数理解析研究所講究録 1458 巻 2005 年 46-58

有限次元不定計量空間における作用素の数域
The numerical range of an operator on a finite dimensional Krein space

弘前大学理工学部　中里　博 (Hiroshi Nakazato)
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

1. 有限次元不定計量空間

内積 (スカラー積) を伴った有限次元複素線形空間 $V = \mathbf{C}^n$ および V から V 自身への線形作用素 T に対して、スペクトル $\sigma(T)$ や数域 $W(T)$ など、ユニタリ変換による相似変換 $T \mapsto U^*TU$ で不変やさまざまな不変量が線形作用素を解析する手段として使える。

ここでは、内積にかえて n 次元複素線形空間 $V = \mathbf{C}^n$ において (r,s) 型の不定計量 $[\cdot,\cdot]$ indefinite inner product を考える。すなわち　内積と同様に、$[\xi,\eta] \in \mathbf{C}$ for $\xi,\eta \in \mathbf{C}^n$ であって

(i)

$$[a\,\xi,\eta] = [\xi,\overline{a}\,\eta] = a\,[\xi,\eta],$$

(ii)

$$[\xi_1+\xi_2,\eta] = [\xi_1,\eta]+[\xi_2,\eta], \quad [\xi,\eta_1+\eta_2] = [\xi,\eta_1]+[\xi,\eta_2]$$

が、$\xi,\xi_1,\xi_2,\eta,\eta_1,\eta_2 \in \mathbf{C}^n$ および $a \in \mathbf{C}$ に対して成り立つという意味で sesquilinear であって、内積のもつ対称性 (エルミット性) と同様に

(iii)

$$[\eta,\xi] = \overline{[\xi,\eta]}$$

が $\xi,\eta \in \mathbf{C}^n$ に成り立ち、内積のもつ正定値性の代わりに非退化性

(iv)

$$\xi_0 \in \mathbf{C}^n, [\xi_0,\eta] = 0 \,\text{for all}\, \eta \in \mathbf{C}^n \Rightarrow \xi_0 = 0.$$

を仮定する。$\mathbf{C}^n$ に内積 $<\cdot,\cdot>$ を仮定すれば、上記のような不定計量は、可逆なエルミット行列 K により、

$$[\xi,\eta] =< K\xi,\eta >$$

($\xi, \eta \in \mathbf{C}^n$) と表される。$K$ の正の固有値が重複度を含め r 個で、負の固有値が重複度を含めて s 個であるとき、不定計量空間は (r, s) 型と言うことにする。上記のような内積を新しい内積

$$<< \xi, \eta >> = < |K| \xi, \eta >$$

($\xi, \eta \in \mathbf{C}^n$) で置き換えることにより、$K$ の固有値は 1 または -1 であって、$K^2 = I_n$ すなわち、K は、エルミットかつユニタリと仮定できる。通常 K という記号の代わりに J という記号を使われる。ここでの J は、複素線形写像である。J という記号は複素共役をとる操作のように $J^2 = I$ である共役線形な写像にもよく用いられるが、ここでは線形写像である。

また、内積と不定計量を結びつける (r, s) 型のインボリューション J は、エルミットかつユニタリであるから、対角可能ではあるが、それ自体対角行列

$$J = I_r \oplus (-I_s) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$$

となっていることを仮定する。

2. C, J-数域

内積を伴った線形空間 $\mathbf{C}^n$ における線形作用素を解析する手段として、複素 $n \times n$ 行列 A, C に対して、

$$W_C(A) = \{\mathrm{tr}(CUAU^{-1}) : U \in M_n, U^*U = I_n\}$$

というコンパクト集合 $W_C(A) \subset \mathbf{C}$ が、イスラエルの Goldberg, Strauss によって 1970 年代に導入された。これは、C が階数 1 の直交射影の場合、A の数域 numerical range of A であって、階数が 2 以上の直交射影に対しては Halmos が導入していた。C が直交射影というような仮定を捨てると、$W_C(A)$ が凸になるという Toeplitz-Hausdorff 型の性質は失われるが、つねに $(1/n)\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(A)$ に関して星状 star-shaped となることが 1996 年に Tsing らによって示された。特に、$n = 2$ の場合は次のことが知られている。

