

## 擬代数的極小曲面のガウス写像

九州大学 宮岡礼子 (Reiko Miyaoka)  
 名古屋大学 小林亮一 (Ryoichi Kobayashi)  
 名古屋大学 川上裕 (Yu Kawakami)

Graduate School of Mathematics  
 Kyushu University and Nagoya University

## 1 序

非平坦な完備極小曲面  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  のガウス写像  $g : M \rightarrow \mathbb{P}^1$  の除外値問題は藤本坦孝氏により解決され, 除外値数  $D_g$  は高々4 という最良の結果が示されている. ここに,  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  はリーマン球面を表す. 除外値が4個以下の完備極小曲面はいくらでも構成できる. さらに除外値よりも詳しい情報をもつ完全分岐値数  $\nu$  も4以下であるという最良の結果が示された [F2].  $g : M \rightarrow \mathbb{P}^1$  の完全分岐値とは, 逆像の点すべてが分岐点であるような値  $b \in \mathbb{P}^1$  のことであり, 除外値もこれに含めて考えることは, Nevanlinna 理論により, 「除外値の重複度は無限大である」と考えるのが自然だからである [Ko]. 完全分岐値数とは完全分岐値の重み付きの和 (定義は §3) であり, 特に  $D_g \leq \nu$  が成り立つ.

一方 Osserman は代数的極小曲面のガウス写像の除外値は高々3個であることを示している. ここに代数的極小曲面とは有限全曲率をもつ完備極小曲面のことである. しかし, ガウス写像が3点を除外する代数的極小曲面の例は知られておらず, 一方除外値が2個の例はほとんどすべての位相型について存在する [MS]. このことから, 代数的極小曲面のガウス写像の除外値数は高々2であろうという予想が優勢である. また, 藤本の定理と同様に, この場合完全分岐値数も2でおさえられるという暗黙の予想があった.

これを覆す事実として, 川上により代数的極小曲面で完全分岐値数 2.5 のものが発見され [Ka], 予想を次のように書き直す必要が生じた.

予想: 代数的極小曲面について, ある  $2.5 \leq \kappa < 3$  をみたく  $\kappa$  が存在して,  $\nu \leq \kappa$  である.

完全分岐値数は Nevanlinna 理論では欠如指数とともによく研究されているが、代数的極小曲面のガウス写像についての結果は見当たらない。しかしこれは除外値問題を論ずる際に必要不可欠な数である。そこで我々は Osserman の議論を精密化して、この数の評価を求めることにした。結果は期待以上のものとなり、しかも代数的極小曲面より遥かに広い擬代数的極小曲面、すなわち、Weierstrass データがコンパクトリーマン面上の有理形データとして与えられるすべての完備極小曲面に対して得られた。実際、除外値数、完全分岐値数ともに、ガウス写像の次数と  $M$  の位相量を用いて具体的数値でおさえられ、しかもある意味でこの評価は最良であり、さらに Osserman の定理の真の拡張になっている。予想そのものはまだ解決されないが、代数的極小曲面に対しては完全分岐値数が除外値数と同様に 4 より真に小さいことがわかった。また擬代数的極小曲面に対して藤本の定理の別証が得られ、議論の背景にあるメカニズムを幾何学的に明らかにすることができた。応用として、極小曲面のガウス写像の一意化定理も得られ、さらに Nevanlinna 理論への架け橋として、 $g$  の特性関数  $T_g(r)$  の評価を与えるヒントも得られた。特性関数の評価は円板上の有理形関数に対する Nevanlinna 理論を展開する上で欠くべからざるものであり、今後の議論に重要な役割を果たすものである。

## 2 準備

極小曲面論の基本性質を簡単に述べる。 $\mathbb{R}^3$  の曲面  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は平均曲率が恒等的に消える時、極小曲面とよばれる。複素座標  $z = u + iv$  および、 $\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v}$  を用いる (Osserman に従い  $1/2$  はつけない) と、これは

$$\bar{\partial}\partial x = 0$$

と同値であるので、境界のないコンパクト極小曲面は存在しない。また、有向接平面を対応させる写像

$$\partial x: M \ni p \mapsto [\partial x(p)] \in \mathbb{Q}^1 \subset \mathbb{P}^2$$

は正則となる。ここに  $\mathbb{Q}^1 = \{[w] \in \mathbb{P}^2 \mid w \cdot w = 0\}$  ( $\cdot$  は  $\mathbb{C}$  線形な双 2 次形式) は  $\mathbb{R}^3$  の有向 2 次元部分空間全体の空間で、その単位法ベクトルを対応させることにより、 $S^2 = \mathbb{P}^1$  と同一視される。このことから極小曲面を、通常のガウス写像  $g: M \rightarrow \mathbb{P}^1$  が正則写像となる曲面として特徴付け

ることができる。

$$\phi = \partial x = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : M \rightarrow \mathbb{C}^3$$

