数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 155-162

オークションに対する最適停止問題の適用の試み

東京大学大学院総合文化研究科　來島 愛子
Graduate School of Arts and Sciences,
The University of Tokyo

1　はじめに

近年，インターネットの普及などにより，オークションは非常に身近なものとなっている．これまでオークションは主に経済学において研究されてきて従来の研究では均衡戦略に着目されている．そこで，今回オークションを新たに最適停止問題としてとらえ，最適停止規則（最適戦略）を求めることを考えた．

オークションにはさまざまなタイプがあり，価格が上昇する，あるいは下降する，また，落札額が付け値の最高額，あるいは 2 番目に高い額，などである．

最適停止問題としてモデルを作るにあたり，いくつかの仮定をした．

- 1 人の入札者のみに注目
- 目的は期待効用を最大化
- 価格は単位時間に一定額ずつ変化
- オークションの付け値の最高額あるいは品物が売り切れるときの価格，つまりオークションの終了する時刻が確率変数

これらの仮定に基づいて，上昇オークションと下降オークションにおける最適停止規則をいくつかのモデルで求めた．

2　上昇オークション

この節では，上昇オークションについて最適停止規則を求める．まず，上昇オークションの設定について述べる．ある 1 人の意思決定者 (decision maker, DM) が期待効用を最大にする目的で，1 つの対象物の ascending first-price auction に参加する．このとき，DM の最適戦略を求める．

オークション終了時刻 N を確率変数と考え，N の事前分布が一様分布 $U[1, M]$ (M は既知) に従うとする．つまり，事前分布は

$$P(N=j)=\frac{1}{M},\ \ j=1,2,\ldots,M$$

であり，時刻 i においてオークションが終了していないとき N の事後分布は

$$P(N=j|N>i)=\frac{1}{M-i},\ \ i=1,2,\ldots,M-1,\ j=i+1,i+2,\ldots,M$$

である．

時刻 i における評価額関数，損失関数をそれぞれ $v(i)$，$l(i)$ と表す．また，入札額は時刻に比例して上昇するものとし，一般性を失わないので，単位時刻あたりの上昇額を基準に定数倍を省略して関数を表記する．すると，時刻 i における効用関数は

$$R(i)=\begin{cases} -l(i), & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ v(i)-i, & \text{時刻 } i \text{ で落札したとき} \end{cases} \tag{1}$$

と表される．

以降，W_i を時刻 i でその後最適に行動したときの最大期待利得，U_i を時刻 i で停止した (オークションからおりた) ときの最大期待利得，V_i を時刻 i で継続したときの最大期待利得とする．このとき，最適方程式は

$$W_i=\max\{U_i, V_i\}, \tag{2}$$

境界条件は

$$W_T=U_T. \tag{3}$$

したがって，最適方程式は

$$\begin{aligned} W_i &= \max\{-l(i), P(N=i+1|N>i)\{v(i+1)-(i+1)\}+P(N>i+1|N>i)W_{i+1}\} \\ W_T &= -l(T) \end{aligned}$$

と書くことができる．

2.1 評価額一定の場合

評価額 (支払いの限度額) が一定，時間に関する損失は落札できなかった場合にのみ発生するとして，損失と効用を考える．時刻 i における効用 (損失) 関数 $R(i)$ は対象物を落札できた場合とできなかった (オークションをおりた) 場合についてそれぞれ $v(i)-i$, $l(i)$ と表される．ここで，評価額 (支払いの限度額) は時間に変換することができるので，最大の待ち時間 T で表すことにする．この節では，損失関数 $l(i)$ にいくつかの例を当てはめたときの最適停止規則について述べる．

2.1.1 線形損失

時間に比例して損失が発生する場合を考える．効用関数は

$$R_1(i)=\begin{cases} -ci, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ T-i, & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{4}$$

このとき，OLA 停止領域 B は

$$B=\left\{i: -ci \geq \frac{1}{N-i}(T-i-1)+\frac{N-i-1}{N-i}\{-c(i+1)\}\right\}$$

B が closed であるためには，OLA 関数

$$G(i)=-ci-\frac{1}{N-i}(T-i-1)+\frac{N-i-1}{N-i}\{-c(i+1)\}$$

が単調であればよい．関数を変形すると，$c<1/2$ のとき，

$$B=\left\{i: i \geq \frac{1}{1-2c}(T-c-1-Mc)\right\}$$

と表され，B は closed となり，最適停止領域となる．

したがって，最適停止規則は $c<1/2$ のとき，$i \geq (T-c-1-Mc)/(1-2c)$ となるはじめての i でオークションからおりる，である．