命題 2.1[Nakazato,1994:C.K. Li,1998] (1) 任意の 2×2 行列に対して一般化数域 $W_C(A)$ は $(1/2)\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(A)$ を中心とする楕円板である。ただし、退化して閉線分または 1 点となることもある。$W_C(A)$ が閉線分となるための必要十分条件は C, A がともに正規行列となることである。$W_C(A)$ が 1 点となるための必要十分条件は C または A がスカラー行列となることである。

(2) 行列 C, A は、行列式またはトレースが 0 であるとする。このとき、$W_C(A)$ が円板となる必要十分条件は C または A が巾零であることである。C, A がともに階数 1 であって巾零ではない、すなわち $\det(C) = \det(A) = 0$, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, $\mathrm{tr}(C) \neq 0$ のとき、楕円板 $W_C(A)$

の主軸は、$\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(A)$ と平行である。

(3)

$$C = \begin{pmatrix} q & \sqrt{1-q^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

($0 \le q \le 1, 0 \le b \le a$) のとき、

$$W_C(A) = \{r\,[(a+b)/2 + \sqrt{1-q^2}(a-b)/2] \cos\theta + i\,r\,[(a-b)/2 + \sqrt{1-q^2}(a+b)/2] \sin\theta :$$

$$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

さてここ数年の動きとして、ポルトガルの Bebiano, Providencia らのグループによって、$W_C(A)$ の不定計量空間版である、

$$W_C^J(A) = \{\mathrm{tr}(CUAU^{-1}) : U \in U(r,s)\} = \{\mathrm{tr}(CUAU^{-1}) : U \in SU(r,s)\}$$

という領域が導入された。ここで、$J = I_r \oplus (-I_s)$ に対して、

$$U(r,s) = \{U \in M_n : JU^*JU = UJU^*J = I_n\},$$

$$SU(r,s) = \{U \in U(r,s) : \det U = 1\}$$

である。$r > 0, s > 0$ のとき、$SU(r,s)$ は非コンパクト型の半単純リー群となる。

3. J-エルミット行列に対する不等式

$J = I_r \oplus (-I_s)$ に定められる不定計量 $[\cdot,\cdot]$ をもつ (r,s) 型の不定計量空間 $\mathbf{C}^{r+s}$ からそれ自身への線形写像 T に対して

$$[T\xi, \eta] = [\xi, T\eta]$$

が任意の $\xi, \eta \in \mathbf{C}^{r+s}$ に対して成り立つことと、$JT^*J = T$ となることは同値である。この条件が成り立つとき、T を J-エルミット行列 J-Hermitian matrix と呼ぶ。J-エルミット行列な行列 T のスペクトル $\sigma(T)$ は実軸に関し対称: $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T)$ である。

トレースについての性質 $\mathrm{tr}(JC^*J) = \overline{\mathrm{tr}(C)}$ を用いて J-エルミットな行列 S, T と J-ユニタリー行列 U に対して、

$$\overline{\mathrm{tr}(SUTU^{-1})} = \mathrm{tr}(U(JT^*J)U^{-1}(JS^*J))$$

$$= \mathrm{tr}(UTU^{-1}S) = \mathrm{tr}(SUTU^{-1})$$

となるから, 一般に $W_S^J(T)$ は、実数直線に含まれることがわかる。

J-エルミット行列 T に対して或る $U \in U(r,s)$ が存在して

$$UTU^{-1} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s)$$

がある実数 $a_1,\ldots,a_{r+s}$ に対して成り立つこここと、$\sigma(T)\subset\mathbf{R}$ であって T が各固有値に対応して、その代数的な重複度分だけ 1 次独立な中立的でない固有ベクトルをもつことが同値となる。J-エルミットで固有値がすべて実の T に対して上記のような対角化に対応して、$\mathbf{C}^{r+s}$ の基底 $\xi_1,\ldots,\xi_r,\xi_{r+1},\ldots,\xi_{r+s}$ で、$[\xi_j,\xi_j]=1$ ($1\le j\le r$), $[\xi_j,\xi_j]=-1$ ($r+1\le j\le r+s$), $[\xi_j,\xi_k]=0$ ($1\le j\ne k\le r+s$) であって、

$$T\xi_j=a_j\xi_j,$$

($1\le j\le r+s$) となるようなものが存在する。このとき、

$$\sigma_+(T)=\{a_1,\ldots,a_r\},\quad \sigma_-(T)=\{a_{r+1},\ldots,a_{r+s}\}, \tag{3.1}$$

