数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 163-170

N 人売り出しのタイミング・ゲーム

大阪府立大学　総合科学部・大学院理学系研究科　寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）
大阪府立大学　総合科学部・大学院理学系研究科　北條仁志（Hitoshi Hohjo）
Department of Mathematics and Information Sciences
Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

1．はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりするn人非0和ゲームである。

N人のプレーヤ（Player 1,⋯,n）が、小豆や大豆といった生産物の販売権を占有している。各プレーヤの市場占有率は1/nであり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、n人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すのが最適かのタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、n 人の誰もが売りに出さない間は時間の経過に伴って上昇する。しかし、誰か一人が自分の持分を売りに出すと急激に（不連続的に）評価額は下落し、その後はまた時間の経過のしたがって上昇する。このような評価額の上昇と急激な下落が残りn-1人全員が売りつくすまで繰りかえされる。N人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額の変化と、他のn-1人の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあっては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。n人に誰か一人のプレーヤが売りに出した瞬間、そのことが直ちに残りn-1人のプレーヤに知られてしまう場合、そのプレーヤはノイジーな状態にあると言われる。逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、そのことが残りn-1人の誰にも知られない場合、そのプレーヤはサイレントな状態にあると言う。

2．記号と仮定

問題を見やすくするため、1期間のゲームを考え、期間は単位区間 [0, 1] で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$：n人のどのプレーヤもまだ売りに出していないときの、時刻 $t\in[0, 1]$における生産物の価値。

微分可能であり　$v(t)>0$ for $t\in[0, 1]$ を仮定する。

r：n 人の誰か 1 人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$0 < r < 1$

と仮定する。

すなわち、誰か 1 人のプレーヤが売りに出すと、$t \in [0, 1]$ での評価額は $v(t)$ から $rv(t)$ へ減少する。　また、k 人のプレーヤが売りに出した後は $r\ v(t)$ へ減少する。ここで、もし k 人のプレーヤが同時に売り出したときは、その時点での生産物の評価額を k 人で平等に分け合うことになるとする。

3．2人売り出しのタイミング・ゲーム

3.1 サイレント・ゲーム

ここでは、2人のプレーヤは共にサイレントな状態にあるとする。そうすると、互いに相手が既に売りに出したのか、まだ出していないのかがわからず、自分が売りに出した時初めて、生産物のその時点における評価額がわかり、結果として相手プレーヤの行動を知ることとなる。従って、Player I , II の純戦略をそれぞれ $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ とすることが出来、この場合の I への期待利得を $M_1(x, y)$ と II への期待利得を $M_2(x, y)$ は次のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(x), & x > x \end{cases} \quad ; \qquad (1)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(y), & y > x \end{cases} \qquad (2)$$

定理 1. $rv(1) > v(0)$ とする。この時、a^0 を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間 $[0, 1]$ における唯一の根とし、さらに混合戦略として

$$\begin{aligned} F^0(z) &= 0, & 0 < z < a^0 \\ &= [1/(1-r)]\,[1-\{v(a^0)/v(z)\}], & a^0 \quad z \leqq 1 \end{aligned}$$

とする。そうすると (F^0, F^0) は非 0 和ゲーム(1)と(2)に対しての 1 つの平衡点となる。この時、対応する I への平衡値 v_1 および II への平衡値 v_2 は以下のようになる：

$$v_1 = M_1(F^0, F^0) = rv(1) \quad ; \qquad v_2 = M_2(F^0, F^0)。$$

定理 2. $(1/2)v(0) \leqq v(0)$ とする。この時、次のような二つの混合戦略を考える：

$$F_0(z) = 1-\{1/(1-r)\}\,[1-\{rv(1)/v(0)\}], \qquad z = 0$$
$$= \{1/(1-r)\}\,[1-\{rv(1)/v(z)\}], \qquad 0 < z \leqq 1 \quad ;$$
$$F_1(z) = \{1/(1-r)\}\,[1-\{rv(0)/v(z)\}], \qquad 0 \leqq z < 1$$
$$= 1-\{1/(1-r)\}\,[1-\{rv(0)/v(1)\}, \qquad z = 1,$$