2.1.2 2次の損失

2次の損失関数を考えて，効用関数を次のように与える．

$$R_2(i)=\begin{cases} -ci^2, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ T-i, & \text{落札したとき.} \end{cases} \tag{5}$$

OLA 停止領域は

$$B_2=\{i:(M-i)c(2i+1)-(i+1)(ci+c-1) \geq T\}$$

で与えられる．OLA 関数を $h_2(i)$ とかくと，

$$h_2(i)=(M-i)c(2i+1)-(i+1)(ci+c-1)-T.$$

OLA 関数の単調性と自明でない OLA 停止領域の存在を考えると，$h_2(0)<0$ であり，かつ $h_2(T)>0$ である必要がある．すなわち，

$$\frac{2T-1}{-3T^2+(2M+1)T+(M-1)}<c<\frac{T-1}{M-1}$$

かつ

$$-3T^2+(2M+1)T+(M-1)>0.$$

上の2つの条件が成り立つとき、OLA 停止領域は closed となり，OLA 停止規則は最適となる．

最適停止規則は $(2T-1)/(-3T^2+(2M+1)T+(M-1))<c<(T-1)/(M-1)$ かつ $-3T^2+(2M+1)T+(M-1)>0$ のとき，

$$(M-i)c(2i+1)-(i+1)(ci+c-1) \geq T$$

をみたす最小の i で停止する，である．

2.1.3 対数関数型損失

損失が対数関数であり，効用関数が以下のように与えられた場合を考える．

$$R_3(i)=\begin{cases} -\ln i, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ T-i, & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{6}$$

OLA 停止領域 B_3 は次のように表される．

$$\begin{aligned} B_3 &= \left\{i:-\ln i \geq \frac{1}{M-i}(T-i-1)+\frac{M-i-1}{M-i}\times\{-\ln(i+1)\}\right\} \\ &= \left\{i:(M-i)\log\frac{T-i}{T-i-1} \geq T-i-1-\log\frac{T-i-1}{T}\right\}. \end{aligned}$$

OLA 関数を

$$h_3(i) = (M-i)\log\frac{T-i}{T-i-1} - (T-i-1) + \log\frac{T-i-1}{T}$$

とする．OLA 関数の $h_3(i)$ の単調性を調べる．

$$\frac{d^2h_3}{di^2} > 0$$

であるので，自明でない OLA 停止領域が存在するためには $h_3(1) < 0$，すなわち

$$T-2 > (M-2)\log 2$$

である必要がある．また，$h_3(T-1) > 0$ も必要であるが，$h_3(1) < 0$ かつ $T \geq 3$ のとき，$h_3(i) < 0$, $i = 1,2,3,\ldots,T-1$ となる．したがって，OLA 停止領域は自明なものとなる．つまり，$T-2 > (M-2)\log 2$ のとき，最適停止戦略は T まで待つ，である．

2.1.4 対数・分数型損失

次のような効用関数を考える．

$$R_4(i) = \begin{cases} \log\dfrac{T-i}{T}, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ T-i & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{7}$$

OLA 停止領域 B_4 は

$$B_4 = \left\{ i : (M-i)\log\frac{T-i}{T-i-1} - (T-i-1) + \log\frac{T-i-1}{T} \geq 0 \right\}$$

と表される．$h_4(i)$ が OLA 関数を表すとする．

$$h_4(i) = (M-i)\log\frac{T-i}{T-i-1} - (T-i-1) + \log\frac{T-i-1}{T}.$$

ここで，OLA 関数の単調性を調べる．

$$\frac{d^2h_4}{di^2} > 0 \text{ かつ } h_4(0) < 0$$

より $h_4(i)$ は凹であり，OLA 停止領域は closed となる．

よって，OLA 停止領域が最適であることが示された．最適停止規則は

$$(M-i)\log\frac{T-i}{T-i-1} - (T-i-1) + \log\frac{T-i-1}{T} \geq 0$$

を満たす最初の i で停止する，である．

2.1.5 分数関数型損失

効用関数が次のように与えられる場合を考える．

$$R_5(i) = \begin{cases} -\dfrac{T}{T-i}, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ T-i & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{8}$$

OLA 停止領域は

$$B_5 = \left\{ i \; : \; -\frac{T-i}{T} \geq \frac{1}{M-i}(T-i-1) - \frac{M-i-1}{M-i}\frac{T-i-1}{T} \right\} \tag{9}$$

と表され，これを整理すると，

$$B_5 = \left\{ i \; : \; (T-i)^3 - 2(T-i)^2 + (T-i) - (M-T-1)T \leq 0 \right\}.$$

