数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 179-186

三企業間の競合的在庫問題に関する一考察

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1　はじめに

既存の研究である Hohjo,H.[3] や Hohjo,H., Teraoka,Y.[4-6] では、２者に対する客の移動を考慮に入れた需要の再配分をもつ在庫管理モデルについてナッシュ平衡対の観点から解析が行われてきた。また、Lippman,S.A., McCardle,K.F.[7] や Parlar,M.[8] は、企業数において一般的な競合的在庫問題を扱っているが、抽象的な解析結果を導いているため、現実的な問題に適用するのが難しい。本稿では、現実的な問題に対応できるよう客の移動を考慮に入れた需要の再配分をもつ３者の在庫管理モデルを扱うことにより、具体的な戦略を探る。数学的な定式化として、ゲーム論的にナッシュ平衡点の観点から解析を試みる。三者が競合している場合および三者のうちの二者が協力した場合について論じる。

2　モデル

客の移動を考慮に入れた確定的需要量に対する３店舗間での単一期間競合的在庫管理問題について考える。３つの店舗は平面上の異なる地点に配置されており、同時刻にある商品の販売を開始しようとしている。商品の入荷は期首のみ可能であり、後から補充をして販売することは許されていない。客は販売開始までにすでに店先に並んでいる状態であり、期首の突発的需要とみなすことができる場合について考える。これらの客以外に需要は存在しないものとする。客は、初めに訪れた店で購入することができなければ、他の２つの店のうち、距離の近い方の店へ向かい、商品の購入を試みる。各店舗の入荷量は客には知らされておらず、客は店に訪れるまで商品の有無についての情報を得ることもできない。また、客の購買威力は非常に高く、２つめの店でも購入することができなければ、最後の店に訪れようとする。そして３店をまわっても購入することができなければ、その時点で客は購入をあきらめる。各客の移動速度は一定で等しいとする。本稿では、企業間の距離を考慮しているので、需要の再配分までに移動のためのタイムラグが生じる。他の２つの店までの距離の和が最小となる店舗をプレーヤ１と呼ぶことにする。また、プレーヤ１から近い店をプレーヤ２と呼び、残りの店舗をプレーヤ３と呼ぶことにする。このとき、客がプレーヤ i $(i=1,2,3)$ からプレーヤ j $(j=1,2,3,\ i\neq j)$ まで移動するときに生じるタイムラグを λ_{ij} で表すと、

$$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}\ (i,j=1,2,3,i\neq j),\quad \lambda_{ii}=0\ (i=1,2,3),\quad \lambda_{12}\leq\lambda_{13}\leq\lambda_{23} \tag{1}$$

が成り立つ。プレーヤ i の計画期間を T_i とする。本稿では、各店舗の計画期間は、客の総移動時間より長い、すなわち、$\lambda_{12}+\lambda_{23}<\min\{T_1,T_2,T_3\}$ であると仮定する。各プレーヤ $i(i=1,2,3)$ に対して z_i を期首発注量、b_i を期首の需要量、c_i,h_i,p_i をそれぞれ単位当たりの発注費用、単位時間単位当たりの在庫保持費用、単位時間単位当たりの品切損失費用とする。互いに非協力的である各プレーヤの目的は、発注、保持、品切損失、および販売に関する自分自身の総期待費用を最小にするような発注量を決定することである。