とおけば、これは

$$[C] \text{ 共形条件: } \sum \phi_j^2 = 0$$

$$[R] \text{ 正則条件: } \sum |\phi_j|^2 > 0$$

$$[P] \text{ 周期条件: 任意の } \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z}) \text{ に対して, } \Re \int_\gamma \phi = 0$$

をみたす。このとき、

$$hdz = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{hdz} \quad (1)$$

として与えられる  $(hdz, g)$  はそれぞれ  $M$  上の正則 1 次微分形式、有理形関数である。逆対応は

$$\phi_1 = \frac{h}{2}(1-g^2)dz, \quad \phi_2 = \frac{ih}{2}(1+g^2)dz, \quad \phi_3 = hgdz \quad (2)$$

で与えられる。  $g$  はガウス写像に北極からの立体射影を施したものであることがよく知られている。また誘導計量  $ds^2$  とそのガウス曲率  $K$  は

$$ds^2 = \frac{|h|^2(1+|g|^2)^2}{4} |dz|^2 \quad (3)$$

$$K = -\left(\frac{4|g'|}{|h|(1+|g|^2)^2}\right)^2 \quad (4)$$

で与えられ、特に  $K \leq 0$  である。

逆に、 $M$  上に正則 1 次微分形式、有理形関数の対  $(hdz, g)$  が与えられたとき、 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  を (2) で定義する。このとき共形条件 [C] は自動的にみたされ、正則条件 [R] は、「 $g$  の位数  $k$  の極でのみ  $hdz$  は位数  $2k$  の零点をもつ」となることが (3) からわかる。もし周期条件 [P] がみたされれば、極小曲面は実 Abel-Jacobi 写像

$$x(z) = \Re \int_{z_0}^z \phi \quad (5)$$

で得られる。周期条件がみたされないときは、曲面は  $M$  の普遍被覆上で定義される。 $(hdz, g)$  を極小曲面の Weierstrass データ (W-データと略する)、(5) を Weierstrass-Enneper 表現公式という。さて  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  が [C], [R] をみたすなら、

$$e^{i\theta}(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

も [C], [R] をみたすことが直ちにわかる. 対応する W-データは

$$\begin{cases} g^\theta(z) = g(z) \\ h^\theta dz = e^{i\theta} dz \end{cases}$$

である. [P] は一般にみたされないが, 普遍被覆上では極小曲面の  $S^1$  径数族が得られる. この族を随伴曲面族という. これに属する曲面はすべて同じガウス写像を持つことに注意しよう. 例えばカテノイドとヘリコイドは同じ随伴曲面族に属し, そのガウス写像は 2 点を除外している.

次に重要な概念は完備性であり, これは  $M$  の任意の発散路の長さが無限大になることとして定義される. また全曲率は

$$\tau(M) = \int_M K dA = - \int \frac{4|g'|^2 |dz|^2}{(1+|g|^2)^2}$$

で与えられ, その絶対値はガウス写像の像の Fubini-Study 計量による面積にほかならない. 我々は有限全曲率をもつ完備極小曲面を代数的極小曲面とよぶ.

**定理 2.1 (Huber, Osserman)** (i) 代数的極小曲面  $M$  はコンパクトリーマン面  $\bar{M}$  から有限個の点を除いたものと共形同値である [H].

(ii) このとき W-データは  $\bar{M}$  に有理形に拡張される [O1].

### 3 ガウス写像の除外値

ガウス写像は  $g: M \rightarrow \mathbb{P}^1 = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  なる有理形関数であるから, これに 1 変数関数論を適用することができる. Bernstein の定理はこの最も古い応用と思える.

**定理 3.1 (Bernstein, 1915)** 極小グラフ  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  は平面である.

実際, 面積増大度から  $\mathbb{R}^2$  が誘導計量について放物型であることが示され,  $g$  は  $\mathbb{C}$  上の整関数とみなせる. グラフの法ベクトルは半球面内に値をとることから, ピカールの定理により  $g$  は定値関数, よって曲面は平面である.

Osserman はこれを次のように拡張した.

**定理 3.2 (Osserman, 1964)**  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を平面でない完備極小曲面とすると, ガウス写像は高々 2 点を除外する.

さらに Osserman は任意のリーマン面  $M$  を定義域とする完備極小曲面  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  のガウス写像の除外値問題を考えた。

**命題 3.3 (Osserman, 1964)**  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  を平面でない完備極小曲面とすると,  $\mathbb{P}^1 \setminus g(M)$  は *capacity zero* 集合である。

ここに *capacity zero* 集合とは, その補空間が放物型のときをいう。除外値が有限個の点であることは Xavier により示された。以下  $g$  の除外値の個数を  $D_g$  とおく。

**命題 3.4 (Xavier, 1981)**  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  を平面でない完備極小曲面とすると,  $D_g \leq 6$  である。

最終的な解決をのべる。

**定理 3.5 (藤本, 1988)**  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  を平面でない完備極小曲面とすると,  $D_g \leq 4$  で, これは最良の評価である。さらに完全分岐値数も  $\nu \leq 4$  をみたし, これも最良である。

