

A refinement of the Cauchy-Schwarz inequality and its generalizations

木更津工業高等専門学校・情報工学科 和田 州平 (Shuheï Wada) *
Department of Information and Computer Engineering,
Kisarazu National College of Technology

1 序論と目的

n 個の実数値 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n に対する Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$$

は、大変よく知られている。Daykin-Eliezer-Carlitz は、任意の負でない実数 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n にたいして

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

を満たす正数値関数 f, g の特徴付けを得た [2]. 筆者はこの結果を鑑みて、上記の特徴付けを包含する、行列版 Cauchy-Schwarz 不等式およびその改良不等式を考察し、以下の定理を得た.

定理 1. 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B) + (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

ここで σ は久保-安藤の意味での作用素平均を表す.

本稿では、さらに、上の定理の一般化について議論する.

*E-mail: wada@j.kisarazu.ac.jp

2 Cauchy-Schwarz 不等式とその改良

2.1 Cauchy-Schwarz 不等式

Cauchy-Schwarz 不等式は解析学全般で応用されており、重要性は言うまでもない。

命題 2.1. n 個の負でない実数値 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n を考える。このとき

$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 \quad (2.1)$$

となる。

対象とする実数値の中に負の数を混ぜても、不等式は成り立つが、

$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_1^n |a_i| |b_i|\right)^2 \leq \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$$

となるので、本稿では負でない場合に限定する。

2.2 Cauchy-Schwarz 不等式の改良

Cauchy-Schwarz 不等式の改良は様々なタイプのもものが知られている [5]。本稿では、改良の例を 2, 3 紹介し、それらを一般化する。

2.2.1 Milne の不等式

次の不等式は「Milne の不等式 (Milne's inequality)」と呼ばれる [3]。

命題 2.2. n 個の負でない実数値 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n を考える。このとき

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leq \sum_1^n (a_i + b_i) \sum_1^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

となる。

2.2.2 Callebaut 不等式

次の不等式は「Callebaut 不等式 (Callebaut inequality)」と呼ばれる [4]。

命題 2.3. n 個の負でない実数値 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n を考える。このとき

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leq \sum_1^n a_i^t b_i^{1-t} \sum_1^n a_i^{1-t} b_i^t \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i,$$

ここで、 $t \in [0, 1]$ 。

Callebaut は t の関数 $\sum_1^n a_i^t b_i^{1-t}$ の単調性についても議論している [4].

命題 2.4. n 個の負でない実数値 a_1, a_2, \dots, a_n と b_1, b_2, \dots, b_n を考える. このとき, $1 \geq t \geq s \geq \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \geq s \geq t \geq 0$ ならば

$$\sum_1^n a_i^t b_i^{1-t} \sum_1^n a_i^{1-t} b_i^t \geq \sum_1^n a_i^s b_i^{1-s} \sum_1^n a_i^{1-s} b_i^s.$$

特に, $n = 2$ で, $a_1 = b_2, a_2 = b_1$ の場合はよく知られた結果となる.

系 2.5. a, b を正の数とする. このとき, $1 \geq t \geq s \geq \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \geq s \geq t \geq 0$ ならば

$$a^t b^{1-t} + a^{1-t} b^t \geq a^s b^{1-s} + a^{1-s} b^s.$$

2.2.3 Daykin-Eliezer-Carlitz の考察

Daykin と Elizer は American Mathematical Monthly 誌上で以下のような問題を提出した [2].

正の値を取る関数 $f(x, y), g(x, y)$ が任意の正数列 $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に対して

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i} \right)^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

となる為の条件を求めよ.

上の問題は, 上で述べた, Cauchy-Schwarz 不等式の改良のうちで最も一般化された問題である. この問題の答えが分かれば今まで紹介してきた不等式は, その系となる.

命題 2.6. (Daykin-Eliezer-Carlitz) 正数の組から正数への関数 $f(x, y), g(x, y)$ が任意の正数列 $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に対して

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i} \right)^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i \quad (2.2)$$

となる為の必要十分条件は次の3つが全て満たされることである.