3 費用関数

我々は各プレーヤの総費用関数の導出にあたり、次のような２０の領域に分割して求める必要がある：

(A) $z_i \geq b_i,\ i=1,2,3$
(B) $z_2 \geq b_2,\ 0 \leq z_3 < b_3,\ z_1+z_3-b_1-b_3 \geq 0$
(C) $z_1 \geq b_1,\ z_3 \geq 0,\ z_1+z_3-b_1-b_3 < 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0$
(D) $z_i \geq b_i, i=1,2,\ z_3 \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(E) $0 \leq z_2 < b_2,\ z_3 \geq b_3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 \geq 0$
(F) $z_1 \geq b_1,\ z_2 \geq 0,\ z_1+z_2-b_1-b_2 < 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0$
(G) $z_i \geq b_i, i=1,3,\ z_2 \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(H) $0 \leq z_1 < b_1,\ z_3 \geq b_3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 \geq 0$
(I) $z_1 \geq 0,\ z_2 \geq b_2,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0,\ z_1+z_2-b_1-b_2 < 0$
(J) $z_1 \geq 0,\ z_i \geq b_i, i=2,3,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(K) $0 \leq z_i < b_i, i=2,3,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0$
(L) $0 \leq z_2 < b_2,\ z_3 \geq 0\ z_1+z_2-b_1-b_2 \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(M) $z_1 \geq b_1,\ z_2 \geq 0,\ 0 \leq z_3 < b_3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 < 0$
(N) $0 \leq z_i < b_i, i=1,3,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0$
(O) $0 \leq z_1 < b_1,\ z_3 \geq 0,\ z_1+z_2-b_1-b_2 \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(P) $0 \leq z_i < b_i, i=1,3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 > 0$
(Q) $0 \leq z_i < b_i, i=1,2,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \geq 0$
(R) $z_1 \geq 0,\ 0 \leq z_2 < b_2,\ z_2+z_3-b_2-b_3 \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$
(S) $0 \leq z_1 < b_1,\ z_2 \geq 0\ z_3 \geq b_3,\ z_2+z_3-b_2-b_3 < 0$
(T) $0 \leq z_i < b_i, i=1,2,3$

ここでは、(L) の場合についてのみ言及する。この状況では、プレーヤ１のみが最初の客に対して需要を満たし、他のプレーヤは需要を満たしきれない。商品を購入できなかった客は、それぞれプレーヤ１へ購入に向かうが、プレーヤ２から再配分された客が先に到着し、この時点では十分な商品を保持しているため、すべての客が需要を満たされる。一方、プレーヤ３から再配分された客は、プレーヤ１の在庫量が十分でないため、一部の客しか商品を購入することができず、需要を満たされなかった客はプレーヤ２を訪れる。言うまでもなく、３店目を訪れている客は需要を満たされはしない。これらを数学的に定式化すると、以下のようになる：

プレーヤ１の時刻 t における在庫量 $Q^1(t)$ は

$$Q^1(t) = \begin{cases} z_1 - b_1, & 0 \leq t < \lambda_{12} \\ z_1+z_2-b_1-b_2, & \lambda_{12} \leq t < \lambda_{13} \\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i), & \lambda_{13} \leq t \leq T_1 \end{cases} \tag{2}$$

で表せる。(2) 式より、期平均在庫量 $I_1^1(\mathbf{z})$、期平均在庫不足量 $I_2^1(\mathbf{z})$ は

$$I_1^1(\mathbf{z}) = \frac{\lambda_{13}}{T_1}(z_1-b_1) + \frac{\lambda_{13}-\lambda_{12}}{T_1}(z_2-b_2) \tag{3}$$

$$I_2^1(\mathbf{z}) = \left(1-\frac{\lambda_{13}}{T_1}\right)\sum_{i=1}^{3}(b_i-z_i) \tag{4}$$

となる。ここで、$\mathbf{z}=(z_1,z_2,z_3)$ である。このとき、プレーヤ１における期平均総費用 $C^1(\mathbf{z})$ は

$$C^1(\mathbf{z}) = c_1z_1 + h_1I_1^1(\mathbf{z}) + p_1I_2^1(\mathbf{z}) - r_1z_1 \tag{5}$$

である；

プレーヤ２の時刻 t における在庫量 $Q^2(t)$ は

$$Q^2(t) = \begin{cases} z_2 - b_2, & 0 \leq t < \lambda_{12} + \lambda_{13} \\ z_1 + 2z_2 + z_3 - b_1 - 2b_2 - b_3, & \lambda_{12} + \lambda_{13} \leq t \leq T_1 \end{cases} \tag{6}$$

で表せる。(6) 式より、期平均在庫不足量 $I_2^2(\mathbf{z})$ は

$$I_2^2(\mathbf{z}) \quad = \quad \left(2 - \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{T_2}\right)(b_2 - z_2) + \left(1 - \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{T_2}\right)(b_1 + b_3 - z_1 - z_3) \tag{7}$$

