数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 33-42

On subriemannian contact manifolds

北川 友美子 (Yumiko Kitagawa)
奈良女子大学大学院人間文化研究科（博士研究員）
Division of Integrated Sciences
Graduate School of Human Culture
Nara Women's University

1 はじめに

滑らかな多様体 M 上の接分布 D （すなわち M の接束の部分ベクトル束 $D \subset TM$ ）と D の上のリーマン計量 g が与えられているとき，組 (M, D, g) をサブリーマン多様体という．$D = TM$ のときには，これはリーマン多様体に他ならない．特に，(M, D) が接触多様体のとき (すなわち D が余次元 1 で非退化であるとき), (M, D, g) をサブリーマン接触多様体という．これはサブリーマン多様体の中でも非自明でかつ最も典型的なものである．二つのサブリーマン多様体 (M, D, g) と (M', D', g') が同型であるとは, 微分同相写像 $\varphi: M \to M'$ が存在して $\varphi_* D = D'$, $\varphi^* g' = g$ を満たすときをいう．特に $(M, D, g) = (M', D', g')$ のとき, このような φ を自己同型写像とよび, これら全体のなす群をサブリーマン多様体 (M, D, g) の自己同型群という．リーマン多様体の自己同型群が有限次元のリー群をなすことは良く知られているが, サブリーマン多様体の自己同型群については, これまでまだあまり研究されていない．ここでは, サブリーマン接触多様体の自己同型群について考察する．なお，自己同型群そのものよりも寧ろ対応するリー代数にあたるもの，すなはち，無限小自己同型の芽のなすリー代数の層 $\mathcal{L}$ を扱う．これはリー代数の構造を持つ．M 上の局所ベクトル場 X で $L_X D \subset D, L_X g = 0$ をみたすものを (M, D, g) の無限小自己同型と呼んでいる．また，点 $a \in M$ における $\mathcal{L}$ の茎を $\mathcal{L}_a$ であらわす．写像 $\mathcal{L}_a \ni [X]_a \mapsto X_a \in T_a M$ がすべての $a \in M$ にたいして全射であるとき，$\mathcal{L}$ は推移的である，または (M, D, g) は等質であるという（ここで $[X]_a$ は点 $a \in M$ における X の芽であり，X_a は X の $a \in M$ における値である）．$\mathcal{L}_a$ を巾零幾何の手法を用いて調べた．その結果，$2n+1$ 次元の等質なサブリーマン接触多様体の自己同型群は有限次元で，最大次元 $(n+1)^2$ をとり，それらを局所同型によって類別すると，3つの類に分かれることが分かった．さらに，3つのそれぞれについて，その群が作用する典型的なサブリーマン接触多様体を具体的に構成した．この結果について詳しく述べることにする．

2 Subriemannian contact transitive filtered Lie algebras

(M, D, g) を $2n+1$ 次元の等質なサブリーマン接触多様体とし，$\mathcal{L}$ を (M, D, g) の無限小自己同型のリー代数の芽のなす層とする．また，以下のように帰納的に定められる $\mathcal{L}_a$ の filtration $\{\mathcal{L}_a^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ を導入しておく：

(i) $\mathcal{L}_a^p = \mathcal{L}_a$ $(p \leq -2)$

(ii) $\mathcal{L}_a^{-1} = \{[X]_a \in \mathcal{L}_a; X_a \in D_a\}$

(iii) $\mathcal{L}_a^0 = \{[X]_a \in \mathcal{L}_a; X_a = 0\}$

(iv) $\mathcal{L}_a^{p+1} = \{\xi \in \mathcal{L}_a^p; [\xi, \eta] \in \mathcal{L}_a^{p+q+1} \text{ for all } \eta \in \mathcal{L}_a^q, q < 0\}$ $(p \geq 0)$.