1. $f(a, b)g(a, b) = ab$
2. $f(ka, kb) = kf(a, b)$
3. $f(1, b) \leq f(1, a), \frac{f(1, a)}{a} \leq \frac{f(1, b)}{b}, (b \leq a).$

証明. 定理が成り立つとして, 3つの条件を導く.

まず, $n = 1$ の場合を考えると, $f(a, b)g(a, b) = ab$ となることは明らか.

次に $n = 2$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2})^2 &\leq [f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2)][g(a_1, b_1) + g(a_2, b_2)] \\ &\leq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2). \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a_1 b_1} \sqrt{a_2 b_2} &\leq f(a_1, b_1)g(a_2, b_2) + f(a_2, b_2)g(a_1, b_1) \\ &\leq a_1 b_2 + a_2 b_1. \end{aligned}$$

ここで $g(a, b)$ を $\frac{ab}{f(a, b)}$ と書き換えると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a_1 b_1} \sqrt{a_2 b_2} &\leq f(a_1, b_1) \frac{a_2 b_2}{f(a_2, b_2)} + f(a_2, b_2) \frac{a_1 b_1}{f(a_1, b_1)} \\ &\leq a_1 b_2 + a_2 b_1, \end{aligned}$$

両辺を $\sqrt{a_1 b_1} \sqrt{a_2 b_2}$ で割ると,

$$2 \leq \frac{f(a_1, b_1)}{f(a_2, b_2)} \frac{\sqrt{a_2 b_2}}{\sqrt{a_1 b_1}} + \frac{f(a_2, b_2)}{f(a_1, b_1)} \frac{\sqrt{a_1 b_1}}{\sqrt{a_2 b_2}} \leq \frac{\sqrt{a_1 b_2}}{\sqrt{a_2 b_1}} + \frac{\sqrt{a_2 b_1}}{\sqrt{a_1 b_2}}. \quad (2.3)$$

$a_2 = \lambda a_1, b_2 = \lambda b_1$ の場合も, 上の式は成立するから

$$2 \leq \frac{f(a_1, b_1)}{f(\lambda a_1, \lambda b_1)} \lambda + \frac{f(\lambda a_1, \lambda b_1)}{f(a_1, b_1)} \lambda^{-1} \leq 2$$

よって, $f(\lambda a, \lambda b) = \lambda f(a, b)$ がわかる. さて, $F(a) := f(1, a)$ とすると $f(a, b) = aF(b/a)$ となるので上の不等式を F を用いて式 2.3 を書き直せば

$$2 \leq \frac{f(1, a)}{f(1, b)} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{f(1, b)}{f(1, a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \leq \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$$

となる. 関数 $x + \frac{1}{x}$ の挙動を考えると, $a \geq b$ ならば

$$\frac{f(1, a)}{f(1, b)} \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{f(1, b)}{f(1, a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

が分かる. この不等式は 3 番目の条件を意味する.

逆に f, g が上記 3 条件を満たしているとき, 不等式

$$\frac{f(1, a)}{f(1, b)} \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{f(1, b)}{f(1, a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

がなりたつので,

$$2 \leq \frac{f(1, b)\sqrt{a}}{f(1, a)\sqrt{b}} + \frac{f(1, a)\sqrt{b}}{f(1, b)\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

となる. $a = \frac{a_i}{b_i}$, $b = \frac{a_j}{b_j}$ とすると,

$$2 \leq \frac{f(a_i, b_i)}{f(a_j, b_j)} \frac{\sqrt{a_j b_j}}{\sqrt{a_i b_i}} + \frac{f(a_j, b_j)}{f(a_i, b_i)} \frac{\sqrt{a_i b_i}}{\sqrt{a_j b_j}} \leq \frac{\sqrt{a_i b_j}}{\sqrt{a_j b_i}} + \frac{\sqrt{a_j b_i}}{\sqrt{a_i b_j}}.$$

