数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 11-22

トーリックケーラー多様体内のトーラス軌道のハミルトン安定性について

首都大学東京・都市教養学部　小野　肇* (Hajime Ono)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University

1　概要

2 次元単位球面 $S^2(1)$ 内の（大円でない）小円は極小部分多様体ではないが, 等周不等式により, 囲む面積を一定に保つような変形のもとでは長さが最小になることがわかる. つまり, 変形の仕方に制限を付けることで初めて長さの最小性という性質が現れる. このような対象の一つの高次元での一般化として Y.-G. Oh により提案されたケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体に関する「ハミルトン安定性, ハミルトン体積最小性」の概念（[Oh1], [Oh2]）は様々な研究者達によって調べられている.

ここでは, $S^2(1)$ の一つの自然な高次元化としてコンパクトトーリックケーラー多様体を採り上げ, そのトーラス軌道のハミルトン安定性について論じる. 特に, $(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$, Delzant 多面体から canonical に決まる 2 次元トーリックケーラー多様体, 及びそれらの（トーリックケーラー多様体としての）変形に関して調べる事で, “局所ハミルトン体積最小（ハミルトン安定）ファイブレーション”や“ハミルトン不安定ファイブレーション”が得られる事を紹介する.

2　ハミルトン極小, ハミルトン安定

この章では, Y.-G. Oh による「ハミルトン安定性」の概念を紹介する；小円 $\subset S^2(1)$ の「囲む面積を一定に保つ変形」の高次元における一つの一般化を与え, そのような変形のもとでの体積汎関数の振る舞いを調べる.

まず, 小円の高次元化としては複素 n 次元ケーラー多様体 (M, J, ω) のラグランジュ部分多様体 $L \subset M$（つまり, $\dim L = n$, $\omega_{|TL} \equiv 0$）をとる.

次に, 変形の仕方をこのケースにおいて一般化することを考えよう. まず, 無限小変形を考える. $S^2(1)$ の単純閉曲線 l の場合にはその単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ を採っておくと, l

*The author is supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows

の無限小変形は l 上の C^∞ 関数 f を用いて $f\boldsymbol{n}$ と表せる．そのうち，囲む面積を一定に保つようなものは $\int_l f=0$ となるものである．一方，ケーラー多様体のラグランジュ部分多様体 $L\subset(M,J,\omega)$ の場合には，L の法ベクトル場全体 $\Gamma(NL)$ は

$$\Gamma(NL)\simeq\Omega^1(L),\quad (V\mapsto\alpha_V:=(V\lrcorner\omega)_{|TL}) \tag{2.1}$$

と表せる．このうち，

$$\{\text{ラグランジュ部分多様体のまま変形}\}\longleftrightarrow\{L\text{ 上の閉 1 形式}\}$$

であるが，$S^2(1)$ の場合に戻って考えると，この変形の条件では小円の体積最小性を与えるには弱いことがすぐにわかる．（実際，$S^2(1)$ の場合には任意の曲線はラグランジュ部分多様体なので，「ラグランジュ部分多様体のまま変形」というのは何も制限を与えない．）そこで，$S^2(1)$ の場合の一般化と考えれば，

$$\{L\text{ 上の完全 1 形式}\}\text{ によるラグランジュ部分多様体の（無限小）変形}$$

を考えるのが自然である．

定義 2.1. $L\subset(M,J,\omega)$ をケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体とする．このとき，L 上の法ベクトル場 V で $V=J\,\mathrm{grad}\,f$ $({}^\exists f\in C^\infty(L))$ と書けるものを L の**無限小ハミルトン変形**と呼ぶ．ここで，grad は L 上の誘導計量に関する勾配である．言い換えると，$V\in\Gamma(NL)$ が無限小ハミルトン形式であるとは，α_V が完全形式である事である．

次に，小円 $\subset S^2(1)$ の「囲む面積を一定に保つ変形」の一般化を与えよう．大域的な捕らえ方をすると「囲む面積を一定に保つ変形」は「$S^2(1)$ の体積要素を変えないイソトピーによる変形」と考える事ができる．そこで，ケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体の場合には「シンプレクティック形式を保つイソトピー」で変形する事にする．ただし，実際には，無限小ハミルトン変形との整合性を保つために，より条件を強くして，ハミルトン微分同相による変形を採用する；