と表す、ただし

$$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_r,\quad a_{r+1}\ge a_{r+2}\ge\cdots\ge a_{r+s}, \tag{3.2}$$

とする。同様の性質をもつ J-エルミット行列 S:

$$\sigma_+(S)=\{b_1,\ldots,b_r\},\quad \sigma_-(S)=\{b_{r+1},\ldots,b_{r+s}\}, \tag{3.3}$$

を考える。ただし、

$$b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_r,\quad b_{r+1}\ge b_{r+2}\ge\cdots\ge b_{r+s}, \tag{3.4}$$

とする。このとき、$\mathrm{tr}(ST)$ を a_j, b_j を用いて評価することと、数域 $W_S^J(T)$ を決定することとは密接に結びつく。まず、$W_S^J(T)\subset\mathbf{R}$ は一般に成り立つ。 $s=0$ ならば、よく知られた不等式と対応する一般化数域の等式

$$\sum_{j=1}^{r}a_j\,b_{r+1-j}\le\mathrm{tr}(ST)\le\sum_{j=1}^{r}a_j\,b_j,$$

(Richter 1958; Mirsky 1959 ; Theobald 1975)

$$W_S(T)=[\sum_{j=1}^{r}a_j\,b_{r+1-j},\sum_{j=1}^{r}a_j\,b_j]$$

が成り立つ。

$r>0$, $s>0$ の場合に対して Beniano, Providência,Lemos,Soares, Nakazato [1] はこれに対応する次のような結果を与えた。

命題 3.1(cf. [1]) T,S は、(r,s)-型不定計量空間の J-エルミット行列でその固有値はすべて実であって、(3.1),(3.2),(3.3),(3.4) のように与えられているとする。ただし、$r>0$, $s>0$ とする。

(I) $[a_1,a_r]\cap[a_{r+1},a_{r+s}]=\emptyset$, $[b_1,b_r]\cap[b_{r+1},b_{r+s}]=\emptyset$ と仮定する。すなわち、$a_r>a_{r+1}$ または、$a_{r+s}>a_1$, $b_r>b_{r+1}$ または、$b_{r+s}>b_1$ とする。

(i) $(a_k - a_\ell)(b_{k'} - b_{\ell'}) < 0$ が、任意の $1 \le k, k' \le r$, $r+1 \le \ell, \ell' \le r+s$ に対して成り立つ場合、

$$W_S^J(T) = (-\infty, \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j].$$

(ii) $(a_k - a_\ell)(b_{k'} - b_{\ell'}) > 0$ が、任意の $1 \le k, k' \le r$, $r+1 \le \ell, \ell' \le r+s$ に対して成り立つ場合、

$$W_S^J(T) = [\sum_{j=1}^{r} a_j\, b_{r+1-j} + \sum_{j=r+1}^{r+s} a_j\, b_{2r+s+1-j}, +\infty).$$

(II) $[a_1, a_r] \cap [a_{r+1}, a_{r+s}] \neq \emptyset$ であって、$a_r \neq a_{r+1}$, $a_1 \neq a_{r+s}$ であるか $[b_1, b_r] \cap [b_{r+1}, b_{r+s}] \neq \emptyset$ であって、$b_r \neq b_{r+1}$, $b_1 \neq b_{r+s}$ のとき、S,T がスカラー行列でない限り

$$W_S^J(T) = (-\infty, +\infty).$$

上記の命題では、例えば 2 区間 $[a_1, a_r]$ と $[a_{r+1}, a_{r+s}]$ とがが互い素であるかまたは端点のみを共有し、2 区間 $[b_1, b_r]$ と $[b_{r+1}, b_{r+s}]$ が互いに素であるかまたは端点のみを共有し、この 2 組のうち少なくとも 1 組は端点を共有する場合が扱っていないが実は場合に対しても (I) と同様の結果を与えることができる。例えば、(I),(i) には 2 つの場合 $a_k - a_\ell > 0$, $b_{k'} - b_{\ell'} < 0$ ($1 \le k, k' \le r$, $r+1 \le \ell, \ell' \le r+s$) と $a_k - a_\ell < 0$, $b_{k'} - b_{\ell'} > 0$($1 \le k, k' \le r$, $r+1 \le \ell, \ell' \le r+s$) の場合があるが、$a_j$ と b_j の役割交換によって前者と仮定してよい。ここで、