となる. この式を変形すれば

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a_i b_i} \sqrt{a_j b_j} &\leq f(a_i, b_i) \frac{a_j b_j}{f(a_j, b_j)} + f(a_j, b_j) \frac{a_i b_i}{f(a_i, b_i)} \\ &\leq a_i b_j + a_j b_i \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} 2 \sum_{a_1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i b_i} \sqrt{a_j b_j} &\leq \sum_{a_1 \leq i < j \leq n} f(a_i, b_i) \frac{a_j b_j}{f(a_j, b_j)} + f(a_j, b_j) \frac{a_i b_i}{f(a_i, b_i)} \\ &\leq \sum_{a_1 \leq i < j \leq n} a_i b_j + a_j b_i. \end{aligned}$$

この式は, 式 2.2 と同じである. \square

補足 1. 上の証明からも分かるように, 上記 3 条件は, 以下の 3 条件と同値である.

1. $f(a, b)g(a, b) = ab$
2. $f(ka, kb) = kf(a, b)$
3. $2 \leq \frac{f(1, b)\sqrt{a}}{f(1, a)\sqrt{b}} + \frac{f(1, a)\sqrt{b}}{f(1, b)\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$

補足 2. 上記 3 条件が以下と同値であることもすぐに分かる.

1. $f(a, b)g(a, b) = ab$
2. $f(ka, kb) = kf(a, b)$
3. $f(a_1, b_1) \leq f(a_2, b_2)$, $(a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2).$

さて, 命題 2.6 の 3 条件を満たす関数について考えてみる. まず, 簡単な例としては $f(x, y) = x + y$ がある. この関数 f からできる不等式が Milne の不等式である. 一方, Callebaut の不等式は $f(x, y) = x^t y^{1-t}$ とすれば得られる. また, 正規化作用素単調関数と言われる関数 F をつかって定義した関数 $f(x, y) := xF(\frac{y}{x})$ はすべてこの性質を満たすことが分かる [7]. 上で紹介した 2 つの関数も, 作用素単調関数から作ることができる.

しかしながら, 上の 3 条件を満たす関数が, 必ずしも作用素単調関数から作られるわけではない. 例えば, $f(t, s) := \sqrt{\frac{t^2 + s^2}{2}}$ とすると, f は 3 条件を満たすが $f(1, t)$ は作用素単調でない.

3 Matrix 版 Cauchy-Schwarz 不等式とその改良

3.1 Matrix 版 Cauchy-Schwarz 不等式

Cauchy-Schwarz 不等式を, 行列を用いて一般化する方法は, 幾つか知られている. 本稿では, 正定値行列 A, B に対して成り立つ以下の不等式

$$2A\#B \otimes A\#B \leq A \otimes B + B \otimes A$$

を考え, これを Matrix 版 Cauchy-Schwarz 不等式と見ることにする (蛇足だが, 不等式 $A\#B \otimes A\#B \leq A \otimes B$ は正しくない). この不等式は, 算術幾何平均の関係で, 正しいことは明らかである. また, この不等式における行列 A, B を対角行列とし, さらに両辺のトレースをとれば不等式 2.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) が得られる.

3.2 Matrix 版 Cauchy-Schwarz 不等式の改良

上で述べた Matrix 版 Cauchy-Schwarz 不等式の改良を考える. ここで, 前述の Daykin-Eliezer-Carlitz の考察を全て含むような改良不等式を作るとすれば, 自然に以下のような議論になる.

命題 2.6 の 3 条件を満たす関数 f, g に関して, 正値行列同士の 2 項演算 σ を

$$\begin{aligned} A\sigma B &:= A^{\frac{1}{2}} f(1, A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}, \\ A\sigma^{\perp} B &:= A^{\frac{1}{2}} g(1, A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

と定義すると, 次の不等式が成立する.