定義 2.2. $L\subset(M,\omega)$ をシンプレクティック多様体内のラグランジュ部分多様体とし，

$$\mathrm{Ham}(M,\omega)\subset\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$$

を (M,ω) のハミルトン微分同相写像全体のなす群とする．このとき，

$$\mathrm{Ham}(L):=\{\phi(L)\subset M\mid\phi\in\mathrm{Ham}(M,\omega)\}$$

と書き，$\mathrm{Ham}(L)$ の元を L を**ハミルトン変形**して得られた部分多様体と呼ぶ．

注 2.3. ハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保つので，L をハミルトン変形して得られた部分多様体はラグランジュ部分多様体である．

定義 2.4 (Y.-G. Oh, [Oh1], [Oh2]). $L_0 \subset (M, J, \omega)$ をケーラー多様体内のコンパクトラグランジュ部分多様体とする.

- $L \in \mathrm{Ham}(L_0)$ が体積汎関数 $\mathrm{Vol} : \mathrm{Ham}(L_0) \to \mathbb{R}$ の停留点であるとき, **ハミルトン極小**（***H-minimal***）と呼ぶ.
- $L \in \mathrm{Ham}(L_0)$ が *H-minimal* であり, 体積汎関数 $\mathrm{Vol} : \mathrm{Ham}(L_0) \to \mathbb{R}$ の任意の第二変分が非負であるとき, **ハミルトン安定**（***H-stable***）と呼ぶ.
- $L \in \mathrm{Ham}(L_0)$ が体積汎関数 $\mathrm{Vol} : \mathrm{Ham}(L_0) \to \mathbb{R}$ の最小（極小）点であるとき, **（局所）ハミルトン体積最小**（***(locally) H-volume minimizing***）と呼ぶ.

ハミルトン極小性, ハミルトン安定性, 局所ハミルトン体積最小性は, 局所的な性質なので, 次の Y.-G. Oh による無限小ハミルトン変形に関する第一, 第二変分公式を用いる事で調べる事ができる；

命題 2.5 (Y.-G. Oh, [Oh1], [Oh2]). $L \subset (M, J, \omega)$ をケーラー多様体内のコンパクトラグランジュ部分多様体とする. このとき, L がハミルトン極小であるための必要十分条件は

$$\delta\alpha_H = 0 \tag{2.2}$$

である, ここで, $H \in \Gamma(NL)$ は L の平均曲率ベクトルであり, α_H は(2.1) により定義され, δ は L 上の誘導計量に関する余微分である.

また, L がハミルトン極小で, $\{L_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon} \subset \mathrm{Ham}(L)$ を $L_0 = L$, $dL_t/dt_{|t=0} = J\,\mathrm{grad}\, f$ となる L のハミルトン変形とすると

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}\mathrm{Vol}(L_t) = \int_L \{&(\Delta f)^2 - \mathrm{Ric}_M(J\,\mathrm{grad}\, f, J\,\mathrm{grad}\, f) - 2\langle df \otimes df \otimes JH, JS\rangle \\ &+ \langle \mathrm{grad}\, f, JH\rangle^2\} d\mu,\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる, ここで S は L の第二基本形式である.

一般に, ハミルトン極小ラグランジュ部分多様体の平均曲率ベクトルは 0 ではないので, よく知られた極小部分多様体の第二変分公式と異なり, 第二基本形式及び平均曲率ベクトルを含む項が第二変分に現れる. したがって, ハミルトン極小ラグランジュ部分多様体が与えられても, 第二変分を計算するのは厄介である.

しかし, トーリックケーラー多様体の T^n 軌道の場合には幾つかの理由により第二変分の計算を比較的容易に実行する事ができる事を以下の章で見る事にする.

3 トーリックケーラー幾何

この章では，トーリックケーラー多様体に関する Guillemin, Abreu による結果，[Ab], [Gu], のうち，後で用いるもの（特に，ある開集合上の「ケーラーポテンシャル」及び「複素ポテンシャル」）をまとめておく．