すなわち、前者は点0に、後者は点1に、それぞれ mass part を持つように混合戦略（cdf）を選ぶ。そうすると（$F_0(x), F_1(y)$）および（$F_1(x), F_0(y)$）は非0和ゲーム (1) および (2) の平衡点となる。 この時、対応する平衡値は、それぞれ

$$\begin{cases} M_1(F_0, F_1) = v(0) \\ M_2(F_0, F_1) = rv(1) \end{cases} , \qquad \begin{cases} M_1(F_1, F_0) = rv(0) \\ M_2(F_1, F_0) = v(0) \end{cases}$$

となる。

定理 3. $rv(1) < (1/2)$ を仮定する。そうすると (0, 0) は非0和ゲーム（1）と（2）の Nash 平衡点となる。この時、対応する平衡値は

$$M_1(0,\ 0) = M_2(0,\ 0) = (1/2)v(0)$$

となる。

この定理は、時間が次の周期までのいっぱい経過しても、それ程生産物の価値が上がらない時は、両プレーヤとも出来るだけ早くその生産物を売りに出すのが最適となることを意味する。

3.2 ノイジーゲーム

ここでは、両プレーヤともノイジープレーヤである場合を扱う。Player I と II の純戦略を、それぞれ、$x \in [0, 1]$ と $y \in [0, 1]$ であるとする。ここに、戦略 x とは、I は x を決め、もし II がこの x までに自分の生産物を売りに出さなければ x で売りに出し、II が x までに既に売りに出しておれば $rv(t)$ 細大にする時刻 1 まで 待ってから売りに出すことを意味する。戦略 y についても同様に定義される。 そうすると、I への期待利得 $M_1(x, y)$ と II への期待利得 $M_2(x, y)$は次式のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(1), & x > y \end{cases} \quad ; \qquad (3)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(1), & x > y \end{cases} \qquad (4)$$

利得関数の形と構造から、純戦略の中に平衡戦略は存在しない。さらに、前節のような密度部分と mass 部分とで構成される *cdf* のクラスの中にも見つけることが出来ない。これは $x = y$ での利得関数に 1/2 の係数がかかっていることに原因している。

この利得関数(3)と(4)に対しては、次の定理が成立する。

定理 4. $rv(1) > v(0)$ とする。　このとき、a^0を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間[0, 1]に於ける唯1つの根とし、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$G^0(z) = \begin{cases} 0, & z < a^0 \\ \int_{a^0}^{z}(1/\delta), & a^0 < z < a^0 + \delta \\ 1, & z > a^0 + \delta \end{cases}$$

を考える。ここに δ は

$$\delta = v^{-1}(rv(1) + \varepsilon) - v^{-1}(rv(1)) > 0 .$$

そうすると $(G^0(x), G^0(y))$ は非０和ゲーム（４）と（５）の１つの ε 平衡点である。すなわち、任意の混合戦略（*cdf*）に対して

$$M_1(F, G^0) < rv(1) + \varepsilon ;$$
$$M_2(G^0, F) < rv(1) + \varepsilon ,$$

が成立する。

定理 5. $(1/2)v(0) \leqq rv(1) < v(0)$ とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、以下の cdf $G_0^0(x)$ を考える：

$$G_0^0 = \int_0^z (1/\delta)dx, \qquad 0 \leqq z \leqq \delta$$
$$= 1, \qquad \delta < z \leqq 1$$

ここに、$\delta = v^{-1}(v(0) + \varepsilon)$.

そうすると、$(G_0^0(x), G_0^0(y))$ は非０和ゲーム（３）と（４）の ε 平衡点となる。すなわち、任意の混合戦略 $F(\cdot)$ に対して

$$M_1(F, G_0^0) \leqq v(0) + \varepsilon \quad ; \quad M_2(G_0^0, F) \leqq v(0) + \varepsilon$$

が成立する。

定理 6. $rv(1) \leqq (1/2)v(0)$ とする。このとき、純戦略の対 $(0, 0)$ は、非０和ゲーム（３）と（４）に対しての Nash 平衡点となる。対応する平衡値は次のように与えられる。

$$M_1(0, 0) = M_2(0, 0) = (1/2)v(0)$$

この定理は、ノイジー・ゲームにおいては、相手の売り出し時刻が情報として伝えられるため、やはり $rv(1)$ の値が $(1/2)v(0)$ に比べて小さい場合は、出来るだけ早く売り出すのが最適となることを意味している。