と計算される。このとき、プレーヤ２における期平均総費用 $C^2(\mathbf{z})$ は

$$C^2(\mathbf{z}) \quad = \quad c_2 z_2 + p_2 I_2^2(\mathbf{z}) - r_2 z_2 \tag{8}$$

である；

プレーヤ３の時刻 t における在庫量 $Q^3(t)$ は

$$Q^3(t) = z_3 - b_3, \quad 0 \leq t \leq T_3 \tag{9}$$

で表せる。(9) 式より、期平均在庫不足量 $I_2^3(\mathbf{z})$ は

$$I_2^3(\mathbf{z}) \quad = \quad b_3 - z_3 \tag{10}$$

であり、プレーヤ３における期平均総費用 $C^3(\mathbf{z})$ は

$$C^3(\mathbf{z}) \quad = \quad c_3 z_3 + p_3 I_2^3(\mathbf{z}) - r_3 z_3 \tag{11}$$

となる。

その他の範囲における総費用関数は Appendix に付記する。総費用関数は各範囲においていずれも各決定変数について線形関数であり、関数 $C^i(\mathbf{z})$, $i = 1, 2, 3$ の連続性についても容易に示せる。

4　支配戦略

前節で示した費用関数 $C^i(\mathbf{z})$, $i = 1, 2, 3$ において各領域 (A)-(T) における支配戦略を求めると、以下の結果を得る：

結果　１.

$$k_i = \frac{r_i - c_i + p_i}{h_i + p_i} T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

とする。このとき、各領域における支配戦略は表のようである：

支配戦略	領域
(b_1, b_2, b_3)	(A),(B),(C) $k_1 \leq \lambda_{13}$, (D) $k_1 \leq \lambda_{13}, k_2 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (E), (F) $k_1 \leq \lambda_{12}$, (G) $k_1 \leq \lambda_{12}, k_3 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (H), (I) $k_2 \leq \lambda_{12}$, (J) $k_2 \leq \lambda_{12}, k_3 \leq \lambda_{12} + \lambda_{23}$, (K), (L) $k_1 \leq \lambda_{13}$, (M) $k_1 \leq \lambda_{12}$, (N), (O) $k_2 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (P) $k_2 \leq \lambda_{12}$, (Q), (R) $k_3 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (S) $k_3 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (T)
(b_1, b_2, b_3) と $(b_1 + b_3, b_2, 0)$ を結ぶ線分上	(C) $k_1 > \lambda_{13}$, (D) $k_1 > \lambda_{13}, k_2 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$
(b_1, b_2, b_3) と $(b_1, b_2 + b_3, 0)$ を結ぶ線分上	(D) $k_1 \leq \lambda_{13}, k_2 > \lambda_{12} + \lambda_{13}$
(b_1, b_2, b_3) と $(b_1 + b_2, 0, b_3)$ を結ぶ線分上	(F) $k_1 > \lambda_{12}$, (G) $k_1 > \lambda_{12}, k_3 \leq \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (M) $k_1 > \lambda_{12}$
(b_1, b_2, b_3) と $(b_1, 0, b_2 + b_3)$ を結ぶ線分上	(G) $k_1 \leq \lambda_{12}, k_3 > \lambda_{12} + \lambda_{13}$, (S) $k_3 > \lambda_{12} + \lambda_{13}$