$$a_1 \ge a_r = a_{r+1} \ge a_{r+s}, \quad b_{r+1} \ge b_{r+s} = b_1 \ge b_r$$

と仮定する。このとき、$a_k^{(n)} = a_k + (1/n)$, $b_k^{(n)} = b_k - (1/n)$ ($1 \le k \le r$), $a_\ell^{(n)} = a_\ell - (1/n)$, $b_\ell^{(n)} = b_\ell + (1/n)$ ($r+1 \le \ell \le r+s$) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) とするとき、

$$T = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+s}),$$

$$T_n = \mathrm{diag}(a_1^{(n)}, \ldots, a_r^{(n)}, a_{r+1}^{(n)}, \ldots, a_{r+s}^{(n)}),$$

$$S = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_{r+s}),$$

$$S_n = \mathrm{diag}(b_1^{(n)}, \ldots, b_r^{(n)}, b_{r+1}^{(n)}, \ldots, b_{r+s}^{(n)}),$$

および $U \in U(r, s)$ に対して、命題 3.1 より、

$$\mathrm{tr}(S_n\, U\, T_n\, U^{-1}) \le \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j - \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{j=r+1}^{r+s} a_j) + \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{r} b_j - \sum_{j=r+1}^{r+s} b_j) - \frac{r+s}{n^2} \to \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j,$$

$$\mathrm{tr}(S_n\, U\, T_n\, U^{-1}) \to \mathrm{tr}(S\, U\, T\, U^{-1})$$

が $n \to \infty$ に対して成り立つから、不等式

$$\mathrm{tr}(S\, U\, T\, U^{-1}) \le \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j,$$

および包含関係

$$W_S^J(T) \subset (-\infty, \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j]$$

が言える。また、

$$\mathrm{tr}(S\,T) = \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j,$$

だから、$W_S^J(T)$ は上記の区間の右端を含む。ここで、T がスカラー行列でない限り $a_1 > a_r$ または、$a_{r+1} > a_{r+s}$ が成り立ち、S がスカラー行列でない限り $b_{r+1} > b_{r+s}$ または、$b_1 > b_r$ が成り立ち、

$$W_S^J(T) \supset W_{S'}^{J'}(T') + a_2\, b_1 + \ldots + a_r\, b_{r-1} + a_{r+1}\, b_{r+2} + \ldots + a_{r+s-1}\, b_{r+s},$$
$$W_{S'}^{J'}(T') = (-\infty, a_1 b_r + a_{r+s} b_{r+s})$$

が、$J' = \mathrm{diag}(1,-1)$, $T' = \mathrm{diag}(a_1, a_{r+s})$, $S' = \mathrm{diag}(b_r, b_{r+1})$ に対して成り立つ。このことより、結局

$$W_S^J(T) = (-\infty, \sum_{j=1}^{r+s} a_j\, b_j]$$

が成立する。

また、J-エルミット行列ではあるが J-ユニタリーで対角化可能ではない行列に対しては次のような結果が成り立つ。

命題 3.2(cf. [1]) T, S は、(r,s)-型不定計量空間の J-エルミット行列で T はスカラー行列ではなく、その固有値はすべて実であって、(3.1),(3.2) のように与えられているする。S は虚の固有値を持つとする。このとき、$W_C^J(A) = \mathbf{R}$ が成り立つ。

4. C が 1 次元射影の場合

C が J-エルミット行列で、$\sigma(C) \subset \mathbf{R}$ で 1 次元射影である場合　すなわち、

(i) 或る $\eta \in \mathbf{C}^{r+s}, [\eta,\eta] = 1$ に対して $C\xi = [\xi,\eta]\eta$ for $\xi \in \mathbf{C}^{r+s}$ であるか、

(ii) 或る $\eta \in \mathbf{C}^{r+s}, [\eta,\eta] = -1$ に対して $C\xi = [\xi,-\eta]\eta = \xi,\eta](-\eta)$ for $\xi \in \mathbf{C}^{r+s}$ の場合の一般化数域 $W_C^J(A)$ はその性質が良く知られている。(i) に対する $W_C^J(A)$ を、$W_+^J(A)$ と表す。(ii) に対する $W_C^J(A)$ を $W_-^J(A)$ と表す。$W_+^J(A)$, $W_-^J(A)$ はともに凸となることがわかっている。

$$W_+^J(A) = \{[UAU^{-1}\eta,\eta] : U \in U(r,s)\} = \{[A\xi,\xi] : \xi \in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi] = 1\},$$
$$W_-^J(A) = \{-[UAU^{-1}\eta,\eta] : U \in U(r,s)\} = \{-[A\xi,\xi] : \xi \in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi] = -1\}$$
$$= \{[A\xi,\xi]/[\xi,\xi] : \xi \in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi] < 0\}.$$