(M, J, ω, μ) を複素 n 次元コンパクトトーリックケーラー多様体とする．つまり，T^n が M に効果的かつ正則かつハミルトンに作用するとする．（ここで，$\mu : M \to \Delta := \mathrm{Image}(\mu) \subset \mathbb{R}^n$ はモーメント写像である．Atiyah 及び Delzant により，Δ は Delzant 多面体と呼ばれる凸多面体となる，[A], [D] 参照．逆に，Delzant 多面体 Δ が与えられると，その組み合わせ的なデータのみから複素多様体としてのコンパクトトーリック多様体 (M_Δ, J_Δ) やシンプレクティック多様体としてのトーリック多様体 $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ が canonical に決まる（例えば[Gu]参照．）$(M_\Delta, J_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$）はケーラー多様体になる事がわかり，これを Delzant 多面体 Δ に関する **canonical トーリックケーラー多様体**と呼ぶ．）

注 3.1. 上のようなトーリックケーラー多様体 (M, J, ω, μ) があったとすると，ハミルトン T^n 空間としては (M, ω, μ) と $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ は同型であるが（*[D]*），この同型は一般には J と J_Δ に関して正則とは限らないので，もちろんケーラー多様体としては (M, J, ω) と $(M_\Delta, J_\Delta, \omega_\Delta)$ が同型というわけではない．

(M, J, ω, μ) は複素及びシンプレクティック多様体としてのトーリック多様体の構造を持つので，それぞれの構造に即した「良い座標」をある開集合上持つ；

1. 複素座標とケーラーポテンシャル

まず，(M, J) を複素トーリック多様体と思うと，$(\mathbb{C}^\times)^n$ の作用に関する open dense 軌道 M_0 が存在する；

$$M_0 \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \overset{\log}{\simeq} \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \ni (\boldsymbol{u}, \sqrt{-1}\boldsymbol{v}) \tag{3.1}$$

ここで，上の同型は全て T^n-同変かつ正則である．この M_0 上の $(\boldsymbol{u}, \sqrt{-1}\boldsymbol{v})$-座標（ここでは**複素座標**と呼ぶ事にする）を用いると，T^n-作用と複素構造は M_0 上ではそれぞれ

$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u}, \sqrt{-1}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \sqrt{-1}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{t})),$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -id \\ id & 0 \end{pmatrix}$$

と表す事が出来る．さて，残る構造はケーラー形式 ω であるが，M_0 上では T^n-不変なケーラーポテンシャル $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して

$$\omega = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Hess}_{\boldsymbol{u}}\,\varphi \\ -\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{u}}\,\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる（[Gu], [A]）．この φ を用いるとモーメント写像とリッチ形式は複素座標で

$$\mu(\boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \tag{3.2}$$

$$\rho(\omega) = i\bar{\partial}\partial \log\det(g_{j\bar{k}}) = \begin{pmatrix} 0 & V \\ -V & 0 \end{pmatrix} \quad \left(V = -\frac{1}{2}\operatorname{Hess}\left(\log\det \operatorname{Hess}_{\boldsymbol{u}}(\varphi)\right)\right) \tag{3.3}$$

となる．(ただし, モーメント写像は定数 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を足す分だけ自由度がある事に注意する.)

2. action-angle 座標と複素ポテンシャル

まず, (M, ω, μ) をシンプレクティックトーリック多様体と思うと, Delzant 多面体 $\Delta = \operatorname{Image}(\mu)$ の内部 $\mathring{\Delta}$ のモーメント写像による逆像 $M_0 := \mu^{-1}(\mathring{\Delta})$ において, T^n-作用とケーラー形式 ω が

$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{y})) \quad \boldsymbol{t} \in T^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$$

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dy^j$$

となるような座標

$$M_0 = \mu^{-1}(\mathring{\Delta}) \simeq \mathring{\Delta} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が採れる．この $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$-座標（ここでは **action-angle 座標**と呼ぶ事にする）を用いたとき, 複素構造 J に関しては T^n-不変な "ポテンシャル" $\phi \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ が存在して

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Hess}_{\boldsymbol{x}} \phi \\ \operatorname{Hess}_{\boldsymbol{x}} \phi & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

と書ける．([Ab]．)

注 3.2. もちろん, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ や $\phi \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ はある境界条件を満たさなければならない．この境界条件に関しては *[Ab]* を参照の事.

ルジャンドル変換（[Gu], [Ab]）

上で挙げた２つの座標はルジャンドル変換により次のように関係している；

$$x^j = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j},\ u^j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j},\ y^j = v^j,\ \varphi(\boldsymbol{u}) + \phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} \quad \text{at } \boldsymbol{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.5}$$

この関係を用いる事で, M_0 上で複素座標を用いて φ の微分によって表された式を action-angle 座標を使って ϕ の微分で表す事が出来る.