実際, Voss 曲面 (例 3.9 参照) や, Scherk の曲面のガウス写像は 4 点を除外している。完全分岐値数については後にのべる。藤本の定理の証明の方針は次のようである。ガウス写像が異なる 5 点  $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{P}^1$  を除外するとして, それらのなす角を  $\theta_{ij}$  とするとき,  $\min\{\sin \frac{\theta_{ij}}{2}, 1 \leq i < j \leq 5\} = L$  とおき,  $M$  の点  $p$  から境界への距離を  $d(p)$  とすると, ある正の定数  $C$  が存在して,

$$|K(p)|^{1/2} \leq \frac{C \log^2(1/L)}{d(p) L^3}$$

が成り立つ。完備ならば  $d(p) \rightarrow \infty$  とすることにより至る所  $K(p) = 0$  であることがわかる。同じ方針で, 完全分岐値数について 4 以下も示されるが, この不等式の背後にあるメカニズムは明らかではない。我々はこの意味を解明することを一つの目的とする。

代数的極小曲面については

**定理 3.6 (Osserman 1964)** 代数的極小曲面について  $D_g \leq 3$  がなりたつ。

証明は次の節で拡張した形で与える。後に藤本, Mo-Osserman によっても, 除外値が 4 つあると, 全曲率は無限になるという形でこの定理の別証明が与えられた。しかし除外値が 3 つある例は知られていない。一方除外値が 2 つある例はほとんどの位相型について存在する。

**定理 3.7** (宮岡-佐藤勝憲, [MS],1994) 種数  $G$  のコンパクトリーマン面  $\overline{M}$  から  $k$  個の点を除いたリーマン面  $M$  を考える. 次の  $(G, k)$  に対して, ガウス写像の除外値が 2 個の代数的極小曲面が存在する.

$$(1) G = 0, k \geq 2$$

$$(2) G = 1, k \geq 3$$

$$(3) G \geq 2, k \geq 4$$

(1) については分類がなされている. (2) の例は重要なので,  $W$ -データを記しておこう.  $M = \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm i, \infty\}$  の上で  $W$ -データを

$$\begin{cases} g(z) = \sigma \frac{z^2 + 1 + a(t-1)}{z^2 + t} \\ hdz = \frac{(z^2 + t)^2}{(z^2 + 1)^2} dz, \quad (a-1)(t-1) \neq 0 \\ \sigma^2 = \frac{t+3}{a\{(t-1)a+4\}} \end{cases} \quad (6)$$

で定めると,  $\sigma^2 < 0$  をみたとす  $a, t$  について, 代数的極小曲面でガウス写像が 2 点  $\sigma, \sigma a$  を除外するものが得られる. 今般, 川上により, 次の本研究の指針となる貴重な指摘がなされた.

**定理 3.8** (川上 [Ka]) この曲面の完全分岐値数は 2 より真に大きい 2.5 である.

**定義 3.9** ガウス写像  $g$  の完全分岐値の集合を  $\{a_1, \dots, a_{r_0}, b_1, \dots, b_{l_0}\}$  とする. ここに  $a_j$  は除外値,  $b_j$  は除外値でない完全分岐値とする.  $a_j$  については  $\nu_j = \infty$ ,  $b_j$  については  $g^{-1}(b_j)$  の各点における  $g$  の重複度の最小値を  $\nu_j$  とする. 特に  $\nu_j \geq 2$  である. このとき  $g$  の完全分岐値数  $\nu$  を

$$\nu = \sum_{a_j, b_j} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) = r_0 + \sum_{j=1}^{l_0} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right)$$

で定義する.

(6) の例では, 除外値が 2 個で, ガウス写像の次数は 2 だから  $g'(z) = 0$  となる  $z = 0$  での値  $g(0) = \sigma(1 + a(t-1))/t$  は完全分岐値で, 重複度 2 より,  $\nu = 2 + 1/2 = 2.5$  となる. この事実から我々は新たな予想として次を提起する:

予想：代数的極小曲面について，ある  $2.5 \leq \kappa < 3$  をみたす  $\kappa$  が存在して， $\nu \leq \kappa$  がなりたつ。

この問題を，代数的極小曲面を含むより広い極小曲面について統一的に議論しよう

**定義 3.10** 完備極小曲面が擬代数的極小曲面であるとは次をみたすことである。

(i) W-データ  $(hdz, g)$  がリーマン面  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  上定義されている。ここに  $\overline{M}$  はコンパクトリーマン面である。

(ii)  $(hdz, g)$  は  $\overline{M}$  に有理形に拡張される。

このとき  $M$  を擬代数的極小曲面の基本領域ということにする。

擬代数的極小曲面は  $M$  またはその被覆曲面 (普遍被覆とは限らない) 上定義される。典型的例をあげよう。

**例 3.9** 代数的極小曲面とその随伴曲面

**例 3.10** Voss 曲面： $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  を異なる 3 点とし，W-データを  $M = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  上

$$\begin{cases} g(z) = z \\ hdz = \frac{dz}{\prod_j (z - a_j)} \end{cases} \quad (7)$$