このとき，

$$[\mathcal{L}_a^p, \mathcal{L}_a^q] \subset \mathcal{L}_a^{p+q} \quad \text{for all } p, q \in \mathbf{Z}$$

であることと，

$$\dim \mathcal{L}_a^p / \mathcal{L}_a^{p+1} < \infty$$

であることが分かる．また，次のようにそれぞれ射影極限をとる:

$$L = \lim_{\longleftarrow k} \mathcal{L}_a / \mathcal{L}_a^k,$$

$$L^p = \lim_{\longleftarrow k} \mathcal{L}_a^p / \mathcal{L}_a^k.$$

このとき，リー代数 L とその filtration $\{L^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ が得られる．さらに，組 $(L, \{L^p\})$ は“深さが 2 の transitive filtered Lie algebra”となる（森本 [2] を参照）：深さ μ の transitive filtered Lie algebra (TFLA) とは，リー代数 L で，以下の 6 つの条件を満たす L の部分列 $\{L^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ を持つものである（ここで μ は正整数）.

(F1) $L = L^{-\mu}$,

(F2) $L^p \supset L^{p+1}$,

(F3) $[L^p, L^q] \subset L^{p+q}$,

(F4) $\bigcap_{p\in\mathbf{Z}} L^p = 0$,

(F5) $\dim L^p / L^{p+1} < \infty$,

(F6) $L^{p+1} = \{X \in L^p; [X, L^a] \subset L^{p+a+1} \text{ for all } a < 0\}$, for any $p \geq 0$.

TFLA $(L,\{L^p\})$ は点 a における $\mathcal{L}$ の formal algebra と呼ばれる.

さて, $\mathfrak{l}=\bigoplus \mathfrak{l}_p=\bigoplus L^p/L^{p+1}$ を TFLA $(L,\{L^p\})$ に付随する graded Lie algebra とする. このとき, $\mathfrak{l}=\bigoplus \mathfrak{l}_p$ は次の条件を満たす:

(i) $\mathfrak{l}_-=\bigoplus_{p<0}\mathfrak{l}_p$ は (2n+1) 次元の Heisenberg Lie algebra $\mathfrak{c}_-(n)=\mathfrak{c}_{-2}(n)\oplus\mathfrak{c}_{-1}(n)$ に同型, ここで $\mathfrak{c}_{-2}(n)=\mathbf{R},\mathfrak{c}_{-1}(n)=\mathbf{R}^{2n}$ でブラケットは以下で与えられている: $[e_i,e_j]=\delta_{n,j-i}f$ for $i<j$, ここで $\{f\}$, $\{e_1,e_2,\dots,e_{2n}\}$ はそれぞれ $\mathfrak{c}_{-2}(n)$, $\mathfrak{c}_{-1}(n)$ の標準基底.

(ii) $\bigoplus \mathfrak{l}_p$ は推移的, すなはち次の条件をみたす: $p\geq 0$ とするとき, $x\in\mathfrak{l}_p$ に対して $[x,\mathfrak{l}_-]=0$ ならば $x=0$.

(iii) 正定値内積 $g:\mathfrak{l}_{-1}\times\mathfrak{l}_{-1}\to\mathbf{R}$ で

$$g([A,x],y)+g(x,[A,y])=0 \quad \text{for all } A\in\mathfrak{l}_0 \text{ and } x,y\in\mathfrak{l}_{-1}$$

をみたすものが存在する.

上の条件を満たすような graded Lie algebra のことを *subriemannian contact* transitive graded Lie algebra (TGLA) と呼び, これを associated graded Lie algebra に持つ filtered Lie algebra $(L,\{L^p\})$ を *subriemannian contact* transitive filtered Lie algebra (TFLA) と呼ぼう.

3 Subriemannian contact graded Lie algebras

さて, $\mathfrak{l}_-=\mathfrak{l}_{-2}\oplus\mathfrak{l}_{-1}$ が Heisenberg Lie algebra $\mathfrak{c}_-(n)$ に同型で g が $\mathfrak{l}_{-1}$ 上の内積であるような組 $(\mathfrak{l}_-,g)$ を考え, *subriemannian Heisenberg Lie algebra* と呼ぼう. これらは, 以下のように組み分けされる: n 個 の正数 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ で $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$ かつ $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$ を満たすものに対して $\mathfrak{c}_{-1}(n)$ 上の内積 g_λ を以下で定める.

$$g_\lambda(e_i,e_j)=0\ (i\neq j),\ g_\lambda(e_k,e_k)=1\ ,\ g_\lambda(e_{n+k},e_{n+k})=\lambda_k\ (1\leq k\leq n),$$

ここで, $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ は $\mathfrak{c}_{-1}(n)$ の基. このとき, 直交群の元での歪対称行列の標準形により次が分かる:

Proposition 1 任意の *subriemannian Heisenberg Lie algebra* $(\mathfrak{l}_-,g)$ に対して, ただひとつの正数の組 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ で $(\mathfrak{l}_-,g)$ が $(\mathfrak{c}_-(n),g_\lambda)$ に同型となるようなものが存在する.