最後に, Delzant 多面体

$$\Delta := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | l_r(\boldsymbol{x}) \geq 0, r = 1, \cdots, d\},$$

(ここで, d は Delzant 多面体 Δ の面の個数で, $\boldsymbol{n}_r \in \mathbb{Z}^n$ を面に関する primitive な内向き法ベクトルとしたとき, 面を定義する 1 次式を

$$l_r(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_r \rangle - \lambda_r$$

と書く) に関する canonical トーリックケーラー構造 $(M_\Delta, J_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ を与える複素ポテンシャル ϕ_Δ は具体的に次のように与えられる事が知られている;

命題 3.3 ([Ab], [Gu]). *canonical* トーリックケーラー多様体 $(M_\Delta, J_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ の複素ポテンシャルは

$$\phi_\Delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{d} l_r(\boldsymbol{x}) \log l_r(\boldsymbol{x}) \tag{3.6}$$

で与えられる.

4 トーラス軌道のハミルトン安定性

この章では, コンパクトトーリックケーラー多様体 (M, J, ω, μ) に対して, $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in$ (Image(μ) の内部) のハミルトン安定性に関して議論する.

まず, 前章の複素座標や action-angle 座標を用いる事により, $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ はラグランジュトーラスであり, 誘導計量は平坦である事がわかる. また, その構成の仕方より, $\alpha_H \in \Omega^1(\mu^{-1}(\boldsymbol{x}))$ (命題 2.5 の式(2.2) 参照) は T^n-不変である. したがって, 誘導計量に関して調和形式である. よって, 命題 2.5 より

命題 4.1. (M, J, ω, μ) をコンパクトトーリックケーラー多様体とする. このとき, 任意の Image(μ) の内点 $\boldsymbol{x}$ に対して $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ はハミルトン極小平坦ラグランジュトーラスである.

つまり, コンパクトトーリックケーラー多様体は "ハミルトン極小ラグランジュトーラスファイブレーション" と考える事ができる (ここで, " " を付けたのはもちろん, Image(μ) の境界の点について μ の逆像を考えると次元の落ちたイソトロピック部分多様体になるからである. このような逆像に対してある種の極小性や安定性, 体積最小性を考えるのも面白い問題である.)

そこで, $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ のハミルトン安定性やハミルトン体積最小性がどのようになっているのかを考える事ができる. ここでは特にハミルトン安定性について調べたい. そのために命題 2.5 により第二変分を計算したいのだが, そのためには, $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ 上の誘導計量, 第二基本形式 S, 平均曲率ベクトル H 及び, M のリッチ曲率 Ric_M を求める必要がある. 一般の場合にはこれらを求めるのは比較的大変な事であるが, $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ のケースには

- $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ 上の誘導計量, S, H, Ric_M は M_0 上のケーラー及び複素ポテンシャルの微分を用いて表す事が出来る；

$$\mu^{-1}(\boldsymbol{x}) \text{ 上の誘導計量} \Leftarrow \varphi, \phi \text{ の 2 階微分}, \ S, \ H \Leftarrow \varphi, \phi \text{ の 3 階微分}$$

$$\mathrm{Ric}_M \Leftarrow \varphi, \phi \text{ の 4 階微分}$$

- $\mu^{-1}(\boldsymbol{x})$ 上の誘導計量は平坦であるので, 任意の無限小ハミルトン変形 ($\leftrightarrow C^\infty(\mu^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で積分すると 0) はラプラシアンの固有関数での展開が容易にできる.

という 2 つの大きな利点により, 第二変分を実際に計算する事ができる.

命題 4.2 ([O]).

1. **ケーラーポテンシャルによる表示：** $L_{\boldsymbol{u}_0} = \{(\boldsymbol{u}_0, i\boldsymbol{v}) | \boldsymbol{v} \in T^n\}$ がハミルトン安定 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$(g^{ij}m_i m_j)^2 - g^{ik}g^{jl}R_{ij}m_k m_l - 2g^{il}g^{jm}g_{kn}H^k S^n_{lm} m_i m_j + (H^i m_i)^2 \geq 0 \qquad (4.1)$$

ここで, ケーラーポテンシャル φ に対して

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}(\boldsymbol{u}_0), \ g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i, \ R_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(\log\det \mathrm{Hess}_{\boldsymbol{u}}\, \varphi)(\boldsymbol{u}_0),$$

$$S^k_{ij} = -\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l}(\boldsymbol{u}_0), \ H^i = g^{jk}S^i_{jk}$$

である.

