数理解析研究所講究録 1462 巻 2006 年 171-185

確率摂動を含む経済成長方程式

西岡 國雄[1]

1 序論

最初に MIT, Department of Economy での講義録 [7] を引用し, 経済学で研究されている「経済成長理論」が何を目的としているかを説明する.

2000 年の経済統計から, 数カ国の "per-capita GDP" [2] を比較する.

USA	\$32,500	Mexico	\$9,000	China	\$4,000
India	\$2,500	Nigeria	\$1,000		

この表から判るように, per-capita GDP の高下は生活水準の貧富を意味する.

[質問] では貧しい国が高水準の生活を獲得する手段は何か?

[回答] 急速な経済成長を遂げ, 高い per-capita GDP を達成する.

実際に USA では, "1870 年には \$3,300 → 2000 年には \$32,500" との per-capita GDP の成長があった. この間, 経済成長率の平均は 1.75 % で

$$(1+0.0175)^{2000-1870} \times \$3,300 = \$32,500$$

と計算できる. India, Pakistan, Philippines などの成長率は 0.75 % 程度だが, もし USA の成長率もこれと同程度なら

$$(1+0.0075)^{2000-1870} \times \$3,300 = \$8,700 \sim \frac{1}{4} \times \$32,500$$

となり, Mexico と同水準の生活を送っていることになる.

高水準の生活を獲得するために, 次の質問が重要となる.

(1.1) 急速で安定した経済成長を引き起こす要因はなにか?

この質問 (1.1) への解答を研究する学問が「経済成長理論」である.

このノートで, 我々は, ただ 1 つの製品を生産する閉じた経済系にたいし, その per-capita capital stock[3] $k(t)$ の時間発展を記述する動力学方程式 (Solow 方程式 (2.15)) を導入する. つぎに, Merton [6] に従い, その Solow 方程式 (2.15) に確率項を導入し, per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ を SDE (3.2) の解として定式化する.

このノートの目的は, "per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$, (3.2)" 及び "その成長率の時間平均 $\rho(t,w)$, (2.4)+(3.9)" の $t\to\infty$ での挙動を報告することである.

我々は, SDE (3.2) に現れる生産関数 f が

(i) 標準的な仮定である Inada 条件 (2.12a)+(2.12b) を満たす場合 (定理 3.7),

(ii) それを改良した Kamihigashi 条件 (4.1) を満たす場合 (定理 4.3)

---

[1] 中央大学商学部, 〒 192-0393 八王子市東中野 742-1; nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

[2] 勤労者一人当たりの GDP, (2.10).

[3] 勤労者一人当たりの資本量, (2.10).

について結論を得た. とくに, 後者の場合には

per-capita capital stock $k(t,w)$ が確率 1 で 0 に収束する特異な事例があること,
及びそれがどのような状況で起こるか

を示した.

2 新古典派の経済成長理論

1950 年代から '60 年代にかけて Harrod, Domer, Solow らによって「新古典派の経済成長理論」が提唱され,

設備投資や物理的インフラの整備が, 経済成長の重要な要因

という経済政策/主張の理論的支柱となった. 現在の経済成長理論の多くは, この理論の改良版として登場している.

2.1 経済活動の設定

我々は以下の設定で「新古典派の経済成長理論」を考える:

仮定 2.1. (i) 経済活動は孤立した島で行われ, この島には多数の勤労者が生活している.

(ii) ただ 1 つの製品が生産され, その生産は "資本量" と "勤労人口" の 2 要素のみに依存する.

(iii) 生産された製品はすべて, "消費" されるか "資本" として投資される. ◇

まずこの経済活動を表す諸量を導入する:

(2.1)

$Y(t)$:	時刻 t での GDP	$K(t)$:	時刻 t での資本量
$L(t)$:	時刻 t での勤労人口	$C(t)$:	時刻 t での消費量
$I(t)$:	時刻 t での投資量	$S(t)$:	時刻 t での貯蓄量

これらの経済諸量間には, 仮定 2.1 から, 次の関係式が成立している:

仮定 2.2. (i) 経済活動は Keynes 体系である[4] , i.e.

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{2.2}$$

(ii) 資本と勤労は相互に代換えでき, 企業は両者の比率を自由に選択できる. つまり生産量は, 資本量と勤労人口のみ依る生産関数 F により決定される:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \tag{2.3}$$

[4] Keynes の有効需要の法則とは「需要 $C(t)$ が生産量 $Y(t)$ を決定する」. すなわち (2.2) で, 右辺により左辺が決定され, 等式が成立する.