支配戦略	領域
(b_1,b_2,b_3) と $(0,b_1+b_2,b_3)$ を結ぶ線分上	(I) $k_2>\lambda_{12}$, (P) $k_2>\lambda_{12}$, (J) $k_2>\lambda_{12},k_3\leq\lambda_{12}+\lambda_{23}$
(b_1,b_2,b_3) と $(0,b_2,b_1+b_3)$ を結ぶ線分上	(J) $k_2\leq\lambda_{12},k_3>\lambda_{12}+\lambda_{23}$
$(b_1,b_2,b_3),(b_1,b_2+b_3,0),(b_1+b_3,b_2,0)$ を頂点とする三角形上	(D) $k_1>\lambda_{13},k_2>\lambda_{12}+\lambda_{13}$
$(b_1,b_2,b_3),(b_1,0,b_2+b_3),(b_1+b_2,0,b_3)$ を頂点とする三角形上	(G) $k_1>\lambda_{12},k_3>\lambda_{12}+\lambda_{13}$
$(b_1,b_2,b_3),(0,b_2,b_1+b_3),(0,b_1+b_2,b_3)$ を頂点とする三角形上	(J) $k_2>\lambda_{12},k_3>\lambda_{12}+\lambda_{23}$
$(b_1,b_2,b_3),(b_1+b_2,0,b_3),(b_1+b_2+b_3,0,0),(b_1+b_3,b_2,0)$ を頂点とする平行四辺形上	(L) $k_1>\lambda_{13}$
$(b_1,b_2,b_3),(0,b_1+b_2,b_3),(0,b_1+b_2+b_3,0),(b_1,b_2+b_3,0)$ を頂点とする平行四辺形上	(O) $k_2>\lambda_{12}+\lambda_{13}$
$(b_1,b_2,b_3),(0,b_2,b_1+b_3),(0,0,b_1+b_2+b_3),(b_1,0,b_2+b_3)$ を頂点とする平行四辺形上	(R) $k_3>\lambda_{12}+\lambda_{13}$

これらの結果および関数の連続性から Nash 平衡点として唯一 (b_1,b_2,b_3) を得る。これは初期の突発的需要のみを考慮したモデルにおいては再配分される客に対する供給を考えるべきではないことを意味する。

5　二企業が協力する場合

前節まででは、三企業が非協力の場合を扱った。この節では、三企業のうち再配分の需要を獲得しにくい二企業（プレーヤ２およびプレーヤ３）がチェーン店化などにより、協力体制をとった場合について解析を行う。計画期間は簡潔化のため、すべて同じ期間 T として扱う。すなわち２節のモデルにおいて $T_i=T,\ i=1,2,3$ とする。また、プレーヤ２およびプレーヤ３は在庫管理に関するシステムの統合化により、それに関連する費用はすべて同一化されたものとする。$c=c_2=c_3,\ h=h_2=h_3,\ p=p_2=p_3,\ r=r_2=r_3$ とおく。このとき、プレーヤ２およびプレーヤ３の評価関数を $C^2(\mathbf{z})+C^3(\mathbf{z})$ とし、$C^{2+3}(\mathbf{z})$ と表す。このとき、費用関数 $C^1(\mathbf{z})$ と $C^{2+3}(\mathbf{z})$ において各領域 (A)-(T) における支配戦略を求めると、以下の結果が得られる：

結果２.

$$k_4=\frac{r_1-c_1+p_1}{h_1+p_1}T,\quad k=\frac{r-c+p}{h+p}T,\quad l=c+h\left(1-\frac{\lambda_{12}+\lambda_{13}}{T}\right)-p$$

とする。このとき、各領域における支配戦略は表のようである：

支配戦略	領域
(b_1,b_2,b_3)	(A),(B), (C) $k_4\leq\lambda_{13},l<0$, (D) $k_4\leq\lambda_{13}$, (E), (F) $k_4\leq\lambda_{12},l<0$, (G) $k_4\leq\lambda_{12}$, (H), (I) $c+h\left(1-\frac{\lambda_{23}}{T}\right)-p\left(1-\frac{\lambda_{12}}{T}\right)\geq 0$, (K), (L) $k_4\leq\lambda_{13}$, (M) $k_4\leq\lambda_{12}$, (N), (O), (Q), (R) $k\leq\lambda_{12}+\lambda_{23}$, (S), (T)
$(b_1+b_3,b_2,0)$	(C) $k_4>\lambda_{13},l\geq 0$
$(b_1+b_2,0,b_3)$	(F) $k_4>\lambda_{12},l\geq 0$
(b_1,b_2,b_3) と $(b_1+b_3,b_2,0)$ を結ぶ線分上	(C) $k_4>\lambda_{13},l<0$, (C) $k_4\leq\lambda_{13},l\geq 0$, (D) $k_4>\lambda_{13}$
(b_1,b_2,b_3) と $(b_1+b_2,0,b_3)$ を結ぶ線分上	(F) $k_4>\lambda_{12},l<0$, (F) $k_4\leq\lambda_{12},l\geq 0$, (G) $k_4>\lambda_{12}$, (M) $k_4>\lambda_{12}$