これは周期条件 [P] をみたさないので， $M$  の普遍被覆円板  $\mathbb{D}$  上で極小曲面  $x: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  を与える。よって全曲率は無限である。この曲面は完備であり，ガウス写像は 4 点  $a_1, a_2, a_3, \infty$  を除外する。 $M$  として  $M = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\}$  から始めると，同様に完備極小曲面  $x: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  で，ガウス写像が 3 点  $a_1, a_2, \infty$  を除外するものが得られる。完備性の要請から  $a_j$  としては高々 3 点しかとれない。この例では随伴曲面のどれもが周期条件 [P] をみたさないので，全曲率無限の擬代数的曲面の例をあたえる。

**注意 3.13** ガウス写像が 3 点，または 4 点を除外する完備極小曲面の例として知られているものは，擬代数的極小曲面のみのように思われる。

## 4 主結果と証明

この節では主結果とその証明を述べる。

定理 4.1 基本領域  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  をもつ擬代数的極小曲面を考える。  $\overline{M}$  の種数を  $G$ , ガウス写像  $g$  を  $\overline{M}$  上の写像と考えたときの次数を  $d$  とする。このとき、次がなりたつ。

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G-1+k/2} \geq 1. \quad (8)$$

さらに詳しく、  $g$  の除外値以外の分岐値 (完全分岐値とは限らない) の数を  $l$  とすると、次がなりたつ。

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{d}. \quad (9)$$

一方  $g$  の完全分岐値数は

$$\nu \leq 2 + \frac{2}{R} \quad (10)$$

をみます。特に

$$D_g \leq \nu \leq 4 \quad (11)$$

であり、代数的極小曲面については、2番目の不等号は真の不等号となる。(9), (10) とともに、代数的な場合もそうでない場合も最良の評価である。

比  $R$  の幾何学的意味は §6 で述べる。この定理から次の結果が導かれる。

系 4.2 (Osserman, Fang, Gackstätter) 代数的極小曲面について、

- (i)  $D_g \leq 3$  (Osserman の定理 3.2)
- (ii)  $G = 0$  ならば  $D_g \leq 2$
- (iii)  $G = 1$ ,  $D_g = 3$  ならばエンドはすべて埋め込みで、  $d = k$  がなりたち、さらに  $g$  は  $M$  上非分岐である。

注意 4.3 Fang [F] (Theorem 3.1) は代数的極小曲面について、  $d \leq 4$  ならば  $D_g \leq 2$  ( $d \leq 3$  のとき [WX]) を示している。

注意 4.4 代数的極小曲面の構成法として、Klotz-Sario の被覆法がある [BC].  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は代数的極小曲面で、  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  が  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  の非分岐被覆であるとしよう。このとき  $\tilde{x} = x \circ \pi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  は新たな代数的極小曲面となる。これは元の曲面と同じ像をもつが、定義域の  $\tilde{M}$  は元のものと異なる位相をもつ。しかしながら比  $R$  は不変であることが代数的議論で示される。もちろん  $D_g$  と  $\nu$  も不変である。



注意 4.5 (8) も代数的極小曲面について次の意味で最良である。[MS] の Theorem 3 では、ガウス写像が 2 点を除外する無限個の代数的極小曲面がトーラスから 4 点を除いたリーマン面上 ( $G=1, k=4$ ) で、次のように構成された。正方形トーラス  $\overline{M}$  上の Weierstrass  $p$  関数  $(p')^2 = 4p(p^2 - a^2)$  を考える。  $M$  を  $\overline{M}$  から  $p = 0, \pm a, \infty$  なる 4 点を除いたリーマン面とし、 $W$ -データを

$$[\text{Case 1}] \quad g = \frac{\sigma}{p^j p'}, \quad hdz = \frac{p dp}{p'}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$[\text{Case 2}] \quad g = \frac{\sigma}{p^j p'}, \quad hdz = \frac{p^{j+1} dp}{p'}, \quad j = 2, 4, 6, \dots,$$

で与える。適当な  $\sigma$  を選ぶとガウス写像が 2 点  $0, \infty$  を除外する代数的極小曲面を得る。さらにこれらはガウス写像の次数  $d = 2j + 3$  で径数づけられ、 $R = d/2$  だから、 $2 + 2/R$  をいくらでも  $2 (= D_g)$  に近づけることができる。(コスタ曲面は  $j = 0$  で与えられる。このときは  $(G, k, d) = (1, 3, 3)$  で、 $g$  は 1 点  $0$  のみを除外する。)