そこで，OLA 関数を

$$h_5(i) = (T-i)^3 - 2(T-i)^2 + (T-i) - (M-T-1)T \tag{10}$$

とおくと，$T > (1+\sqrt{4M-7})/2$ のとき，$h_5(i) = 0$ をみたす $0 < i < T-1$ が唯一つ存在し，それを i^* とすると，i^* より大きい i では上の不等式が満たされる．したがって，このとき，OLA 停止領域は closed になり，OLA 停止規則は最適停止規則であることが示される．

最適停止規則は $T > (1+\sqrt{4M-7})/2$ のとき，

$$(T-i)^3 - 2(T-i)^2 + (T-i) - (M-T-1)T \leq 0$$

を満たす最初の i で停止する，である．

2.2 評価額が変化する場合

DM の対象物に対する評価額は時刻に従って変化すると考える．特に，今回は時刻に関して線形な評価額関数を取り上げる．

2.2.1 線形損失と線形評価額

損失と評価額がともに線形の場合を考える．効用関数は次で与えられるとする．

$$R_1'(i) = \begin{cases} -ci, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ v_0 + ui, & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{11}$$

OLA 停止領域は

$$\begin{aligned} B_1 &= \{i : (M-i)c \geq v_0 + u(i+1) - (i+1) - (M-i-1)c(i+1)\} \\ &= \{i : (2c+u-1)i + (v_0 + u - (M-1)c - 1) \leq 0\}. \end{aligned}$$

で表される．ゆえに，$2c+u-1 < 0$ のとき，OLA 停止領域は closed であり，最適停止領域となる．

最適停止規則は $2c+u-1 < 0$ のとき，

$$(2c+u-1)i + (v_0 + u - (M-1)c - 1) \leq 0$$

を満たす最初の i で停止する，である．

2.2.2 対数関数型損失と線形評価額

次の効用関数を考える．

$$R_2'(i) = \begin{cases} \log \dfrac{T-i}{T}, & \text{時刻 } i \text{ でおりたとき} \\ v_0 + ui & \text{落札したとき.} \end{cases} \tag{12}$$

OLA 停止領域は

$$B_2 = \left\{ i : \log \frac{T-i}{T} \geq \frac{1}{M-i}\{v_0 + u(i+1)\} + \frac{M-i-1}{M-i} \log \frac{T-i-1}{T} \right\}.$$

で与えられる．OLA 関数を

$$h_2(i) = (M-i) \log \frac{T-i}{T-i-1} - v_0 - u(i+1) + \log \frac{T-i-1}{T}.$$

とすると，

$$\frac{d^2 h_2}{di^2} > 0$$

であるので，OLA 関数は凹である．したがって，自明でない OLA 停止領域が存在するためには $h_2(0) < 0$，すなわち，$(M-1)\log(T/(T-1)) - v_0 - u < 0$ である必要がある．上の条件が成り立つとき，

$$B_2 = \{i : h_2(i) > 0\}$$

は closed であり，最適停止領域となる．そして，最適停止規則は $(M-1)\log(T/(T-1)) - v_0 - u < 0$ を満たす最初の i で停止する，である．

2.2.3 分数関数型損失と線形評価額

$$R_3' = \begin{cases} -\dfrac{T}{T-i}, & \text{時刻 i でおりたとき} \\ v_0 + ui & \text{落札したとき} \end{cases} \tag{13}$$

の形の効用関数を考える．OLA 停止領域は

$$B_3 = \left\{ i : \frac{T(M-1)}{(T-i-1)(T-i)} \geq v_0 + u(i+1) \right\}$$

と表される．OLA 関数を

$$h_3(i) = \frac{T(M-1)}{(T-i-1)(T-i)} - v_0 - u(i+1)$$

と書くと，OLA 関数の 2 回微分が正であるので，自明でない OLA 停止領域が存在するためには $h_3(0) < 0$ かつ $h_3(T-1) > 0$，すなわち，$(M-T)/(T-1) - v_0 - u < 0$ かつ $T(M-T)/2 - v_0 - uT > 0$ が必要である。上の 2 つの条件が成り立つとき，B_3 は closed であり，最適となる．．

最適停止規則は $(M-T)/(T-1) - v_0 - u < 0$ かつ $T(M-T)/2 - v_0 - uT > 0$ のとき，

$$\frac{T(M-1)}{(T-i-1)(T-i)} - v_0 - u(i+1) > 0$$

を満たす最初の i で停止する，である．

3 下降オークション

下降オークションでは，ある品物の価格がだんだん下がっていき，購入したい値になったときに入札する．オランダの花卉市場で用いられていることから名づけられたダッチオークションがその代表例である．