支配戦略	領域
(b_1,b_2,b_3) と $(0,b_1+b_2,b_3)$ を結ぶ線分上	(I) $c+h\left(1-\frac{\lambda_{23}}{T}\right)-p\left(1-\frac{\lambda_{12}}{T}\right)<0$, (J), (P)
(b_1,b_2,b_3) と $(0,b_2,b_1+b_3)$ を結ぶ線分上	(R) $k>\lambda_{12}+\lambda_{23}$
$(b_1,b_2,b_3),(b_1+b_2,0,b_3),(b_1+b_2+b_3,0,0)$, $(b_1+b_3,b_2,0)$ を頂点とする平行四辺形上	(L) $k_4>\lambda_{13}$

これらの結果および関数の連続性から Nash 平衡点として唯一 (b_1,b_2,b_3) を得る。

本稿では、各企業の初期需要量 b_i, $i=1,2,3$ を共通の既知数として与えてきたが、製品購入の事前予約等ができない場合には、未知の数として扱うのが当然である。このとき、企業は独自の何らかの分析を行うことによって需要量を予測するであろう。自社だけでなく他社の需要量をも予測しさえすれば、最大利益の見積額をはじき出すことは可能である。ただ、各社の需要の予測値が同一であるとは限らないため、利益の見積額との誤差は生じることであろう。他の企業の発注量に関する情報を得ていない場合には、上述の結果により最適な発注量を決定しようと思うのであれば、他の需要予測がいくらであろうと自社の初期の突発的需要量のみを予測し、その分だけを発注すれば良いと言える。

6 最後に

本稿では、客の移動を考慮に入れた確定的需要量に対する３店舗間での単一期間競合的在庫管理問題を提案した。他の企業の発注量に関する情報を得ていない場合、この問題に対する Nash 平衡点が唯一 (b_1,b_2,b_3) であることを導いた。また、他の企業の発注量に関する情報が１つでも事前にわかっている場合には、各自の予測値を用いることにより結果１および２からよりよい戦略を練ることができる。本研究は、需要の分布への依存性が強く、このようにシンプルな結果が得られるのは、本モデルで仮定したように突発的需要の場合に限る。需要分布が一般的な場合にも、同様にして結果を得られるが、総費用関数において相当数の場合わけを必要とするであろう。

本研究は、平成１６年度科学研究費補助金若手研究 (B)（課題番号 16710120）の援助によるものであることを付記する。

参考文献

[1] Bryant,J. (1980) Competitive equilibrium with price setting firms and stochastic demand, International Economic Review, Vol.21, 619-626.

[2] Heyman,D.P., Sobel,M.J. (1990) *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2*, Elsevier Science Publishers, North-Holland.

[3] Hohjo,H. (2001) A competitive inventory model with the customer's general choice probability, Computers & Mathematics with Applications, Vol.41, No.3-4, 523-530.

[4] Hohjo,H., Teraoka,Y. (2000) On a competitive inventory model with a customer's choice probability, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.43, No.3, 355-364.

[5] Hohjo,H., Teraoka,Y. (2002) A duopolistic inventory problem including the possibility that the customers give up purchasing the merchandise, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.55, No.2, 361-367.

[6] Hohjo,H., Teraoka,Y. (2003) A competitive inventory model with reallocation on a plane Market, Mathematical and Computer Modelling, Vol.38, No.11-13, 1191-1201.

[7] Lippman,S.A., McCardle,K.F. (1997) The competitive newsboy, Operations Research, Vol.45, No.1, 54-65.

[8] Parlar,M. (1988) Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands, Naval Research Logistics, Vol.35, 397-409.
[9] 児玉正憲 (1996)『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会.