主定理の証明：証明は Osserman の定理の証明 [O1] の精密化で得られる。議論を単純化するため、一般性を失することなく  $g$  は  $p_j$  では極でも零点でもなく、さらに  $g$  の極と零点は単純としてよい。完備性から  $hdz$  は  $p_j$  で位数  $\mu_j \geq 1$  位の極をもつ。周期条件は  $\mu_j \geq 2$  を導くが我々はここではこれを仮定しない。  $\alpha_s$  を  $g$  の単純零点、  $\beta_t$  を単純極としよう。次の表は  $g, hdz, ghdz$  の零点と極の関係を示す。上付き添字は位数を表す。

$z$	$\alpha_s$	$\beta_t$	$p_j$
$g$	$0^1$	$\infty^1$	
$hdz$		$0^2$	$\infty^{\mu_j}$
$ghdz$	$0^1$	$0^1$	$\infty^{\mu_j}$

Riemann-Roch の公式を  $M$  上の有理形微分  $hdz$  または  $ghdz$  に施して

$$2d - \sum_{j=1}^k \mu_j = 2G - 2$$

を得るから

$$d = G - 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mu_j \geq G - 1 + \frac{k}{2} \quad (12)$$

と

$$R \geq 1 \quad (13)$$

がなりたつ。ここにはじめの等号は  $g$  の零点と極の取り方に依存していることに注意する ( $d$  は不変量だが).  $M$  が代数的またはその随伴曲面のときは  $\mu_j \geq 2$  だから  $R > 1$  となる.

まず (9) (および (8)) を示そう.  $g$  が  $r_0 = D_g$  個の値を除外するとし,  $n_0$  を  $g$  の除外値における分岐指数の和とする. さらに  $n_b$  を除外値以外での分岐値  $b_1, \dots, b_l$  (完全分岐値とは限らず) における分岐指数の和としよう (Osserman は除外値以外での分岐指数は考慮にいれなかった). すると

$$k \geq dr_0 - n_0, \quad n_b \geq l \quad (14)$$

がなりたつ.  $n_1$  を  $g$  の全分岐指数和とする. Riemann-Hurwitz の定理を  $\overline{M}$  上の有理形関数  $g$  に適用して, 次を得る.

$$n_1 = 2(d + G - 1) = n_0 + n_b \geq dr_0 - k + l. \quad (15)$$

$\nu_j$  を

$$\nu_i = \min_{g^{-1}(b_i)} \{g(z) = b_i \text{ の解の重複度} \}$$

で定めると,  $1 \leq \nu_i \leq d$  をみたとす. よって除外値数は (15) を用いて,

$$D_g = r_0 \leq \frac{n_1 + k - l}{d} = 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{d} \quad (16)$$

だから, (13) より

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} \leq 4$$

を得る. 特に代数的極小曲面とその随伴曲面は  $R > 1$  をみたとすから

$$D_g \leq 3$$

となって Osserman の定理 3.2 を得る.

次に (10) を示す.  $b_1, \dots, b_{l_0}$  を除外値以外の完全分岐値としよう.  $n_r$  を  $b_1, \dots, b_{l_0}$  における分岐指数の和とする.  $l_0 \leq l$ ,  $n_r \leq n_b$  である. 各  $b_i$  に対して, 逆像  $g^{-1}(b_i)$  の個数が  $d/\nu_i$  以下であることは,  $\nu_i$  が  $g^{-1}(b_i)$  の各点での重複度の最小値であることから従う. よって

$$dl_0 - n_r \leq \sum_{i=1}^{l_0} \frac{d}{\nu_i} \quad (17)$$

だから

$$l_0 - \sum_{i=1}^{l_0} \frac{1}{\nu_i} \leq \frac{n_r}{d},$$

そこで(14)の始めの式と  $n_r \leq n_b$  を用いて,

$$\nu = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \leq \frac{k + n_0}{d} + \frac{n_r}{d} \leq \frac{n_1 + k}{d} = 2 + \frac{2}{R}$$

を得る.

等号をみたす例と, 系 4.2 (ii), (iii) は次で得られる.

(1)  $d = 2$  のとき,

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{2}, \quad \nu \leq 2 + \frac{2}{R}$$

で, (6) で与えられる曲面は,  $R = 4, l = 1$  だから,  $D_g = 2, \nu = 2.5$  となる. つまり (9), (10) は最良である.

(2) Voss 曲面は  $d = 1, G = 0$  をみたす. よって  $k = 3$  のとき  $R = 2, l = 0$  より  $D_g = 3 = 2 + 2/2$ ,  $k = 4$  のとき  $R = 1, l = 0$  より  $D_g = 4 = 2 + 2/1$  を得る. つまり (9), (10) 代数的でない擬代数的極小曲面についても最良である.

(3)  $r_0 = 3$  ならば  $R \leq 2$ , よって  $G - 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mu_j \leq 2(G - 1) + k$  となる. 代数的なら  $\mu_j \geq 2$  より

$$k \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mu_j \leq G - 1 + k \quad (18)$$

だから系 4.2 の (ii) を得る.  $G = 1$  のときは, すべての  $j$  に対して  $\mu_j = 2$ , つまりエンドは埋め込みである [JM]. またこれより  $R = 2 = \frac{d}{k/2}$  だから  $d = k$ , さらに (9) より  $l = 0$ , すなわち (iii) を得る.