数域 $W_+^J(A)$ が一般には閉集合とはならないことが、$J=\mathrm{diag}(1,-1)$,

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

のとき、$W_C^J(A)=(0,+\infty)$ となるからわかる。

さて、行列 A のスペクトルを3節の定義を拡張して

$$\sigma_+(A)=\{\lambda\in\sigma(A): A\xi=\lambda\xi \text{ for some } \xi\in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi]>0\},$$

$$\sigma_-(A)=\{\lambda\in\sigma(A): A\xi=\lambda\xi \text{ for some } \xi\in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi]<0\},$$

$$\sigma_0(A)=\{\lambda\in\sigma(A): A\xi=\lambda\xi \text{ for some non}-\text{zero}\xi\in \mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi]=0\}$$

と定める。このとき、$\sigma(A)=\sigma_+(A)\cup\sigma_-(A)\cup\sigma_0(A)$ および、$\sigma_+(A)\subset W_+^J(A)$, $\sigma_-(A)\subset W_-^J(A)$ が成り立つ。凸な領域でも、連結な領域でもなくなるが、

$$W^J(A)=W_+^J(A)\cup W_-^J(A)=\{[A\xi,\xi]/[\xi,\xi]:\xi\in\mathbf{C}^{r+s}, [\xi,\xi]\neq 0\}$$

を問題にすることも多い。正定値計量 $<\cdot,\cdot>$ に関して

$$<J\xi,\xi>=<JA\xi,\xi>=0$$

となる0でないベクトル ξ がないとき、すなわち中立な0でないベクトル ξ: $[\xi,\xi]=0$ に対しては、$[A\xi,\xi]=0$ とはならないとき、領域 $W^J(A)$ は

$$P(\lambda)=J\lambda-JA$$

という行列多項式の数域と一致し、閉領域である。このような0でない中立なベクトルがあるときは、上記の行列多項式の数域は複素数平面に一致するが、$W_+^J(A)$ や $W^J(A)$ は必ずしもこれと一致しない。

このような場合も含めて、複素数平面における領域 $W^J(A)$ あるいは $W_+^J(A)$ などの境界の接線で原点を通過しないものを任意にとり、

$$a\Re(z)+b\Im(z)+1=0, \tag{4.1}$$

ただし、a,b は実数とするとき、方程式

$$\det(J+a(JA+A^*J)/2-i\,b(JA-A^*J)/2)=0 \tag{4.2}$$

が成り立つ。ここで、A が、J-エルミットのときは、$JA^*J=A$ だから $A^*J=JA$ が成り立つ。A が J-エルミットのとき、

$$W_+^J(A)=\{x\in\mathbf{R}:\lambda(x+i)\in W(JA+iJ) \text{ for some } 0<\lambda\leq 1\}$$

が成り立つ。

方程式 (4.2) が成り立つということは、数域 $W(A)$ の境界の接線 (4.1) を取るとき、

$$\det(I + a(A + A^*)/2 - ib(A - A^*)/2) = 0$$

が成り立つという事実の一般化となっている。

例えば、$J = \mathrm{diag}(1, -1)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ならば、$W_C^J(B) = \{z \in \mathbf{C} : \Re(z) > 1/2\}$ となる。この領域の境界の情報は、方程式

$$\det(J + x(JB + B^*J)/2 - iy(JB - B^*J)/2) = -\frac{1}{4}\{(x+2)^2 + y^2\} = 0$$

より得られる。点 $(x, y) = (-2, 0)$ で定まる直線 $-2\Re(z) + 1 = 0$, すなわち $\Re(z) = 1/2$ が、$W_C^J(B)$ の境界である。