(iii) 資本量の増加には, 一定の摩擦 $\lambda > 0$ が存在する:

$$K'(t) = I(t) - \lambda\, K(t). \tag{2.4}$$

(iv) 貯蓄率 $s > 0$ は一定である[5]:

$$C(t) = (1-s)\, Y(t). \tag{2.5}$$

(v) 勤労人口の増加率 $n > 0$ は一定である:

$$L'(t) = n\, L(t). \qquad \diamond \tag{2.6}$$

上の仮定 2.2, (2.3) で導入された生産関数 F は次のようなものである.

仮定 2.3. $F : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$ は次の条件 (i)〜(iii) を満たす関数である.

(i) F は C^2-級 で $F(0,L) = 0 = F(K,0)$ [6] かつ strictly concave, i.e.

$$\partial_K F(K,L),\ \partial_L F(K,L) > 0 \quad \text{and} \quad \partial_K^2 F(K,L),\ \partial_L^2 F(K,L) < 0. \tag{2.7}$$

(ii) **Inada 条件**をみたす: i.e.

$$\lim_{K\to 0} \partial_K F(K,L) = \infty, \quad \lim_{L\to 0} \partial_L F(K,L) = \infty, \tag{2.8a}$$

$$\lim_{K\to \infty} \partial_K F(K,L) = 0, \quad \lim_{L\to \infty} \partial_L F(K,L) = 0. \tag{2.8b}$$

(iii) **CRS 条件**[7]を満たす:

$$\text{任意定数 } a > 0 \text{ にたいし} \quad F(aK,\ aL) = a\, F(K,L). \quad \diamond \tag{2.9}$$

例 2.4 (Cobb-Douglus 型生産関数). 定数 $0 < \alpha < 1$ にたいし

$$F(K,L) \equiv K^{\alpha}\, L^{1-\alpha}$$

で与えられる関数 F は 仮定 2.3 をみたす生産関数の典型例であり, Cobb-Douglus 型の生産関数と呼ばれる. $\diamond$

2.2 経済成長の動力学

ここで, (2.1) の経済諸量の代わりに "勤労者一人当たりの経済諸量" [8] を導入する.

(2.10)

$y(t) \equiv Y(t)/L(t)$:	勤労者一人当たりの GDP, per-capita GDP
$k(t) \equiv K(t)/L(t)$:	勤労者一人当たりの資本量, per-capita capital stock
$i(t) \equiv I(t)/L(t)$:	勤労者一人当たりの投資量, per-capita investment
$c(t) \equiv C(t)/L(t)$:	勤労者一人当たりの消費量, per-capita consumption

[5] $S(t) = sY(t)$ を仮定する. すると 仮定 2.1 (iii) より $S(t) = I(t)$ となるので, (2.2) より (2.5) が導かれる.

[6] これは Inada 条件 (2.8b) より導びかれる.

[7] Constant Return to Scale; 線形同次 linearly homogenerilty とも言われる.

[8] per-capita measurements

生産関数 F は CRS 条件 (2.9) を満たすから, $y(t)$ にたいしては 1 変数 $k(t)$ にのみ依存する新たな生産関数 f を考えれば良いことになる. 実際,

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)} = F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1) \equiv f(k(t)) \tag{2.11}$$

ここで

$$f(k) \equiv F(k,1) = F(\frac{K}{L}, 1)$$

だから, この f がどんな関数であるかを 仮定 2.3 より導びく.

命題 2.5. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ は C^2-級で, つぎの条件を満たしている.

$$f(0) = 0 \text{ で strictly concave,} \tag{2.12a}$$

$$\text{(Inada 条件)} \quad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0. \quad \diamondsuit \tag{2.12b}$$

証明 (2.12a) は (2.7) よりあきらか. CRS 条件 (2.9) を考慮すると

$$\begin{aligned} f'(k) &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \Big(F(\frac{K}{L} + \delta, 1) - F(\frac{K}{L}, 1) \Big) \\ &= \lim_{\delta} \frac{1}{L\,\delta} \Big(F(K + L\,\delta, L) - F(K, L) \Big) = \partial_K F(K, L) \end{aligned} \tag{2.13}$$

となるので, Inada 条件 (2.8a)+(2.8b) より (2.12b) も示される. □

いよいよ, per-capita capital stock $k(t)$ の時間発展を調べる.

$$k'(t) = \Big(\frac{K(t)}{L(t)} \Big)' = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \cdot \frac{L'(t)}{L(t)} \tag{2.14}$$

ここで, (2.2)〜(2.5) より

$$K'(t) = Y(t) - C(t) - \lambda \cdot K(t) = s \cdot Y(t) - \lambda \cdot K(t) = s \cdot F(K(t), L(t)) - \lambda \cdot K(t)$$

だから,

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = s \cdot f(k(t)) - \lambda \cdot k(t).$$

一方 (2.6) より

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n$$

となる. これらを (2.14) に代入して,

$$\text{(Solow Equation)} \quad k'(t) = s \cdot f(k(t)) - (\lambda + n) \cdot k(t) \tag{2.15}$$

の動力学方程式を得る.