次に，$\mathfrak{c}_0(n, g_\lambda)$ を 以下の条件をみたす $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{l}_-, \mathfrak{l}_-)$ 全体のなす集合とする：

$$\begin{cases} \text{(i) } \alpha(\mathfrak{l}_p) \subset \mathfrak{l}_p, \ p < 0 \\ \text{(ii) } \alpha([x, y]) = [\alpha(x), y] + [x, \alpha(y)], \ x, y \in \mathfrak{l}_- \\ \text{(iii) } g(\alpha(x), y) + g(x, \alpha(y)) = 0, \ x, y \in \mathfrak{l}_{-1}. \end{cases}$$

条件 (i) と (ii) から $X \in \mathfrak{c}_0(n, g_\lambda)$ の $\{f, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ による行列表現は次の形になる．

$$X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) + c \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right),$$

ここで

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \in sp(n, \mathbf{R}),$$

$A_{22} = -{}^tA_{11}$ で，A_{12} と A_{21} は n 次の対称行列．このとき，条件 (iii) から次を得る．

$${}^t\tilde{A}K + K\tilde{A} = 0,$$

ここで

$$\tilde{A} = A + cI_{2n}, \quad K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{array}\right).$$

$\tilde{A}$ のトレースは消えるが，$A \in sp(n, \mathbf{R})$ のトレースもまた消えているので，定数 $c = 0$ となることが分かる．このことから，次の命題を得る：

Proposition 2 $\mathfrak{l} = \bigoplus_p \mathfrak{l}_p$ を *subriemannian contact TGLA* とするとき，$p \geq 1$ に対して，$\mathfrak{l}_p = 0$ である．すなはち $\mathfrak{l}$ は有限次元である．

証明: 任意の $x_1 \in \mathfrak{l}_1$ について，$x_1 = 0$ を示そう．まず，上述の定数 c が消えることから，$x_{-2} \in \mathfrak{l}_{-2}$ に対して $[x_0, x_{-2}] = 0$ となることに気をつける．次に，

$$[x_1, x_{-2}] = 0$$

を示そう．実際，ヤコビの恒等式より

$$[[x_1, x_{-2}], x_{-1}] = [[x_1, x_{-1}], x_{-2}] + [x_1, [x_{-2}, x_{-1}]]$$

である．しかし，$[x_1, x_{-1}] \in \mathfrak{l}_0$ かつ $[x_{-2}, x_{-1}] = 0$ であるから $x_{-1} \in \mathfrak{l}_{-1}$ にたいして右辺は消える．ゆえに，

$$[[x_1, x_{-2}], x_{-1}] = 0 \text{ for } x_{-1} \in \mathfrak{l}_{-1}$$

が成り立つ．このとき，$\mathfrak{l}$ が推移的であることから

$$[x_1, x_{-2}] = 0$$

が分かる．さて，形式 $\Psi : \mathfrak{l}_{-1} \times \mathfrak{l}_{-1} \times \mathfrak{l}_{-1} \to \mathbf{R}$ を

$$\Psi(u, v, w) = g([[x_1, u], v], w) \quad \text{for } u, v, w \in \mathfrak{l}_{-1}$$

により定義する．このとき，$[x_1, u] \in \mathfrak{c}_0(n, g_\lambda)$ より，

$$\Psi(u, v, w) = -\Psi(u, w, v)$$

を得る．一方，

$$[[x_1, u], v] - [[x_1, v], u] = [x_1, [u, v]] = 0$$

であるから

$$\Psi(u, v, w) = \Psi(v, u, w)$$

が分かる．また，

$$\begin{aligned}
\Psi(u, v, w) &= \Psi(v, u, w) \\
&= -\Psi(v, w, u) \\
&= -\Psi(w, v, u) \\
&= \Psi(w, u, v) \\
&= \Psi(u, w, v) \\
&= -\Psi(u, v, w)
\end{aligned}$$