４．Ｎ人売り出しのタイミング・ゲーム

本節では、２人での結果を踏まえて、n 人ゲームへの拡張を試みる。

n 人売り出しのサイレント・ゲーム

この場合、各プレーヤを順に Player 1, 2, …, n と呼ぶことにし、前節と同様に Player i の純戦略を $x_i \in [0, 1]$ とする。そこで、前プレーヤの条件は全て同じであるから、Player i 対 残り n-1 人のゲームに注目して、Player I への期待利得を $M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と置くと

$$M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} v(x_1), & 0 \leqq x_1 < y_{(1)} \\ rv(x_1) & y_{(1)} \leqq x_1 < y_{(2)} \\ r^2 v(x_1) & y_{(2)} \leqq x_1 < y_{(3)} \\ \cdots\cdots & \\ r^k v(x_1) & y_{(k)} \leqq x_1 < y_{(k+1)} \\ \cdots\cdots & \\ r^{n-1} v(x_1) & y_{n-1} \leqq x_1 < 1 \end{cases}$$

が得られる。ここに、$y_{(1)}, y_{(2)}, \cdots, y_{(n-1)}$ は、残り n-1 人の純戦略を小さい方から順 に並べたもので、すなわち、$y_{(1)} \leqq y_{(2)} \leqq \cdots \leqq y_{(n-1)}$ である。 また、この時

$$M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (1/m) r^k v(x_1), \qquad y_{(k)} < x_1 = \cdots = y_{(k+m)}$$

も成立する。

上記の期待利得は全プレーヤに対して共通であるから、平衡戦略はどのプレーヤにも共通の混合戦略(cdf) F から構成されていると仮定できる。そして、２人ゲームの結果から、このＦは、区間 $(a, 1) \subset [0,1]$ 上の密度関数 $f(x) > 0$ で構成されるとすると $a < x \leqq 1$ となる x 対して

$$M_1(x, F, F, \cdots, F) = v(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \{rF(x)\}^k \{1-F(x)\}^{n-k-1}\right]$$

が成立するので

$$\begin{aligned} M_1(x, F, F, \cdots, F) &= v(x), & 0 \leqq x < a \\ &= v(x)[1-(1-r)F(x)]^{n-1}, & a \leqq x \leqq 1 \end{aligned}$$

を得る。そこで

$$M_1(x,F,F,---,F)=const \quad \text{for } x\in(a,1)$$

が成立するようにすると

$$v(x)[1-(1-r)F(x)]=(n-1)(1-r)f(x)v(x), \qquad a<x<1$$

が得られ、結局

$$F(x)=\{1/(1-r)\}[1-\{c/v(x)\}^{1/(n-1)}], \qquad a<x<1$$

が成立しなければならないことになる。ここに、cは積分定数である。ところで

$$F(a)=0 \qquad \text{かつ} \qquad F(1)=1$$

が成立しなければならないから

$$c=r^{n-1}v(1) \quad ; \qquad v(a)=r^{n-1}v(a)$$

が得られる。しかし、この条件は $v(0)\leqq r^{n-1}v(1)$ に限り成立する。そこで、この成立を仮定すると[0, 1]内に $v(a)=r^{n-1}v(1)$ を満足する a が唯一つ存在し、この時

$$\begin{aligned} M_1(x,F,F,---,F)&=v(x)<v(a)=r^{n-1}v(1), && 0\leqq x<a^0 \\ &=v(a)=r^{n-1}v(1), && a^0\leqq x\leqq 1 \end{aligned}$$

が成立する。

定理7. $v(0)\leqq r^{n-1}v(1)$ とする。この時 a^0 を方程式 $v(a)=r^{n-1}v(1)$ の区間[0, 1]における唯一つの根とし、さらに混合戦略として

$$\begin{aligned} F^0(x)&=0, && 0\leqq x<a^0 \\ &=\{1/(-r)\}[1-\{v(a)/v(x)\}^{1/(n-1)}], && a^0\leqq x\leqq 1 \end{aligned}$$

を考える。そうすると $(F^0,F^0,---,F^0)$ は非0和ゲーム（3）と（4）への一つのNash平衡点となる。また、対応するPlayer i への平衡値v_iは

$$v_i=M_i(F^0,F^0,---,F^0)=r^{n-1}v(1)$$

となる。

次に我々は $v(0)>r^{n-1}v(0)$ の時を考察する。この場合、点0と点1のいずれか一方にmassを残すタイプの混合戦略は、3人以上いると少なくとも2人は必ずどちらかの点でぶつかり合うので、2人ゲームのような平衡戦略は成立しない。そこでε-平衡の意味での平衡点を見つけることにする。