補題 3.1. 可逆な正値行列 A, B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\sigma B) \otimes (A\sigma^{\perp} B) + (A\sigma^{\perp} B) \otimes (A\sigma B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

証明. $C := A^{-1/2} B A^{-1/2}$ とする. 2 項演算 σ に対応する関数を f とすると上の不等式は以下の不等式と同値である.

$$2\sqrt{C} \otimes \sqrt{C} \leq f(C) \otimes \frac{C}{f(C)} + \frac{C}{f(C)} \otimes f(C) \leq C \otimes 1 + 1 \otimes C.$$

ここで, $C \otimes 1$ と $1 \otimes C$ で作られる可換 C^* 環を連続関数環に表現して, 対応する関数を $\varphi \geq 0$ と $\psi \geq 0$ とする. すると $\sqrt{C} \otimes \sqrt{C}$ は $\sqrt{\varphi\psi}$ に, $f(C) \otimes \frac{C}{f(C)} + \frac{C}{f(C)} \otimes f(C)$ は $f(\varphi) \frac{\psi}{f(\psi)} + \frac{\varphi}{f(\varphi)} f(\psi)$ へと変換でき, 示すべき不等式は, 連続関数環上の次の不等式になる.

$$2\sqrt{\varphi\psi} \leq f(\varphi) \frac{\psi}{f(\psi)} + \frac{\varphi}{f(\varphi)} f(\psi) \leq \varphi + \psi.$$

さて, f は命題 2.6 の条件を満たすので t の関数 $f(1, t)$ は補足 1 の条件 3 を満たす. \square

前節の終わりに指摘したように, 作用素単調関数から常套的なやり方で作られる 2 変数関数は命題 2.6 の 3 条件を満たす. したがって, 次の定理が成り立つ.

定理 1. 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B) + (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

ここで σ は久保-安藤の意味での作用素平均を表す.

補足 3. 上の定理において, σ が算術平均の場合は, Milne の定理の一般化であり, α -power mean の場合は Callebaut 不等式の一般化である. また, 上の定理は正定値行列ばかりでなく無限次元ヒルベルト空間上の正定値作用素でも成り立つ.

系 3.1. 正定値行列 A, B に対して

$$A\#B \circ A\#B \leq (A\sigma B) \circ (A\sigma^\perp B) \leq A \circ B,$$

ここで, \circ はシュューア積を表す.

補足 4. 上の系 3.1 において, $A\sigma B = A\#B$ の場合, $A\sigma B = \lambda A + (1-\lambda)B$ の場合, 及び $A\sigma B = \frac{1}{2}(A+B)$ の場合は, 既に安藤 [1] で示されている.

定理 1 において, 特に $\sigma = \#_\alpha$ (α -power mean) とすれば $2A\#B \otimes A\#B$ から $A \otimes B + B \otimes A$ への媒介変数表示が得られる.

系 3.2. 正定値行列 A, B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\#_\alpha B) \otimes (A\#_{1-\alpha} B) + (A\#_{1-\alpha} B) \otimes (A\#_\alpha B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A. \end{aligned}$$

さらに,

$$(A\#_\alpha B) \otimes (A\#_{1-\alpha} B) + (A\#_{1-\alpha} B) \otimes (A\#_\alpha B)$$

は $[0, 1/2]$ で単調減少, $[1/2, 1]$ で単調増加となる.

証明. 系 3.1 と, 系 2.5 より. \square

補足 5. この系は, 勿論, 命題 2.4 を含む.

4 主定理の一般化

4.1 主定理再考

定理 1 を思い出してみる .

定理 1 . 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B) + (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

ここで σ は久保 - 安藤の意味での作用素平均を表す .

この不等式を , 算術平均の記号 ∇ を用いて書き換えると以下ようになる .

系 4.1. 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned} A\#B \otimes A\#B &\leq ((A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)) \nabla ((A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B)) \\ &\leq (A \otimes B) \nabla (B \otimes A), \end{aligned}$$

ここで σ は久保 - 安藤の意味での作用素平均を表す .