Appendix.　各領域における総費用関数：

(A) $z_i \geq b_i,\ i = 1,2,3$

$$C^i(\mathbf{z}) = [c_i + h_i]z_i - [h_i + r_i]b_i, \quad i = 1,2,3$$

(B) $z_2 \geq b_2,\ 0 \leq z_3 < b_3,\ z_1 + z_3 - b_1 - b_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + h_1]z_1 - [h_1 + r_1]b_1 + [(1 - \lambda_{13}/T_1)h_1 + r_1](z_3 - b_3) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + h_2]z_2 - [h_2 + r_2]b_2 \\ C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 - p_3 - r_3]z_3 + p_3 b_3 \end{aligned}$$

(C) $z_1 \geq b_1,\ z_3 \geq 0,\ z_1 + z_3 - b_1 - b_3 < 0,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) \geq 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{13}h_1/T_1 - (1 - \lambda_{13}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1 - \lambda_{13}/T_1)p_1 - \lambda_{13}h_1/T_1]b_1 \\ &\quad +(1 - \lambda_{13}/T_1)p_1(b_3 - z_3) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + h_2]z_2 - [h_2 + r_2]b_2 + [(1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})/T_2)h_2 + r_2](z_1 + z_3 - b_1 - b_3) \\ C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 - p_3 - r_3]z_3 + p_3 b_3 \end{aligned}$$

(D) $z_i \geq b_i, i = 1,2,\ z_3 \geq 0,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) < 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{13}h_1/T_1 - (1 - \lambda_{13}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1 - \lambda_{13}/T_1)p_1 - \lambda_{13}h_1/T_1]b_1 \\ &\quad +(1 - \lambda_{13}/T_1)p_1(b_3 - z_3) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + (\lambda_{12} + \lambda_{13})h_2/T_2 - (1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})/T_2)p_2 - r_2]z_2 + [(1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})/T_2)p_2 \\ &\quad -(\lambda_{12} + \lambda_{13})h_2/T_2]b_2 + (1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})/T_2)p_2(b_1 + b_3 - z_1 - z_3) \\ C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 - p_3 - r_3]z_3 + p_3 b_3 \end{aligned}$$

(E) $0 \leq z_2 < b_2,\ z_3 \geq b_3,\ z_1 + z_2 - b_1 - b_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + h_1]z_1 - [h_1 + r_1]b_1 + [(1 - \lambda_{12}/T_1)h_1 + r_1](z_2 - b_2) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 - p_2 - r_2]z_2 + p_2 b_2 \\ C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + h_3]z_3 - [h_3 + r_3]b_3 \end{aligned}$$

(F) $z_1 \geq b_1,\ z_2 \geq 0,\ z_1 + z_2 - b_1 - b_2 < 0,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) \geq 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{12}h_1/T_1 - (1 - \lambda_{12}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1 - \lambda_{12}/T_1)p_1 - \lambda_{12}h_1/T_1]b_1 \\ &\quad +(1 - \lambda_{12}/T_1)p_1(b_2 - z_2) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 - p_2 - r_2]z_2 + p_2 b_2 \\ C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + h_3]z_3 - h_3 b_3 + [(1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})/T_3)h_3 + r_3](z_1 + z_2 - b_1 - b_2) \end{aligned}$$

(G) $z_i \geq b_i, i = 1,3,\ z_2 \geq 0,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) < 0$

$$\begin{aligned} C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{12}h_1/T_1 - (1 - \lambda_{12}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1 - \lambda_{12}/T_1)p_1 - \lambda_{12}h_1/T_1]b_1 \\ &\quad +(1 - \lambda_{12}/T_1)p_1(b_2 - z_2) \\ C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 - p_2 - r_2]z_2 + p_2 b_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + (\lambda_{12}+\lambda_{13})h_3/T_3 - (1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3 - r_3]z_3 + [(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3 \\
&\quad -(\lambda_{12}+\lambda_{13})h_3/T_3]b_3 - (1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3(z_1+z_2-b_1-b_2)
\end{aligned}
$$

(H) $0 \le z_1 < b_1,\ z_3 \ge b_3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 \ge 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 - p_1 - r_1]z_1 + p_1 b_1 \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + h_2]z_2 - [h_2 + r_2]b_2 + [(1-\lambda_{12}/T_2)h_2 + r_2](z_1 - b_1) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + h_3]z_3 - [h_3 + r_3]b_3
\end{aligned}
$$