## 5 主定理の応用：一意化定理など

定理 4.1 から擬代数的極小曲面のガウス写像の一意化定理を得る.

**定理 5.1** 同じ基本領域  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  をもつふたつの擬代数的極小曲面  $M_1, M_2$  を考える.  $\overline{M}$  の種数を  $G$  として,  $M_1, M_2$  のガウス写像をそれぞれ  $g_1, g_2$  とする.  $g_1$  と  $g_2$  は  $\overline{M}$  から  $\mathbb{P}^1$  への写像として同じ次数

$d$ をもつが,  $g_1 \neq g_2$ であると仮定する. 相異なる点  $c_1, \dots, c_q \in \mathbb{P}^1$  に対し,  $g_1^{-1}(c_j) \cap M = g_2^{-1}(c_j) \cap M$ ,  $1 \leq j \leq q$  がなりたつとすると

$$q \leq 4 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G-1+k/2} \quad (19)$$

を得る. 特に  $q \leq 6$ , また代数的極小曲面については  $q \leq 5$  を得る.

証明:  $\#$  で点の個数を表し,

$$\delta_j = \#(g_1^{-1}(c_j) \cap M) = \#(g_2^{-1}(c_j) \cap M)$$

とおくと, §4 の記号を用いて,

$$qd \leq k + \sum_{j=1}^q \delta_j + n_1 \quad (20)$$

を得る.  $M$  上の有理形関数  $\varphi = \frac{1}{g_1 - g_2}$  は  $g_1^{-1}(c_j) \cap M$  で極を持つが,  $\varphi$  の極の位数和は高々  $2d$  である. よって

$$\sum_{j=1}^q \delta_j \leq 2d \quad (21)$$

となり, (20) と (21) から

$$qd \leq k + 2d + n_1,$$

および

$$q \leq \frac{2d + n_1 + k}{d} = 4 + \frac{2}{R}$$

が直ちに得られる.

**注意 5.2** 藤本 ([F3]) は  $q = 6$  に対して相異なるガウス写像をもつ 2 つの擬代数的極小曲面を与えている. 代数的極小曲面に対し,  $q = 5$  が最良であるかどうかは重要な未解決問題である.

次説で使うため, Gackstätter の結果 (系 4.2 (iii) 参照) から示唆されることに触れる.

**命題 5.3 (Gackstätter [G])** 種数  $G = 1$  の代数的極小曲面のガウス写像  $g$  が 3 点  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^1$  を除外するなら,  $g$  はエンドでのみ分岐し,  $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  の非分岐被覆となる.

一般に擬代数的極小曲面のガウス写像  $g$  が  $r = 3$  または  $4$  個の値  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{P}^1$  を除外し,  $M$  の内点では分岐しないとすると,  $g$  は  $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$  の非分岐被覆である. 特にこのとき,  $M$  の普遍被覆  $\mathbb{D}$  は円板である.  $\mathbb{D}$  の双曲計量  $\omega_{hyp}$  で曲率  $K_h = -4\pi$  をもつものを考える. 他方,  $\Omega$  を  $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$  の普遍被覆で, これも曲率  $-4\pi$  の双曲計量をもつとする.  $g$  は  $M$  の内点で分岐しないから,  $\mathbb{D}$  にもちあげると,  $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  は非分岐被覆, つまり双曲等長写像となる.

$g$  を  $\overline{M}$  に制限すると次数は  $d$  だから,  $M$  の基本領域は  $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$  と微分同相な  $\mathbb{D}$  の部分領域  $U \subset \mathbb{D}$  を  $d$  個はりあわせたもので,  $g: M \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$  は  $d$  重非分岐被覆である.

例 5.4 Voss 曲面は  $d = 1$  の例である.

注意 5.5 ガウス写像  $g: M \rightarrow \mathbb{P}^1$  は上のように考えれば,  $\mathbb{P}^1 \setminus \{r \text{ 点}\}$  の基本領域と同相な  $U$  からの写像に落とせるが, 極小曲面自身は  $U$  からの写像には落ちない. 実際, もしそうなら, 系 4.2 の (ii) より  $D_g \leq 2$  になってしまう. これは W-データのうち  $hdz$  は  $U$  上の正則微分とは考えられないことを意味している.

## 6 Nevanlinna 理論へ

残念ながら上の議論では予想は解けない. 議論を進めるため, Nevanlinna 理論にふれておこう ([Ko]).