2. **複素ポテンシャルによる表示：** $L_{\boldsymbol{x}_0} = \mu^{-1}(\boldsymbol{x}_0)$ がハミルトン安定 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$(g^{ij}m_i m_j)^2 - g^{ik}g^{jl}R_{ij}m_k m_l - 2g^{il}g^{jm}g_{kn}H^k S^n_{lm} m_i m_j + (H^i m_i)^2 \geq 0 \qquad (4.2)$$

ここで, 複素ポテンシャル ϕ に対して

$$g^{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}(\boldsymbol{x}_0), \ g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i,$$

$$g^{ik}g^{jl}R_{ij} = \frac{1}{2}g^{jl}\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^m}((\log\det \mathrm{Hess}_{\boldsymbol{x}}\, \phi))(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}(\log\det \mathrm{Hess}_{\boldsymbol{x}}\, \phi)(\boldsymbol{x}_0),$$

$$S^k_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\boldsymbol{x}_0), \ H^k = -\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\boldsymbol{x}_0)$$

である.

命題 4.3 ([O]). (M_i, J_i, ω_i) を n_i 次元トーリックケーラー多様体とし $(i=1,2)$, $L_u \subset M_1$, $L_{\tilde{u}} \subset M_2$ をハミルトン安定な *regular* なトーラス軌道とする．もし，任意の $0 \neq (\boldsymbol{m}\ \tilde{\boldsymbol{m}}) \in \mathbb{Z}^{n_1+n_2}$ に対して

$$(g^{ij}m_im_j)(\tilde{g}^{ab}\tilde{m}_a\tilde{m}_b) + (H^im_i)(\tilde{H}^a\tilde{m}_a) \geq 0. \tag{4.3}$$

が成り立つとすると，$L_u \times L_{\tilde{u}} \subset (M_1 \times M_2, J_1 \oplus J_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ はハミルトン安定である，ここで g^{ij}, H^i *(resp.* $\tilde{g}^{ab}$, $\tilde{H}^a$*)* は L_u *(resp.* $L_{\tilde{u}}$*)* に対して命題4.2で与えられた量である．

注 4.4.
1.　命題4.2の2は1からのルジャンドル変換により得られる（3章参照．）
2.　(M, J, ω, μ) がトーリックケーラーアインシュタインの場合にはモンジュ・アンペール方程式

$$\det \mathrm{Hess}\,\varphi = \exp(-2c\varphi)$$

を満たすようなケーラーポテンシャルが採れる．上の第二変分を実際に計算する時にはこのようなポテンシャルを用いると計算がだいぶ簡単になる．（*Ricci* 曲率の部分だけでなく，平均曲率ベクトル（これを求めるにはポテンシャルの3階微分を求める必要があった）がモンジュ・アンペール方程式によりポテンシャルの1階微分（モーメント写像）で求まる．*[O])*

5　例

この章では，具体的にケーラー，または複素ポテンシャルを与えた場合に実際に第二変分（命題4.2）を計算してみた結果を紹介する．特に，複素射影空間（およびそれらの直積），複素1次元，2次元の場合に関する結果を述べる．

5.1　複素1次元の場合

ここでは，action-angle 座標を用いることにする．この場合には(4.2)は複素ポテンシャル（1変数関数！）に関する微分不等式になる；Delzant 多面体と複素ポテンシャルは

$$\begin{cases} \cdot\ \Delta = [-1, 1], \\ \cdot\ \phi = \phi_\Delta + h \in C^\infty((-1,1)), \end{cases}$$

という形で，（ϕ_Δ は(3.6)によって定義される）命題4.2より，$\mu^{-1}(x_0)$ がハミルトン安定であるための条件は x_0 において

$$G^4 - \frac{1}{2}GG'' + \frac{3}{4}(G')^2 \geq 0 \quad (G := \phi'') \tag{5.1}$$

となる事である事がわかる．

そこで, 具体的にhを次のように与えてやる；

$$h(x) = ax^2, \quad a > -1$$

すると, ϕはAbreu による条件（[Ab]）を満たしていることがわかりS^2上のトーリック複素構造を与える事が分かる. さらにこのϕに関して(5.1) の左辺を計算すると

$$\frac{a}{(1-x^2)^2}\left(a^3x^4 - 2a^3x^2 - 4a^2x^2 + (a+1)(a^2+3a+3)\right) \tag{5.2}$$

