUROCAM '82, Lecture Notes in Computer Science **144** (1982), Springer, pp. 158–165.

[MR88] T. Mora, L. Robbiano, *The Gröbner fan of an ideal*, J. Symbolic Comput. **6** (1988), no. 2-3, 183–208.

[Ro85] L. Robbiano, *Term orderings on the polynomial ring*, EUROCAL '85, Vol. 2 (Linz, 1985), 513–517, Lecture Notes in Comput. Sci., 204, Springer, Berlin, 1985.

[SST00] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Algorithms and Computation in Mathematics **6**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[St95] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Notes **8**, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[Ta91] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis, 1991-*. See www.math.kobe-u.ac.jp/KAN/. Version 1 (1991), Version 2 (1994), the latest version is 2.990914.

[Zi95] G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, New York, 1995.