$M$  の普遍被覆が  $\mathbb{D}$  の場合が問題である.  $(\mathbb{D}, \omega_{hyp})$  を前節のもので曲率を  $K_h = -4\pi$  として,  $M$  の面積を  $A_{hyp}(M)$  と書く.  $\omega_{FS}$  は  $\mathbb{P}^1$  上の曲率  $4\pi$  をもつ Fubini-Study 計量とする ( $\mathbb{P}^1$  の面積を 1 に規格化した). 双曲型完備リーマン面に対する Gauss-Bonnet の定理 (証明は次節)

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_h \omega_{hyp} = \int_M -4\pi \omega_{hyp} = -4\pi A_{hyp}(M)$$

により  $M$  の基本領域  $F$  の双曲計量による面積は

$$A_{hyp}(F) = G - 1 + \frac{k}{2} \quad (22)$$

であり, 一方  $d$  を  $g$  の次数とすれば,  $F$  の誘導計量  $g^*\omega_{FS}$  による面積  $A_{FS}(F)$  は  $d$  である. したがって

$$A_{FS}(F) = \frac{d}{G - 1 + k/2} A_{hyp}(F) = RA_{hyp}(F), \quad (23)$$

すなわち、比  $R$  は、基本領域の、Fubini-Study 計量から誘導された計量による面積の  $\mathbb{D}$  上の双曲計量による面積に対する比であることがわかる。

ここで Shimizu-Ahlfors の特性関数  $T_g(r)$  に対する定理を思い出そう。 $\mathbb{C}(t)$  を  $\mathbb{D}$  の半径  $0 < t < 1$  の円板とすると

$$T_g(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{C}(t)} g^* \omega_{FS}$$

がなりたつ。半径 1 の円板上の有理形関数に対する Nevanlinna 理論を展開するためには、 $r$  が十分 1 に近いときの  $T_g(r)$  の

$$\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{C}(t)} \omega_{hyp} \approx \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r}$$

に対する増大度が必要である。(ここでは近似式を使っている、厳密には左辺は  $\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r^2}$  だが、Nevanlinna 理論では有界量は無視される。)

実際

$$T_g(r) \geq \frac{\eta}{2} \log \frac{1}{1-r} \quad (24)$$

の形の最良評価が円板上の有理形関数に対する対数微分の補題を導くために必要である [KKM2]。一般に  $\mathbb{C}(t)$  の面積は  $M$  の基本領域の有限個の合併集合  $\cup F_j$  の面積で近似される。(23) を使って  $\eta$  が得られそうだが、双曲変換の対称性は円板の形状とはまったく相容れないので、議論が必要になる。ここではこの議論には深入りせずに、簡単に計算できる例をあげておく。

Fubini-Study 計量を  $\mathbb{P}^1$  上の面積を 1 に規格化した特異計量  $\Psi$  におきかえると、

$$T_g(r) \geq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{C}(t)} g^* \Psi \quad (25)$$

が得られる。これは積分幾何学の Crofton の公式を用いてたやすく示される [Ko]。像  $g(M)$  が  $\mathbb{P}^1 \setminus \{r \text{ 点}\}$  で、 $r=3$  または 4 のとき、 $\mathbb{P}^1$  上の特異計量として  $\Omega$  上の双曲計量を  $\mathbb{P}^1 \setminus \{r \text{ 点}\}$  に誘導し、さらにその面積を 1 と規格化したものが使える。これを用いていくつかの例を計算しよう。

**命題 6.1** 基本領域  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  をもつ擬代数的極小曲面を考え、 $g$  は  $\{p_1, \dots, p_k\}$  でのみ分岐しているとする。

(i) もし  $D_g = 3$  ならば

$$T_g(r) \geq \log \frac{1}{1-r} \quad (26)$$

がなりたつ。これは  $k=3$  の Voss 曲面と、もし存在するならば  $G=1$  で  $D_g=3$  の代数的極小曲面にあてはまる。

(ii) もし  $D_g = 4$  ならば

$$T_g(r) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r} \quad (27)$$

がなりたつ。これは  $k = 4$  の Voss 曲面にあてはまる。

**注意 6.2** いくつかの理由から, (26), (27) は等号となり, (i) では  $\eta = 2$ , (ii) では  $\eta = 1$  と予想される。この場合  $R = \eta$  も得る。

**証明:**  $(\mathbb{D}, \omega_{hyp})$ ,  $\Omega$  は上の通り,  $\omega_\Omega$  を曲率  $-4\pi$  をもつ  $\Omega$  上の双曲計量とする。  $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  をガウス写像のリフトとすると, これは分岐がないので双曲等長写像である。特性関数  $T_g(r)$  を得るために, 計量  $\omega_\Omega$  を  $\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{除外値}\}$  の基本領域が面積 1 となるよう規格化しよう。  $D_g = 3$  のときは基本領域の  $\omega_\Omega$  に関する面積は (22) より  $G - 1 + 3/2 = 1/2$  だから計量  $2\omega_\Omega$  を用いると, (25) により

$$T_g(r) \geq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{C(t)} 2g^* \omega_\Omega = 2 \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{C(t)} \omega_{hyp} = \log \frac{1}{1-r}$$