となり,

$$\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow \text{ 任意の } \mu^{-1}(x) \text{ は局所ハミルトン体積最小} \\ -1/2 < a < 0 \Rightarrow \text{ 任意の } \mu^{-1}(x) \text{ はハミルトン不安定} \end{cases}$$

である事がわかる. つまり, $a \geq 0$の場合にはこれらの円は囲む面積を変えない変形のもとでの長さ汎関数の極小点となるが, $-1/2 < a < 0$の場合にはこのような変形のもとでの長さ汎関数の（停留点ではあるが）極小点にはならないという事である.

5.2 複素射影空間とその直積

$(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ にT^nが

$$([z^0 : z^1 : \cdots : z^n], (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})) \mapsto [z^0 : e^{it_1}z^1 : \cdots : e^{it_n}z^n]$$

で作用しているとする. ここで, Fubini-Study 形式ω_{FS}は reduction $S^{2n+1}(1) \to \mathbb{CP}^n$ で与えられるものとする. このとき, モーメント写像は

$$[z^0 : z^1 : \cdots : z^n] \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{|z^1|^2}{\sum_{j=0}^n |z^j|^2} + c_1, \ldots, \frac{|z^n|^2}{\sum_{j=0}^n |z^j|^2} + c_n\right)$$

という形で与えられる. （$(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ は定ベクトル）. このとき, 複素座標は次のように与えられる；まず, $\mu^{-1}(\mathring{\Delta})$ の部分は

$$\{[z^0 : z^1 : \cdots : z^n] \in \mathbb{CP}^n | z^j \neq 0, \text{ for any } j\} \simeq \mathbb{C}^n/2\pi i\mathbb{Z}^n,$$

$$\begin{aligned}
[z^0 : z^1 : \cdots : z^n] &\mapsto (u^1, \ldots, u^n, iv^1, \ldots, iv^n) \\
&:= \left(\log\left|\frac{z^1}{z^0}\right|, \ldots, \log\left|\frac{z^n}{z^0}\right|, i\arg\left(\frac{z^1}{z^0}\right), \ldots, i\arg\left(\frac{z^n}{z^0}\right)\right)
\end{aligned}$$

である. この複素座標を用いてモーメント写像を書き直すと

$$(\boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}) \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2u^1}}{1 + \sum_{j=1}^n e^{2u^j}} + c_1, \ldots, \frac{e^{2u^n}}{1 + \sum_{j=1}^n e^{2u^j}} + c_n\right)$$

となり，ケーラーポテンシャルは

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{4}\log\left(1 + \sum_{j=1}^{n} e^{2u^j}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j u^j$$

という形で書ける．（ここで，定ベクトルを $(c_1, \ldots, c_n) = (-1/(n+1), \ldots, -1/(n+1))$ としておくとモンジュ・アンペール方程式 $\det \mathrm{Hess}\,\varphi = \exp(-4(n+1)\varphi)$ を満たす．）このポテンシャルに関して(4.1) を計算する事で次を得る；

定理 5.1 ([O]). 任意の $[z^0 : \cdots : z^n] \in (\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ $(\forall j,\ z^j \neq 0)$ に対してその T^n-軌道は局所ハミルトン体積最小である．（つまり，$\mathbb{CP}^n$ は局所ハミルトン体積最小ラグランジュトーラスファイブレーションである．）
また，$(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m, a\omega_{FS} \oplus b\omega_{FS})$，$(a, b > 0)$ の任意の点 $([z^0 : \cdots : z^n], [w^0 : \cdots : w^m])$ $(\forall j, \forall k\ ,\ z^j, w^k \neq 0)$ の T^{n+m}-軌道も局所ハミルトン体積最小である．

5.3 複素２次元の場合

この場合には，幾つかの具体的な Delzant 多面体を２次元平面上に実現し，canonical トーリックケーラー構造（および，複素１次元の場合と同様に２次式により複素ポテンシャルを変形したトーリックケーラー構造）について実際第二変分（(4.2) の左辺）を求めてみる事が出来る．すると，面白い事に，canonical の場合にはかなりのトーラス軌道がハミルトン安定になる事がわかるのだが，複素ポテンシャルを２次式で変形すると，どのケースにおいても，２次元球面の場合のように，全てのトーラス軌道がハミルトン不安定になってしまう事が計算の結果わかる．(実際の計算には数式処理ソフト Maxima を使用した.)