より

$$\Psi(u, v, w) = 0.$$

ゆえに

$$[[x_1, u], v] = 0.$$

よって，$\mathfrak{l}$ が推移的であることから $x_1 = 0$ が得られた．このことから，$\mathfrak{l}_p = 0$ for $p \geq 1$ が得られる．$\square$

さて，すべての固有値が一致するとき，すなはち，$\lambda = (1, \dots, 1)$ であるとき $\mathfrak{c}_0(n, g_\lambda)$ は最大次元をとる．

このとき $X \in \mathfrak{c}_0(n, g_\lambda)$ は以下のように表される：

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multirow{2}{*}{0} & A_{11} & A_{12} \\ & -A_{12} & A_{11} \end{array}\right),$$

ここで A_{11} は歪対称で，A_{12} は対称．このとき，$\mathfrak{c}_0(n, g_{(1,\dots,1)})$ は $\mathfrak{u}(n)$ に同型となる．ゆえに次が示された：

Proposition 3 *subriemannian contact TGLA* $\mathfrak{l}$ は最大次元 $(n+1)^2$ をとり，以下で決まる *TGLA* $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_0$ に同型となる．ここで，$\mathfrak{k}_{-2} = \mathbf{R}$, $\mathfrak{k}_{-1} = \mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}(n)$ であり，各ブラケットの作用は以下の通り．

(i) $[,] : \mathfrak{k}_{-2} \times \mathfrak{k}_0 \to 0$

(ii) $[,] : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_{-1} \to \mathfrak{k}_{-1}$;　$[A, x] := Ax \ (A \in \mathfrak{k}_0, x \in \mathfrak{k}_{-1})$

(iii) $[,] : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0 \to \mathfrak{k}_0$;　$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in \mathfrak{k}_0)$

(iv) $[,] : \mathfrak{k}_{-1} \times \mathfrak{k}_{-1} \to \mathfrak{k}_{-2}$;　$[Z, W] := \mathrm{Im} h(Z, W)$，ここで $h(,)$ は $\mathbf{C}^n$ 上の標準的なエルミート内積．

4 Cohomology group $H(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k})$

ここでは，$\mathfrak{k}$ に同型であるものを associated graded Lie algebra にもつような TFLA 達 を決定するための重要な道具となるコホモロジー群 $H(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k})$ を調べる．一般の TGLA $\mathfrak{g}$ について，$\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_r$ を 次数 r の homogeneous p-cochain ω 全体のなす集合とする．(すなはち，$\omega(\mathfrak{g}_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{g}_{a_p}) \subset \mathfrak{g}_{a_1 + \cdots + a_p + r}$ for any $a_1, \dots, a_p \leq 0$)，また，coboundary operator $\partial : \mathrm{Hom}(\wedge^p \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \to \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1} \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ を考え，そのコホモロジー群を $H^p_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ と表す．そこで $\mathfrak{k}_-$ の $\mathfrak{k}$ への随伴表現に付随するスペンサーコホモロジーについて考えると，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}(n)$ から $H^p_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ への自然な作用が導かれる．その表現を $\bar{\rho}$ とするとき，$\mathfrak{k}_0$ で不変な元全体の集合を以下で与える：

$$IH^p_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \{\alpha \in H^p_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}); \bar{\rho}(A)\alpha = 0 \text{ for all } A \in \mathfrak{l}_0\}.$$

このとき，$(n+1)^2$ 次元の subriemannian contact TGLA $\mathfrak{k}$ について次を得る．

Proposition 4　(i) $IH^2_1(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k}) = 0$.