そこで、まず $(1/n)v(0)\leqq r^{n-1}v(1)\leqq v(0)$ の場合に際し、任意のε>0に対して以下ようなcdf $G_0^0(\cdot)$を考える：

$$\begin{aligned} G_0^0(x)&=\int_0^x(1/\delta)dx, && 0\leqq x\leqq \delta \\ &=1, && \delta<x\leqq 1 \end{aligned}$$

ここに、$\delta=v^{-1}(v(0)+\varepsilon)$ である。

そうすると

$$M_1(x,G_0^0,---,G_0^0)=v(x)[1-(1-r)G_0^0]^{n-1}, \qquad 0\leqq x\leqq \delta$$

$$=r^{n-1}v(x), \qquad \delta<x\leqq 1$$

を得る。また

$$v(x)[1-(1-r)G_0^0(x)]^{n-1}\leqq v(\delta)=v(0)+\varepsilon, \qquad 0\leqq x\leqq \delta$$

$$r^{n-1}v(x)\leqq r^{n-1}v(1)<v(0), \qquad \delta<x\leqq 1$$

であるから

$$M_1(x,G_0^0,---,G_0^0)\leqq v(0)+\varepsilon, \qquad 0\leqq x\leqq 1$$

が成立する。

定理 8. $(1/n)v(0)\leqq r^{n-1}v(1)<v(0)$ とする。この時、任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$G_0^0(x)=\int_0^x(1/\delta)dx, \qquad 0\leqq x\leqq \delta$$

$$=1, \qquad \delta<x\leqq 1$$

ここに、$\delta=v^{-1}(v(0)+\varepsilon)$

と cdf を選ぶと、$(G_0^0,G_0^0,---,G_0^0)$ は非0和ゲーム(3)と(4)に対しての ε-平衡戦略の組

となる。この時、任意の cdf F に対して

$$M_1(F,G_0^0,---,G_0^0)\leqq v(0)+\varepsilon$$

が成立する。

最後に、我々は $r^{n-1}v(1)<(1/n)v(0)$ の場合を考察する。この時

$$M_1(0,x_2,---,x_n)=v(0), \qquad 0<y_{(1)}\leqq ------\leqq y_{(n-1)}$$

$$=(1/m)v(0), \qquad 0=y_{(1)}=---=y_{(m)}<---<y_{(n-1)}$$

であり、かつ

$$M_1(x,0,---,0)=(1/n)v(0), \qquad x=0$$

$$=r^{n-1}v(x)\leqq r^{n-1}v(1), \qquad x>0$$

であるから、次の定理を得る。

定理9. $r^{n-1}v(1)<(1/n)v(0)$ とする。この時 (0, 0, ----, 0) は非0和ゲーム（3）と（4）に対してのNash平衡点となる。この時、各プレーヤへの平衡値は

$$M_i(0,0,---,0)=(1/n)v(0)$$

となる。

nが十分大きいときは $r^{n-i}v(1)<(1/n)v(0)$ と考えてよい。すなわち販売権を持つ者がある程度多くなると、生産物を最初から売りに出されることになり、その結果価格も安定する。定理9はこの事実を説明付ける。

ノイジー・ゲームに関しては、各プレーヤは他の n-1 人の売り出し時刻が全て学習できるので、一般的な定式化にはかなりの工夫が要求される。しかし、nが十分大きい時は、定理9と同種の結果が成立する。

5．今後へ残された問題

1）n人ノイジー・ゲームの展開

2）ここではrを定数と仮定したが、経過時刻 $t\in[0,1]$ の関数とした場合への一般化は複雑ではあるが、現実的であり、面白い。また、ここでは、1人が売り出す度に評価額が割引率rで減少させる仮定を設けたが、売り出した人数分の1となる考え方もある。現実の市場がどのように動いているか、十分な調査が必要。

参考文献

1. M.Dresher, *Games of Strategy : Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey, 1554.
2. S.Karlin, *Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Econimics* Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y.Teraoka and Y.Yamada, Games of production development in manufacturing, *Lecture Note in Economics and Mathematical Systems* 445, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing*, Springer, Berlin, 1997, 58-67.
4. Y.Teraoka and H.Hohjo, N-person games on territory, *Game Theory and Applocations* Vol. V, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2000, 134-141.