となる。(i) の例は命題 5.3 から得られる。  $D_g = 4$  のときは計量の変形は不要で, (ii) を得る。

しかしながら, 本来の目的は逆である。すなわちまず  $T_g(r)$  を評価して,  $D_g$  や  $\nu$  を判定することである。これについては [KKM2] で議論する。

## 7 完備双曲型曲面の Gauss-Bonnet の定理

$M = \overline{M} \setminus \{k \text{ 点}\}$  が双曲型るときは, 普遍被覆は  $\mathbb{D}$  だから, その双曲計量  $\omega_h = \omega_{hyp}$  を基本領域に制限することにより, 完備曲面を得る。  $K_h$  を曲率とするとき, Gauss-Bonnet の定理

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_h \omega_h = -4\pi \int_M \omega_h = -4\pi A_{hyp}(M) \quad (28)$$

を証明しておこう (よく使われるが, 証明が見当たらない)。  $j = 1, 2, \dots, k$  に対し,  $D_{\varepsilon_j}$  を半径  $\varepsilon_j$  の  $p_j$  を中心とする円板とする。  $M_\varepsilon = \overline{M} \setminus \cup_j D_{\varepsilon_j}$  とおき,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ですべての  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  を意味することにする。各  $D_{\varepsilon_j}$  上で平坦となる  $\overline{M}$  の任意の計量  $\sigma$  を考える。Kähler 形式として局所的に  $\sigma = \frac{i}{2} \tilde{\sigma} dz \wedge d\bar{z}$ ,  $\omega_h = \frac{i}{2} \tilde{\omega}_h dz \wedge d\bar{z}$  と表す。  $\sigma/\omega_h$  は  $M_\varepsilon$  上の関数だから, ストークスの定理により,

$$-\sum_j \int_{\partial D_{\varepsilon_j}} d^c \log(\sigma/\omega_h) = \int_{M_\varepsilon} dd^c \log(\sigma/\omega_h) = \int_{M_\varepsilon} dd^c \log \tilde{\sigma} - \int_{M_\varepsilon} dd^c \log \tilde{\omega}_h,$$

ここに  $d = \partial + \bar{\partial}$ ,  $d^c = (\partial - \bar{\partial})/(4\pi i)$ , ( $\partial$  は Osserman の定義の  $1/2$ ). このとき  $dd^c \log \tilde{\omega} = -\frac{K_\omega}{2\pi} dA_\omega$ , ( $K_\omega$ ,  $dA_\omega$  はそれぞれ  $\omega$  のガウス曲率, 面積素) であることに注意して, 極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  をとり, コンパクトリーマン面に対する Gauss-Bonnet の定理を  $(\bar{M}, \sigma)$  に適用することにより次を得る.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_j \int_{M_\varepsilon} (dd^c \log \tilde{\sigma} - dd^c \log \tilde{\omega}_h) = -\chi(\bar{M}) - 2A_{hyp}(M).$$

次に各  $D_{\varepsilon_j}$  上の局所座標で  $z = 0$  が  $p_j$  に対応するものをとれば,  $\sigma = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$ ,  $\omega_h = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{|z|^2 (\log|z|^{-2})^2} dz \wedge d\bar{z}$  と書ける.  $d^c = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} dr + r \frac{\partial}{\partial r} d\theta \right)$  だから

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_j \int_{\partial D_{\varepsilon_j}} d^c \log(\sigma/\omega_h) = k,$$

従って (28) を得る.

## 参考文献

- [BC] L. Barbosa and G. Colares, *Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Lecture Notes in Math., 1195, Springer (1980).
- [F] Y. Fang, *On the Gauss map of complete minimal surfaces with finite total curvature*, Indiana Univ. Math. J. **42**, (1993) 1389–1411.
- [F1] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235–247.
- [F2] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^m$* , Vieweg (1993).
- [F3] H. Fujimoto, *Unicity theorems for the Gauss maps of complete minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 481–487.
- [G] F. Gackstatter, *Über abelsche Minimalflächen*, Math. Nachr. **74** (1976), 157–165.
- [H] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.



- [JM] L. Jorge and W. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, *Topology* **22** (1983), 203–221
- [Ka] Y. Kawakami *On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces*, submitted (2005).
- [Ko] R. Kobayashi, *Toward Nevanlinna theory as a geometric model of Diophantine approximation*, *Sugaku Expositions* **16** (2003), 39–79.
- [KKM1] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces* DG/0511543 (2005).
- [KKM2] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *Lemma on Logarithmic Derivative for the Gauss Map of Algebraic Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , in preparation (2005).
- [MS] R. Miyaoka and K. Sato, *On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions*, *Arch. Math.* **63** (1994), 565–576.
- [O1] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$* , *Ann. of Math.* **80** (1964), 340–364.
- [O2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover (1986).
- [WX] A. Weitsman and F. Xavier, *Some function theoretic properties of the Gauss map for hyperbolic complete minimal surfaces*, *Mich. Math. J.*, **34** (1987), 275–283.