(I) $z_1 \ge 0,\ z_2 \ge b_2,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) \ge 0,\ z_1+z_2-b_1-b_2 < 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 - p_1 - r_1]z_1 + p_1 b_1 \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + \lambda_{12}h_2/T_2 - (1-\lambda_{12}/T_2)p_2 - r_2]z_2 + [(1-\lambda_{12}/T_2)p_2 - \lambda_{12}h_2/T_2]b_2 \\
&\quad +(1-\lambda_{12}/T_2)p_2(b_1 - z_1) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + h_3]z_3 - h_3 b_3 + [(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)h_3 + r_3](z_1+z_2-b_1-b_2)
\end{aligned}
$$

(J) $z_1 \ge 0,\ z_i \ge b_i, i = 2,3,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) < 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 - p_1 - r_1]z_1 + p_1 b_1 \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + \lambda_{12}h_2/T_2 - (1-\lambda_{12}/T_2)p_2 - r_2]z_2 + [(1-\lambda_{12}/T_2)p_2 - \lambda_{12}h_2/T_2]b_2 \\
&\quad +(1-\lambda_{12}/T_2)p_2(b_1 - z_1) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 + (\lambda_{12}+\lambda_{23})h_3/T_3 - (1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3 - r_3]z_3 + [(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3 \\
&\quad -(\lambda_{12}+\lambda_{23})h_3/T_3]b_3 - (1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3(z_1+z_2-b_1-b_2)
\end{aligned}
$$

(K) $0 \le z_i < b_i, i = 2,3,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) \ge 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + h_1]z_1 - [h_1 + r_1]b_1 + [(1-\lambda_{12}/T_1)h_1 + r_1](z_2 - b_2) \\
&\quad +[(1-\lambda_{13}/T_1)h_1 + r_1](z_3 - b_3) \\
C^i(\mathbf{z}) &= [c_i - p_i - r_i]z_i + p_i b_i, \quad i = 2,3
\end{aligned}
$$

(L) $0 \le z_2 < b_2,\ z_3 \ge 0\ z_1+z_2-b_1-b_2 \ge 0,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) < 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{13}h_1/T_1 - (1-\lambda_{13}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1-\lambda_{13}/T_1)p_1 - \lambda_{13}h_1/T_1]b_1 \\
&\quad +(\lambda_{13}-\lambda_{12})h_1(z_2 - b_2)/T_1 - (1-\lambda_{13}/T_1)p_1(z_2+z_3-b_2-b_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 - (2-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2 - r_2]z_2 + (2-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2 b_2 \\
&\quad +(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2(b_1+b_3-z_1-z_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 - p_3 - r_3]z_3 + p_3 b_3
\end{aligned}
$$

(M) $z_1 \ge b_1,\ z_2 \ge 0,\ 0 \le z_3 < b_3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 < 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 + \lambda_{12}h_1/T_1 - (1-\lambda_{12}/T_1)p_1 - r_1]z_1 + [(1-\lambda_{12}/T_1)p_1 - \lambda_{12}h_1/T_1]b_1 \\
&\quad +(1-\lambda_{12}/T_1)p_1(b_2 - z_2) + (1-\lambda_{13}/T_1)p_1(b_3 - z_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 - p_2 - r_2]z_2 + p_2 b_2 + (1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2(b_3 - z_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3 - p_3 - r_3]z_3 + p_3 b_3 + (1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3(b_1+b_2-z_1-z_2)
\end{aligned}
$$

(N) $0 \le z_i < b_i, i = 1,3,\ \sum_{i=1}^3 (z_i - b_i) \ge 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1 - p_1 - r_1]z_1 + p_1 b_1 + (1-\lambda_{13}/T_1)p_1(b_3 - z_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2 + h_2]z_2 - [h_2 + r_2]b_2 + [(1-\lambda_{12}/T_2)h_2 + r_2](z_1 - b_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)h_2+r_2](z_3-b_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3-p_3-r_3]z_3+p_3b_3
\end{aligned}
$$