さて , 上の系において , 算術平均を他の平均 m に変えた不等式

$$A\#B \otimes A\#B \leq ((A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)) m ((A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B)) \quad (4.1)$$

$$((A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)) m ((A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B)) \leq (A \otimes B) m (B \otimes A) \quad (4.2)$$

は正しいだろうか? すでに指摘したように $A m B = A$, $A\sigma B = A$ という平均に対して , 不等式 4.2 は成り立たない .

命題 4.2. 任意の作用素平均 σ について式 4.2 が成り立つ為には作用素平均 m は対称でなければならない .

証明. $A\sigma B = B$ の時 , 不等式 4.2 の左辺 $= (B \otimes A) m (A \otimes B)$ となるので式 4.2 は

$$(B \otimes A) m (A \otimes B) \leq (A \otimes B) m (B \otimes A)$$

となる . ここで , A と B は任意なので両辺は同じと分かる . そこで , $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, とおいて計算してみると , 左辺は

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

となり, 右辺は,

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

となる. $a_i, b_i, (i = 1, 2)$ は任意だから, m は対称でなければならない. \square

それでは, 基本的な対称作用素平均では成り立つだろうか. $\sigma = \nabla$ の場合は定理 1 ですでに OK. $\sigma = \#$ の場合を計算してみると

$$\begin{aligned} (A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B) \# (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B) &= (A\sigma B) \# (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma^\perp B) \# (A\sigma B) \\ &= (A\#B) \otimes (B\#A) \\ &= (A \otimes B) \# (B \otimes A) \end{aligned}$$

となり, 等号が成立する. この議論から次が分かる.

命題 4.3. 不等式 4.1 が成立する $\iff \# \leq m$

証明. \Leftarrow は上の議論から OK.

\Rightarrow $A\sigma B = A$ とすれば式 4.1 の右辺 $= (A \otimes B) m (B \otimes A)$ である. 一方, 4.1 の左辺 $= (A \otimes B) \# (B \otimes A)$ である. A, B は任意だから, $\# \leq m$ となる. \square

4.2 一般化不等式の成立条件

前節の不等式 4.2 に関する考察を続ける. 不等式 4.2 を満たす作用素平均 m に対応する, 正規化作用素単調関数を g としよう. 定理 1 の証明と同じ方法 (同じ記号) で, 不等式 4.2 を書き換えてみる. $f^\perp(t) = t/f(t)$ とすると,

$$f(\varphi) f^\perp(\psi) g \left(\frac{f^\perp(\varphi) f(\psi)}{f(\varphi) f^\perp(\psi)} \right) \leq \psi g \left(\frac{\varphi}{\psi} \right).$$

整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\psi f(\varphi)}{f(\psi)} g \left(\frac{\varphi f(\psi)^2}{\psi f(\varphi)^2} \right) &\leq \psi g \left(\frac{\varphi}{\psi} \right) \\ \frac{g \left(\frac{\varphi f(\psi)^2}{\psi f(\varphi)^2} \right)}{\sqrt{\frac{\varphi f(\psi)^2}{\psi f(\varphi)^2}}} &\leq \frac{g \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)}{\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで $\psi = 1$ とすると

$$\frac{g \left(\frac{\varphi}{f(\varphi)^2} \right)}{\sqrt{\frac{\varphi}{f(\varphi)^2}}} \leq \frac{g(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}.$$

纏めると以下ようになる.

命題 4.4. 不等式 4.2 を満たす作用素平均 σ, m の表現関数を f, g とすると, 任意の正の数 s に対して

$$\frac{g\left(\frac{s}{f(s)^2}\right)}{\sqrt{\frac{s}{f(s)^2}}} \leq \frac{g(s)}{\sqrt{s}}$$

が成り立つ.

さて, 今 $0 < s < 1$, $f_\lambda(s) := \sqrt{\lambda + (1-\lambda)s}$, ($0 \leq \lambda \leq 1$) とすると, $\{\frac{s}{f_\lambda(s)^2} | 0 \leq \lambda \leq 1\} = [s, 1]$ となる. したがって, 以下の命題が分かる.