いくつかの同種の品物がオークションに出されているとする．価格が最高額 M から下降していく場合を考える．このとき，利得を最大にするように品物を手に入れたい．

3.1 残りの個数が未知で、売り切れる時刻 N が一様分布に従う場合

まずはじめには，品物の数は考えず，品物がいつ売り切れるか，すなわちオークションがいつ終わるかについてのみ考える．

品物が売り切れる時刻 N の事前分布が区間 $[1, M]$ の一様分布に従うとすると，

$$P(N=j)=\frac{1}{M},\ \ j=1,2,\ldots,M,$$

また，時刻 i における N の事後分布は

$$P(N=j|N>i)=\frac{1}{M-i},\ \ i=1,2,\ldots,M-1,\ \ j=i+1,i+2,\ldots,M$$

となる．

時刻が 1 進むごとに価格が 1 単位ずつ下がっていくとすると，利得は 1 ずつ増えることになる．時刻 i での利得関数は次のように表されるとする．

$$\Pi(i)=\begin{cases} v+i, & \text{落札したとき} \\ 0, & \text{落札できなかったとき} \end{cases} \tag{14}$$

このとき，最適方程式は

$$\begin{aligned} W_i &= \max\{\Pi(i), P(N=i+1|N>i)\cdot 0+P(N=i+1|N>i)W_{i+1}\} \\ &= \max\left\{v+i, \frac{M-i-1}{M-i}W_{i+1}\right\} \end{aligned}$$

OLA 停止領域は

$$B=\left\{i: v+i \geq \frac{M-i-1}{M-i}(v+i+1)\right\} \tag{15}$$

不等式を解くと，

$$i \geq \frac{M-v-1}{2} \tag{16}$$

したがって，OLA 停止領域は closed であることがわかり，最適停止領域となる．最適停止規則は，(16) を満たす最小の i を i^* とすると，i^* で停止，つまり品物を買うことになる．また，i^* 以前に品物が売り切れてしまった場合には手に入れられないことになる．

3.2 残りの個数が既知の場合

品物の残り数がわかる場合について考える．このとき，単位時間当たりに売れる品物の数がポアソン分布に従うと仮定する．ポアソン分布のパラメータ λ を既知とする．計数過程 $N(t)$ の分布について

$$P(N(s+1)-N(s)=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

となる．また，利得関数を次のように考える．

$$\Pi(s) = \begin{cases} v+s, & \text{落札したとき} \\ 0, & \text{落札できなかったとき} \end{cases} \tag{17}$$

時刻 s で残り j 個のとき得られる最大期待利得を $W(s,j)$ とおくと，最適方程式は

$$W(s,j) = \max\left\{v+s, \sum_{k=1}^{j} Pr(N(s+1)-N(s)=k)W(s+1,j-k)\right\} \tag{18}$$

時刻 s で残り j 個の状態を (s,j) と表すことにする．このとき，OLA 停止領域は

$$\begin{aligned} B &= \left\{(s,j) : v+s \geq \sum_{k=1}^{j} Pr(N(s+1)-N(s)=k)(v+s+1)\right\} \\ &= \left\{(s,j) : \frac{v+s}{v+s+1} \geq \sum_{k=1}^{j} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ かつ } v+s+1>0\right\} \end{aligned}$$

で与えられる．OLA 関数を

$$H(s,j) = \frac{v+s}{v+s+1} - \sum_{k=1}^{j} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{19}$$

とすると，OLA 停止領域は

$$B = \{(s,j) : H(s,j) \geq 0 \text{ かつ } v+s+1>0\} \tag{20}$$

と書くことができる．$H(s,j)$ は j について減少，s について増加するので，単調であることがわかる．つまり，OLA 停止領域 B は最適停止領域となる．

最適停止規則は $v+s+1>0$ かつ $(v+s)/(v+s+1) \geq e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{j}\lambda^k/k!$ を満たす最初の (s,j) で停止する，である．

謝辞　本研究は日本学術振興会特別研究員制度の助成により行われたものである．

参考文献

[1] 穴太 克則 (2000)，タイミングの数理，朝倉書店，東京．

[2] Y. S. Chow, H. Robbins, and D. Siegmund(1971), *Great Expectations: Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Co., Boston.

[3] P. Klemperer, (2004), *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton.

[4] V. Krishna(2002), *Auction Theory*, Academic Press, San Diego.

[5] S. M. Ross(1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[6] L. C. Thomas(1984), *Games, Theory and Applications*, Ellis Horwood, Chichester.