(ii) $IH^2_2(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k})$ は1次元で，以下で与えられた *cocycle* $\omega \in \mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{k}_0)$ の同値類 $[\omega]$ により生成されている：

$$\begin{cases} \omega(e_i \wedge e_j) = \omega(e_{n+i} \wedge e_{n+j}) = -E_{ij} + E_{ji} \\ \omega(e_i \wedge e_{n+j}) = \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji} + 2\delta_{ij} I_n), \end{cases}$$

ここで $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\}$ は $\mathfrak{k}_{-1}$ の標準的基底で，E_{ij} は $gl(n, \mathbf{C})$ の行列単位とする．さらに，ω 自身 $\mathfrak{k}_0$ で不変である，つまり，$\rho(A)\omega = 0$ *for* $A \in \mathfrak{k}_0$ である．ここで ρ は $\mathfrak{k}_0$ の $\mathrm{Hom}(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k})$ への表現である．

(iii) $H^2_r(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k}) = 0$ *for* $r \geq 3$.

5 Maximal subriemannian contact transitive filtered Lie algebras

5.1 Main theorem

各 $\varepsilon \in \mathbf{R}$ に対して TFLA K_ε を次のように定める: K_ε の underlying vector space を graded vector space $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_0$ とし，K_ε の filtration $\{K^p_\varepsilon\}_{p \in \mathbf{Z}}$ を $K^p_\varepsilon = \bigoplus_{i \geq p} \mathfrak{k}_i$ とする．また，ブラケット $[,]_\varepsilon : K_\varepsilon \times K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ を

$$[x, y]_\varepsilon = [x, y]_{\mathfrak{k}} + \varepsilon\omega(x, y) \quad \text{for } x, y \in K_\varepsilon,$$

とする．ここで $[x, y]_{\mathfrak{k}}$ は graded Lie algebra $\mathfrak{k}$ のブラケットで ω は上述の $\mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{k}_0)$ の cocycle.

そこで，主定理は以下のように述べられる：

Theorem 1 *K を TFLA とする．graded Lie algebra としての 同相写像 $\phi : grK \to \mathfrak{k}$ が存在するとき，ただひとつの実数 ε と filtered Lie algebra の 同相写像 $\Phi : K \to K_\varepsilon$ でその associated map $gr\Phi$ が ϕ に一致するものが存在する．*

主定理の証明については，参考文献 [1] を参照されたい．

5.2 Realizations

ここでは，filtered Lie algebra K_ε 達が，どのようにサブリーマン多様体として実現されるかを見てみよう．

$\varepsilon = 0$ のとき，filtered Lie algebra K_ε は $\mathfrak{k}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_0$ に同型となる．これは，空間 $(\mathbf{R}^{2n+1}, D, g)$ の 無限小自己同型のリー代数として実現される．ここで，D は

$$dz - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}(x_j dy_j - y_j dx_j) = 0$$

で定義される $\mathbf{R}^{2n+1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z)$ の接触構造であり, D 上の計量 g は,

$$g=(dx_1|_D)^2+\cdots+(dx_n|_D)^2+(dy_1|_D)^2+\cdots+(dy_n|_D)^2$$

で与えられている.

ε が正であるとき, filtered Lie algebra K_ε は $(\mathfrak{u}(n+1),\{F^p\}_{p\in\mathbf{Z}})$ に同型となる. ここで $\{F^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ は 以下で定義される $\mathfrak{u}(n+1)$ の filtration である :

$$F^p=\left\{\left(\begin{array}{c|c}\lambda i & \xi\\ \hline -{}^t\bar{\xi} & A\end{array}\right)\middle|\,\lambda\in\mathbf{R},\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n,A\in\mathfrak{u}(n)\right\}\quad(p\leq -2),$$

$$F^{-1}=\left\{\left(\begin{array}{c|c}0 & \xi\\ \hline -{}^t\bar{\xi} & A\end{array}\right)\middle|\,\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n,A\in\mathfrak{u}(n)\right\},$$

$$F^0=\left\{\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline 0 & A\end{array}\right)\middle|\,A\in\mathfrak{u}(n)\right\},\quad F^q=0\quad(q\geq 1).$$