命題 4.5. 不等式 4.2 を満たす作用素平均 m の表現関数を g とすると,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

さて, 上の命題の条件

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

を満たす正規化作用素単調関数は常に式 4.2 を満たすかが気になる.

命題 4.6. 正規化作用素単調関数 $g \geq 0$ が対称でしかも,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

を満たすならば, g に対応する作用素平均 m は不等式 4.2 を満たす.

証明. 関数 g が, 上述の式 4.3 を満たすことを示せばよい.

ここで, 式 4.3 を変数を含めて書くと, 左辺は

$$\frac{g\left(\frac{\varphi(t)f(\psi(t))^2}{\psi(t)f(\varphi(t))^2}\right)}{\sqrt{\frac{\varphi(t)f(\psi(t))^2}{\psi(t)f(\varphi(t))^2}}}.$$

一方, 右辺は

$$\frac{g\left(\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right)}{\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}}}$$

である. そこで, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ の大小関係に関して, 場合分けをして証明する.

まず, $\varphi(t) = \psi(t)$ とすると式 4.3 が成り立つことは明らか.

次に, $\varphi(t) < \psi(t)$ とする. さて, 今, $a = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$, $b = \frac{f(\psi(t))}{f(\varphi(t))}$ とおくと, $a < 1, b > 1$ であり, さらに式 4.3 の左辺は

$$\frac{g(ab^2)}{\sqrt{ab^2}}$$

でさらに，右辺は

$$\frac{g(a)}{\sqrt{a}}$$

となる．左辺が右辺より小さいことは，仮定

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

から明らかである．

最後に $\varphi(t) > \psi(t)$ とすると， g の対称性より

$$\frac{g \left(\frac{\varphi(t)f(\psi(t))^2}{\psi(t)f(\varphi(t))^2} \right)}{\sqrt{\frac{\varphi(t)f(\psi(t))^2}{\psi(t)f(\varphi(t))^2}}} = \frac{g \left(\frac{\psi(t)f(\varphi(t))^2}{\varphi(t)f(\psi(t))^2} \right)}{\sqrt{\frac{\psi(t)f(\varphi(t))^2}{\varphi(t)f(\psi(t))^2}}}$$

および

$$\frac{g \left(\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \right)}{\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}}} = \frac{g \left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right)}{\sqrt{\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}}}$$

となるので， $\varphi(t) < \psi(t)$ の場合と同様の理由で命題が成立する． \square

以上の議論を纏めると以下のようなになる．

定理 2. 任意の正定値作用素 A, B と任意の作用素平均 σ に対して不等式

$$\begin{aligned} (A \# B) \otimes (A \# B) &\leq [(A \sigma B) \otimes (A \sigma^\perp B)] m [(A \sigma^\perp B) \otimes (A \sigma B)] \\ &\leq (A \otimes B) m (B \otimes A) \end{aligned}$$

が成立するための必要十分条件は作用素平均 m の表現関数 g が対称でかつ

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

となることである．

補足 6. 上の定理の条件

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1),$$

および g の対称性から， $m \geq \#$ が導かれる．なぜなら g の対称性から， $[1, \infty)$ 上では

$$\frac{g(s)}{\sqrt{s}}$$

は増加関数であり，それ故に，

$$\min \left\{ \frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right\} = 1$$

となるためである．

系 4.7. 任意の正定値作用素 A, B と任意の作用素平均 σ に対して不等式

$$[(A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)] m [(A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B)] \geq (A \otimes B) m (B \otimes A)$$

が成立するための必要十分条件は作用素平均 m の表現関数 g が対称でかつ

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \geq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

となることである.