(O) $0 \le z_1 < b_1,\ z_3 \ge 0,\ z_1+z_2-b_1-b_2 \ge 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1-p_1-r_1]z_1+p_1b_1+(1-\lambda_{13}/T_1)p_1(b_3-z_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2+(\lambda_{12}+\lambda_{13})h_2/T_2-(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2-r_2]z_2 \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2-(\lambda_{12}+\lambda_{13})h_2/T_2]b_2 \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2-\lambda_{13}h_2/T_2]p_2(b_1-z_1)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2(b_3-z_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3-p_3-r_3]z_3+p_3b_3
\end{aligned}
$$

(P) $0 \le z_i < b_i, i=1,3,\ z_1+z_2-b_1-b_2 > 0$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1-p_1-r_1]z_1+p_1b_1+(1-\lambda_{13}/T_1)p_1(b_3-z_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2+\lambda_{12}h_2/T_2-(1-\lambda_{12}/T_2)p_2-r_2]z_2+[(1-\lambda_{12}/T_2)p_2-\lambda_{12}h_2/T_2]b_2 \\
&\quad +(1-\lambda_{12}/T_2)p_2(b_1-z_1)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2(b_3-z_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3-p_3-r_3]z_3+p_3b_3+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_3(b_1+b_2-z_1-z_2)
\end{aligned}
$$

(Q) $0 \le z_i < b_i, i=1,2,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) \ge 0$

$$
\begin{aligned}
C^i(\mathbf{z}) &= [c_i-p_i-r_i]z_i+p_ib_i+(1-\lambda_{12}/T_i)p_i(b_j-z_j), \quad i=1,2,\ j=1,2,\ i \ne j \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3+h_3]z_3-[h_3+r_3]b_3+[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)h_3+r_3](z_2-b_2) \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)h_3+r_3](z_1-b_1)
\end{aligned}
$$

(R) $z_1 \ge 0,\ 0 \le z_2 < b_2,\ z_2+z_3-b_2-b_3 \ge 0,\ \sum_{i=1}^{3}(z_i-b_i) < 0$

$$
\begin{aligned}
C^i(\mathbf{z}) &= [c_i-p_i-r_i]z_i+p_ib_i+(1-\lambda_{12}/T_i)p_i(b_j-z_j), \quad i=1,2,\ j=1,2,\ i \ne j \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3+(\lambda_{12}+\lambda_{23})h_3/T_3-(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3-r_3]z_3 \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3-(\lambda_{12}+\lambda_{23})h_3/T_3]b_3 \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3-(\lambda_{23}-\lambda_{13})h_3/T_3](z_2-b_2)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3(b_1-z_1)
\end{aligned}
$$

(S) $0 \le z_1 < b_1,\ z_2 \ge 0\ z_3 \ge b_3,\ z_2+z_3-b_2-b_3 < 0$

$$
\begin{aligned}
C^i(\mathbf{z}) &= [c_i-p_i-r_i]z_i+p_ib_i+(1-\lambda_{12}/T_i)p_i(b_j-z_j), \quad i=1,2,\ j=1,2,\ i \ne j \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3+(\lambda_{12}+\lambda_{13})h_3/T_3-(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3-r_3]z_3 \\
&\quad +[(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3-(\lambda_{12}+\lambda_{13})h_3/T_3]b_3 \\
&\quad +(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3(b_2-z_2)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3(b_1-z_1)
\end{aligned}
$$

(T) $0 \le z_i < b_i, i=1,2,3$

$$
\begin{aligned}
C^1(\mathbf{z}) &= [c_1-p_1-r_1]z_1+p_1b_1+(1-\lambda_{12}/T_1)p_1(b_2-z_2)+(1-\lambda_{13}/T_1)p_1(b_3-z_3) \\
C^2(\mathbf{z}) &= [c_2-p_2-r_2]z_2+p_2b_2+(1-\lambda_{12}/T_2)p_2(b_1-z_1)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_2)p_2(b_3-z_3) \\
C^3(\mathbf{z}) &= [c_3-p_3-r_3]z_3+p_3b_3+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})/T_3)p_3(b_2-z_2)+(1-(\lambda_{12}+\lambda_{23})/T_3)p_3(b_1-z_1)
\end{aligned}
$$