以下，この章では，action 座標 $(x^1, x^2) =: (x, y)$，２次元 lattice の元 $(m_1, m_2) =: (b, c)$ と書くことにする．

例 5.2. *Delzant* 多面体

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 1 \geq 0, y + 1 \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$$

を考える．このときは *canonical* トーリックケーラー多様体 $(M_\Delta, J_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ は $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$，$\omega_{FS}$ は *Fubini-Study* 形式，である．従って，定理 *5.1* より，全ての $\mu_\Delta^{-1}(x, y)$，$(x, y) \in \mathring{\Delta}$ は局所ハミルトン体積最小である．ここで，より注意深く第二変分（(4.2) の右辺）を見てみると，任意の $(x, y) \in \mathring{\Delta}$ に対して，$(b, c) = (1, 0), (0, 1), (1, -1)$ の場合には 0 になる事がわかる．これらは $\mu_\Delta^{-1}(x, y)$ を $\mathbb{CP}^2$ の等長変換で動かす無限小変換に対応している．二次元球面の場合を真似て，複素ポテンシャルを $\phi_\Delta + a(x^2 + y^2)/2, -1/4 < a < 0$ という風に *canonical* なものから２次式で摂動してやると，例えば $(b, c) = (1, 0)$ の場合の(4.2) の右辺が任意の (x, y) に関して一斉に負になってしまうことがわかる．

定理 5.3. 複素ポテンシャル $\phi_\Delta + a(x^2 + y^2)/2, -1/4 < a < 0$ により $\mathbb{CP}^2$ に与えられたトーリックケーラー構造に対して，任意の $\mu^{-1}(x, y)$，$(x, y) \in \mathring{\Delta}$ はハミルトン不安定である．

例 5.4. *Delzant* 多面体

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, n - x - ny \geq 0, 1/2 - y \geq 0\}$$

を考える．このとき，複素多様体としては (M_Δ, J_Δ) は *Hirzebruch* 曲面である．ここで，第二変分（(4.2) の右辺）を注意深く見てみると，任意の $(x,y) \in \mathring{\Delta}$ に対して，$(b,c) = (1,0)$ の場合には0になる事がわかる．複素ポテンシャルを *canonical* なものから $\phi_\Delta + ax^2/2, a < 0, |a|$: 十分小，という風に2次式で摂動してやると，(4.2) の右辺が任意の (x,y) に関して一斉に負になってしまうことがわかる．したがって，

定理 5.5. 複素ポテンシャル $\phi_\Delta + ax^2/2, a < 0, |a|$: 十分小，により与えられるトーリックケーラー多様体に対して，任意の $\mu^{-1}(x,y)$，$(x,y) \in \mathring{\Delta}$ はハミルトン不安定である．

一方，*canonical* トーリックケーラー多様体の場合を見ると，$n = 1$ と $n \geq 2$ の場合で違いがでてくる；$n \geq 2$ の場合には y が 0 に近いところにハミルトン不安定なトーラス軌道が存在するが，$n = 1$ の場合には y が 0 に十分近いところではハミルトン安定になる．(その他の点でも，今まで確かめた限りでは全ての軌道はハミルトン安定である．) これらの実際の第二変分の計算結果の一部は *[O2]* 参照の事．

References

[Ab] M. Abreu, Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates, Fields Institute Comm. Vol. 35, pp.1-24, AMS, 2003.

[A] M. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14, 1-15, 1982.

[D] T. Delzant, Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, Bull. Soc. Math. France 116, 315-339, 1988

[Gu] V. Guillemin, Kaehler structures on toric varieties, J. Diff. Geom. 40, 285-309, 1994.

[IOS] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, Integral Geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in $S^2 \times S^2$, Proceedings of the Japan Academy, Vol. 79, Ser. A, No. 10, 167-170, 2003.

[Oh1] Y. -G. Oh, Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds, Invent. Math. 101, 501-519, 1990.

[Oh2] Y. -G. Oh, Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations, Math. Z. 212, 175-192, 1993.

[O] H. Ono, Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds, preprint.

[O2] H. Ono, Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds, 2005 年幾何学シンポジウム予稿集.