証明. 行列 A, B が可逆として, 定理 2 を適用すると,

$$\begin{aligned} & (A^{-1}\sigma B^{-1}) \otimes (A^{-1}\sigma^\perp B^{-1}) m (A^{-1}\sigma^\perp B^{-1}) \otimes (A^{-1}\sigma B^{-1}) \\ & \leq (A^{-1} \otimes B^{-1}) m (B^{-1} \otimes A^{-1}). \end{aligned}$$

両辺の逆をとると

$$\begin{aligned} & [(A^{-1}\sigma B^{-1}) \otimes (A^{-1}\sigma^\perp B^{-1}) m (A^{-1}\sigma^\perp B^{-1}) \otimes (A^{-1}\sigma B^{-1})]^{-1} \\ & \geq [(A^{-1} \otimes B^{-1}) m (B^{-1} \otimes A^{-1})]^{-1}. \end{aligned}$$

作用素平均 σ の随伴 σ^* を用いて書き換えると,

$$\begin{aligned} & [(A\sigma^* B)^{-1} \otimes (A\sigma^{\perp*} B)^{-1} m (A\sigma^{\perp*} B)^{-1} \otimes (A\sigma^* B)^{-1}]^{-1} \\ & \geq [(A^{-1} \otimes B^{-1}) m (B^{-1} \otimes A^{-1})]^{-1}. \end{aligned}$$

さらに m の随伴を用いて書き換えると

$$(A\sigma^* B) \otimes (A\sigma^{\perp*} B) m^* (A\sigma^{\perp*} B) \otimes (A\sigma^* B) \geq (A \otimes B) m^* (B \otimes A).$$

ここで σ^* を新たに σ と書くと

$$(A\sigma B) \otimes (A\sigma^{\perp*} B) m^* (A\sigma^{\perp*} B) \otimes (A\sigma B) \geq (A \otimes B) m^* (B \otimes A).$$

ここで, $\sigma^{\perp*} = \sigma^{*\prime} = \sigma^\perp$ だから

$$(A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B) m^* (A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B) \geq (A \otimes B) m^* (B \otimes A).$$

ここで定理 2 より, m の表現関数は

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \leq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

を満たす. よって m^* の表現関数 g^* は

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g^*(s)}{\sqrt{s}} \right) \geq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

となる. g^* が対称であることは明らか.

□

上と同じ議論を前半の不等式 4.1 について行う。#* = # であることに注意すれば，以下の結果になる。

系 4.8. 任意の正定値行列と，作用素平均 σ に対して

$$A\#B \otimes A\#B \geq ((A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)) m ((A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B))$$

が成り立つための必要十分条件は， $m \leq \#$ となることである。

命題 4.9. 任意の正定値作用素 A, B と任意の作用素平均 σ に対して不等式

$$\begin{aligned} (A\#B) \otimes (A\#B) &\geq [(A\sigma B) \otimes (A\sigma^\perp B)] m [(A\sigma^\perp B) \otimes (A\sigma B)] \\ &\geq (A \otimes B) m (B \otimes A) \end{aligned}$$

が成立するための必要十分条件は作用素平均 m の表現関数 g が対称でかつ

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s}} \right) \geq 0 \quad \text{on } (0, 1)$$

となることである。

謝辞 本研究に対して多くの助言をくださった，東北大学の日合文雄 教授に感謝します。

参考文献

- [1] T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to hadamard products, *Linea Algebra and Appl.* 26(1979), 203–241.
- [2] D.E. Daykin, C.J. Eliezer and C. Carlitz, Problem 5563, *Amer. Math. Monthly*, 75(1968), p. 198 and 76(1969), 98–100
- [3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [4] D.K. Callebaut, Generalization of the Cauchy-Schwarz inequality, *J. Math. Anal. Appl.* 12(1965), 491–494.
- [5] S.S. Dragomir, A survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities, *J. Inequal. Pure Appl. Math.* 4 (2003), no. 3, Article 63, 142 pp. (electronic).
- [6] E.A. Milne, Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 85(1925), 979–984.
- [7] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators. *Math. Ann.* 246 (1979), no. 3, 205–224.