5. 2次元の不定計量空間の場合

$(1,1)$ 型の不定計量空間における行列 A, C に対して一般化数域 $W_C^J(A)$ を決定しよう。C に対して公式

$$W_{C+\lambda I}^J(A) = \lambda \mathrm{tr}(A) + W_C^J(A)$$

が成り立つから、C がスカラー行列でない限り、適当にスカラー行列を足すことにより、C の階数が 1 であると仮定できる。同様に A も階数 1 と仮定できる。ここで、

$$C\xi = [\xi, \eta]\zeta, \quad A\xi = [\xi, \kappa]\tau$$

という表示が 0 でないベクトル $\eta, \zeta, \kappa, \tau$ を用いてできる。ここで $\mathrm{tr}(CJC^*J) = 0$ という条件と、$[\eta, \eta][\zeta, \zeta] = 0$ とが同値となる。また、$\mathrm{tr}(CJC^*J) > 0$ と $[\eta, \eta][\zeta, \zeta] > 0$ とが同値であり、$\mathrm{tr}(CJC^*J) < 0$ と $[\eta, \eta][\zeta, \zeta] < 0$ とが同値となる。また、$[\zeta, \zeta] \neq 0$ という前提の下で、$[C\xi, C\xi] \geq 0$ for $\xi \in \mathbf{C}^2$ と $[\zeta, \zeta] > 0$ が同値であって、$[C\xi, C\xi] \leq 0$ for $\xi \in \mathbf{C}^2$ と $[\zeta, \zeta] < 0$ が同値である。

定理 5.1(cf.[4]) C, A は、$J = \mathrm{diag}(1, -1)$ で定まる $(1,1)$ 型不定計量空間の階数 1 の行列とし、$\mathrm{tr}(CJC^*J) \neq 0$, $\mathrm{tr}(AJA^*J) \neq 0$ と仮定する。このとき、$W_C^J(A)$ は複素数平面の連結閉集合である。

(i)$\mathrm{tr}(CJC^*J)\mathrm{tr}(AJA^*J) < 0$ のとき、集合 $W_C^J(A)$ は全平面となる。

(ii)$\mathrm{tr}(CJC^*J) > 0$, $\mathrm{tr}(AJA^*J) > 0$ のとき、集合 $W_C^J(A)$ は、閉線分または閉半平面または、双曲線の 1 つの枝を境界とする凸領域または双曲線の 1 つの枝を境界とする凹領域となる。

$\mathrm{tr}(CJC^*J) < 0$, $\mathrm{tr}(AJA^*J) < 0$ の場合はさらに 2 つの場合に分けられる。

(iii) $[C\xi, C\xi] \geq 0, [A\xi, A\xi] \geq 0$ が任意の $\xi \in \mathbf{C}^2$ に対して成り立つとき、(または、$[C\xi, C\xi] \leq 0, [A\xi, A\xi] \leq 0$ が任意の $\xi \in \mathbf{C}^2$ に対して成り立つとき), 集合 $W_C^J(A)$ は全平面となる。

(iv) $[C\xi, C\xi] \geq 0, [A\xi, A\xi] \leq 0$ が任意の $\xi \in \mathbf{C}^2$ に対して成り立つとき、(または、$[C\xi, C\xi] \leq 0, [A\xi, A\xi] \geq 0$ が任意の $\xi \in \mathbf{C}^2$ に対して成り立つとき), 集合 $W_C^J(A)$ は楕円を境界とするような非有界閉領域となる。

(iv) で登場する領域 $W_C^J(A)$ の境界である楕円は、$\lambda_0 = (1/2)\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(A)$ を中心とする。この楕円は $\lambda_0 = 0$ のとき, すなわち C または A が巾零なときに限り円板となり、それ以外のとき、$\theta = \arg(\lambda_0)$ により、複素数平面における座標 $z = x + iy(\ (x,y) \in \mathbf{R}^2)$ により、楕円の方程式が、

$$\frac{(x\cos\theta + y\sin\theta - \lambda_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2}{\beta^2} = 1$$

で与えられる。

ここで、

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1/2)\{\mathrm{tr}(CJC^*J)\,\mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2} \\
&\quad +(1/2)\{\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J)\}^{1/2}\{\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2}, \\
\beta &= (1/2)[|\mathrm{tr}(CJC^*J)|^{1/2}\{\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2} \\
&\quad +|\mathrm{tr}(AJA^*J)|^{1/2}\{\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J)\}^{1/2}]
\end{aligned}$$