これは, 空間 $(S^{2n+1},D,g|_D)$ の 無限小自己同型のリー代数として実現される. ここで, S^{2n+1} は $(x_1,y_1,\ldots,x_{n+1},y_{n+1})\in\mathbf{R}^{2n+2}$ で

$$(x_1)^2+(y_1)^2+\cdots+(x_{n+1})^2+(y_{n+1})^2=1$$

をみたすもの全体の集合である. D は

$$\sum_i^{n+1}x_idy_i-y_idx_i|_{S^{2n+1}}=0$$

で定められる接触構造で,

$$g=(dx_1)^2+(dy_1)^2+\cdots+(dx_{n+1})^2+(dy_{n+1})^2.$$

ε が負であるとき, filtered Lie algebra K_ε は $(\mathfrak{u}(n,1),\{F^p\}_{p\in\mathbf{Z}})$ に同型となる. ここで $\{F^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ は以下で定められる $\mathfrak{u}(n,1)$ の filtration である :

$$F^p = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda i & \xi \\ \hline {}^t\bar{\xi} & A \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbf{R}, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n, A \in \mathfrak{u}(n) \right\} \quad (p \leq -2),$$

$$F^{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \xi \\ \hline {}^t\bar{\xi} & A \end{array} \right) \middle| \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n, A \in \mathfrak{u}(n) \right\},$$

$$F^0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \middle| A \in \mathfrak{u}(n) \right\}, \quad F^q = 0 \quad (q \geq 1).$$

これは, 超局面 $(\Sigma^{2n+1}, D, g|_D)$ の無限小自己同型のリー代数として実現される. ここで, Σ^{2n+1} は $(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+2}$ で

$$(x_1)^2 + (y_1)^2 + \cdots - (x_{n+1})^2 - (y_{n+1})^2 = -1$$

をみたすもの全体の集合. また, D は

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j dx_j - x_j dy_j) - (y_{n+1} dx_{n+1} - x_{n+1} dy_{n+1}) = 0$$

で与えられる接触構造である.

$$g = (dx_1)^2 + (dy_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2 + (dy_n)^2 - (dx_{n+1})^2 - (dy_{n+1})^2$$

は $\mathbf{R}^{2n+2}(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1})$ 上の pseudo-riemannian 計量であり, それを接触構造 D に制限した $g|_D$ は 正定値内積となる.

これまでの議論を要約すると, 特に次を得る:

Theorem 2 K を 最大次元をとる *subriemannian contact TFLA* とするとき, $\varepsilon = -1, 0, 1$ にたいして K は K_ε にそれぞれ同型となる.

ここでは参考文献 [2] で展開されている TFLA についての一般論に従って, subriemannian contact TFLA (茎 $\mathcal{L}_a$ の形式的リー代数) について詳しく調べたが参考文献 [4] により, ある正則条件を満たすサブリーマン多様体にたいしてカルタン接続が構成されることが知られていて, このカルタン接続を用いることにより, 特に $\mathcal{L}_a$ はその形式的リー代数 L に同型となることが分かる. ゆえに形式的リー代数 L について成り立つ結果は, $\mathcal{L}_a$ についても同様に成り立つ:

Theorem 3 (M, D, g) を $2n+1$ 次元の等質なサブリーマン接触多様体とし，$\mathcal{L}_a$ を (M, D, g) の無限小自己同型の芽のなす層 $\mathcal{L}$ の点 $a \in M$ における茎 とする．$\mathcal{L}_a$ が最大次元 $(n+1)^2$ 次元をとるとき，$\mathcal{L}_a$ は $\varepsilon = -1, 0, 1$ に対して，K_ε に同型となる．

さらに対応する同型群についての主張が導かれる:

Theorem 4 (M, D, g) を $2n+1$ 次元の等質なサブリーマン接触多様体とするとき，その自己同型群で最大次元 $(n+1)^2$ をとるものたちは，局所同型によって類別すると 3 つの類に分かれる．

参考文献

[1] Y. Kitagawa, The infinitesimal automorphisms of a homogeneous subriemannian contact manifold, memoirs of Nara Women's University, No.20, (2005), pp. 147–163.

[2] T. Morimoto, Transitive Lie algebras admitting differential systems, Hokkaido Math. J. vol.17 (1988), pp. 45–81.

[3] T. Morimoto, Lie algebras, geometric structures and differential equations on filtered manifolds, Advance Studies in Pure Mathematics 37 (2002), pp. 205–252.

[4] T. Morimoto, The curvatures of a subriemannian manifold (in Japanese), Kokyuroku,(2003), pp.109–113.