また、(ii) で登場する領域 $W_C^J(A)$ の境界を含む双曲線は、$\lambda_0 = (1/2)\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(A)$ を中心とし、媒介変数表示

$$\begin{aligned}
x\cos\theta + y\sin\theta &= \lambda_0 \pm \tilde{\alpha}\cosh t, \\
-x\sin\theta + y\cos\theta &= \tilde{\beta}\sinh t
\end{aligned}$$

$(\ -\infty < t < \infty)$ で与えられる。

ここで、

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= (1/2)\{\mathrm{tr}(CJC^*J)\,\mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2} \\
&\quad -(1/2)\{\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J)\}^{1/2}\{\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2}, \\
\tilde{\beta} &= (1/2)[|\mathrm{tr}(CJC^*J)|^{1/2}\{\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J)\}^{1/2} \\
&\quad +|\mathrm{tr}(AJA^*J)|^{1/2}\{\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J)\}^{1/2}]
\end{aligned}$$

であり、$\tilde{\alpha} = 0$ の場合、すなわち

$$\mathrm{tr}(CJC^*J)\,\mathrm{tr}(AJA^*J)$$

$$= [\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J)][\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J)],$$

のときに限って $W_C^J(A)$ は閉半平面である。$\tilde{\alpha} > 0$ のとき、$W_C^J(A)$ は双曲線の一つの枝を境界とする凸な領域であり、$\tilde{\alpha} < 0$ のとき、$W_C^J(A)$ は、双曲線の 1 つの枝を境界とする凹な領域である。また、$\tilde{\beta} = 0$ の場合、すなわち

$$\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(C^*) - \mathrm{tr}(CJC^*J) = 0, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^*) - \mathrm{tr}(AJA^*J) = 0,$$

の場合、言い換えれば、$\eta = \lambda_1\zeta$, $\kappa = \lambda_2\tau$ があるスカラー $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ に対して成り立つとき、またそのときに限って $W_C^J(A)$ は閉半直線となる。

例 $J = \mathrm{diag}(1, -1)$ とする。定理の (ii), (iv) を C, A として標準形をとることによって言い表してみよう。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(-1 < k, q < 1)$ とするとき、

$$W_C^J(A) = \{x + iy : y = (1/2)(|k|\sqrt{1-q^2} + |q|\sqrt{1-k^2})\sinh t,$$

$$x \geq -(1/2) + (1/2)(\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-q^2})\cosh t, -\infty < t < \infty\},$$

また、

$$C = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(-1 < k, q < 1)$ とするとき、

$$W_C^J(A) = \{x + iy : y = (1/2)(|k|\sqrt{1-q^2} + |q|\sqrt{1-k^2})\sinh t,$$

$$x \geq (1/2) + (1/2)(\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-q^2})\cosh t, -\infty < t < \infty\}.$$

また、

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & q \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$(-1 < k, q < 1)$ のときは、

$$W_C^J(A) = \{x + iy : (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$$\frac{(x - k\,q/2)^2}{[(1/2)(1 + \sqrt{1-k^2}\sqrt{1-q^2})]^2} + \frac{y^2}{[(1/2)(\sqrt{1-k^2} + \sqrt{1-q^2})]^2} \leq 1\}.$$

さらに、定理の (i),(iii) を、C, A として標準形をとることによって言い表してみよう。

$$C = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

のとき、(1) $|\eta_1| > |\eta_2|, |\kappa_2| > |\kappa_1$, (2) $|\eta_2| > |\eta_1|, |\kappa_1| > |\kappa_2|$, (3)$|\eta_2| > |\eta_1|, |\kappa_2| > |\kappa_1|$ の3つのどれかであれば $W_C^J(A) = \mathbf{C}$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

のとき、(4)$|\eta_1| > |\eta_2|, |\kappa_1| > |\kappa_2|$, または (5) $|\eta_2| > |\eta_1|, |\kappa_2| > |\kappa_1|$ のとき、$W_C^J(A) = \mathbf{C}$ となる。

6. 2次元の不定計量空間の場合

(2,1) 型の 3 次元不定計量空間の数域 $W_C^J(A)$ については、$U(2,1)$ による相似変換で行列 C, A が複素対角行列となる場合については、[3],[5] で扱われている。そのとき、$W_C^J(A)$ は複素数平面の閉集合である。$C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ が複素数平面上で或る直線上にあるとき、例えば c_1, c_2, c_3 が全部実数であるとき、$W_C^J(A)$ は線分、半直線で囲まれる領域または全平面となる。より具体的には次のような命題が成り立つ。

命題 6.1 $J = \mathrm{diag}(1,1,-1)$, $A = \mathrm{diag}(1,i,0)$, $C = \mathrm{diag}(1,c_2,0)$ ただし、c_2 は、実数 $-1 \le c_2 \le 1$ とするとき、

(1) $0 \le c_2 \le 1$ ならば、

$$W_C^J(A) = \{x + iy : (x,y) \in \mathbf{R}^2, c_2 \le x, c_2 \le y, 1 + c_2 \le x + y\}.$$

(2) $-1 \le c_2 < 0$ ならば、$W_C^J(A) = \mathbf{C}$.

7. ハミルトン力学系への応用

$n \times n$ 行列 A が与えれたとき、0 でないベクトル $x \in \mathbf{C}^n$ に対し、レイリー比 Rayleigh quotient $R(x) =< Ax, x > / < x, x >$ を問題にすれば、このような比の全体が A の数域 $W(A)$ となる。不定計量 $[\cdot,\cdot]$ をともなった空間においてもレイリー比を一般化したもの $R_J(x) = [Ax,x]/[x,x]$ が、中立でないベクトル $x \in \mathbf{C}^n$, $[x,x] \neq 0$ に対して定義できる。このようなレイリー比を、ハミルトン力学系に応用することが、[2] で述べられている。ハミルトン力学系において不定計量空間が現れる。n-次元ハミルトン力学系における状態 dynamical state は、時間に依存するベクトル $v = v(t) \in \mathbf{R}^{2n}$ によって特徴付けられる。このベクトルの成分は、標準化された運動量と位置 canonical momenta, canonical coordinates である:

$$v = (p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)^T.$$

ここで、ハミルトニアン（ハミルトン関数）を $H = H(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$ と表すとき、状態 v の成分の時間発展は、ハミルトンの方程式

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$(k = 1, \cdots, n)$ によって決定される。原点 $v = 0$ が固定点を記述し、小さい振幅の振動に対してハミルトン関数が位置と運動量について双線形的であるとする：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}(a_{kl}p_k\, p_l + b_{kl}q_k\, q_l + c_{kl}p_k\, q_l),$$

ここで係数は実で次の係数は対称的 $a_{kl} = a_{lk}, b_{kl} = b_{lk}$ とする。ここで、$n \times n$ 実行列 $A = (a_{kl}), B = (b_{kl}), C = (c_{kl})$, に対して２つのエルミット行列

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad L = -i\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

を考える。このとき、ハミルトン関数 H は、２次形式として $H =< Kv, v >$ と表され、ハミルトンの方程式は簡潔に、

$$i\, L(\frac{\partial v}{\partial t}) = Kv$$

と表示される。ここで、L を計量を定める行列と解釈し、力学的な状態に対して不定計量空間のベクトルを対応させることができる。いわゆる正規モデル normal model においては指数因子 $\exp(i\,\omega\, t)$ によって与えられる時間発展に対応するものである。ここで、ω は正規振動数（周波数）normal frequency である。正規振動数は、$L^{-1}K$ の固有値であって、正規モデルは対応する固有ベクトルであり、固有値問題

$$\omega Lu = Ku,\ u \in \mathbf{C}^{2n}.$$

によって決定される。レイリー比

$$R(u) = \frac{< Ku, u >}{< Lu, u >},\ u \in \mathbf{C}^{2n}$$

は、正規モデルにより、停留的になり、$< Lu, u >> 0$ に対するレイリーの最小値が、基本的な調和振動の振動数となる。

参考文献

[1] N. Bebiano,H. Nakazato, J. da Prodidência, R.Lemos and G. Soares. Inequalities for J-Hermitian matrices. *Linear Algebra Appl.*, **407**(2005), 125-139.

[2] N. Bebiano, H. Nakazato, J. da Prodidência.An extension of Courant-Fischer Theorem for Krein spaces. submitted.

[3] H. Nakazato, N. Bebiano and J. da Providência. J-orthostochastic matrices of size 3×3 and numerical range of Krein space operators, *Linear Algebra Appl.* 407(2005), 211-232.

[4] H. Nakazato, N. Bebiano and J. da Providência. The numerical range of 2-dimensional Krein spaces operastors, submitted.

[5] H. Nakazato, N. Bebiano and J. da Providência. Shapes of numerical ranges of operators on a 3-dimensional Krein space, submitted.