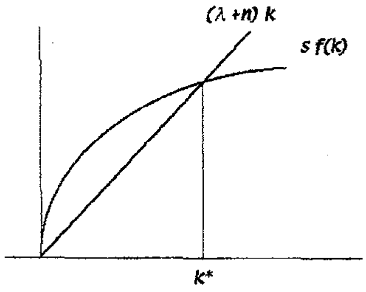
さて f は (2.12a)+(2.12b) を満たしているので,

$$s \cdot f(k) = (\lambda + n) \cdot k, \quad k > 0 \tag{2.16}$$

となる唯一の点 $k^* > 0$ が存在する. そして

$$k(t) < k^* \text{ なら } k'(t) > 0, \quad k(t) > k^* \text{ なら } k'(t) < 0$$

となるので, この k^* は Solow 方程式 (2.15) の安定不動点である. 従って, つぎの結論は自明である.



定理 2.6. (i) Per-capita capital stock $k(t)$ は Solow 方程式 (2.15) に従って，時間発展する．

(ii) Solow 方程式 (2.15) には唯一の安定不動点 $k^* > 0$ が存在し，$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*$.

(iii) Per-capita capital stock $k(t)$ の成長率 $\rho(t)$ は

$$\rho(t) \equiv \frac{k'(t)}{k(t)} = s \cdot \frac{f(k(t))}{k(t)} - (\lambda + n)$$

で与えられ，$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$. ◇

3 Solow 方程式の randomization

Solow 方程式 (2.15) の解 $k(t)$ は単調に k^* に収束する．ところが，現実の経済活動では per-capita capital stock は単調な挙動をとっておらず，ランダムに変動している．そのため，Solow 方程式をランダマイズすることが提案された．

とくに Merton は Solow 方程式を確率微分方程式化し，per-capita capital stock $k(t,w)$ を拡散過程に定式化する提案をおこなった．

3.1 Random Solow 方程式

Merton [6] は勤労人口の推移が，常微分方程式 (2.6) ではなく，次の線形確率微分方程式に従うとした：$\{B(t,w)\}$ を 1 次元 Brown 運動，$n, \sigma > 0$ を定数として，

$$dL(t,w) = n\,L(t,w)\,dt + \sigma\,L(t,w)\,dB(t,w). \tag{3.1}$$

すると Ito の公式より

$$dk(t,w) = d\Big(\frac{K(t)}{L(t,w)}\Big) = \frac{K'(t)}{L(t,w)}\,dt - \frac{K(t)}{L^2(t,w)}\,dL(t,w) - \frac{2K(t)}{2L^3(t,w)} \cdot \sigma^2\,L^2(t,w)\,dt$$

となるから，per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ を記述する SDE (Random Solow Equation) が得られた．

(Random Solow Equation)

$$dk(t,w) = \Big(s\,f(k(t,w)) - \big(\lambda + n - \sigma^2\big)\,k(t,w)\Big)dt - \sigma\,k(t,w)\,dB(t,w). \tag{3.2}$$

注意 3.1 (Chang-Malliaris の指摘). SDE (3.2) の係数は Lipschitz 条件を満たしていない. そのため, "(3.2) の解の一意存在は自明ではない" との指摘が Chang-Malliaris [1] によってなされた. そして, 彼らは別個に解の一意性を証明した[9]. ◇

一次元拡散過程が境界点の近傍でどう振る舞うかは, Feller, Itô-McKean [2] によって研究され,

> a regular boundary, an exit boundary, an entrance boundary, an infinite natural boundary, a finite natural boundary,

の 5 つに分類できることが示された[10].

さて SDE (3.2) の係数は $k > 0$ で Lipschitz 条件をみたしているので, 境界点 0 に到達しない範囲では the pathwise unique solution $\{k(t,w)\}$ が存在する. そこで, 境界点 0 は $\{k(t,w)\}$ が有限時間で到達出来ない an infinite natural boundary であることを確かめる.

補題 3.2. 生産関数 f が (2.12a)+(2.12b) を満たすとき, 境界点 0 は拡散過程 $\{k(t,w)\}$ の an infinite natural boundary である. ◇

証明 まず, 付録 A.1 の (A.1) で定義された φ の 0 近傍での挙動を調べる.

$$\beta \equiv 2\Big(\frac{\lambda + n}{\sigma^2} - 1\Big) \tag{3.3}$$

とおくと,

$$\varphi(y) = \Big(\frac{y}{k_0}\Big)^{\beta} \exp\Big\{\frac{2s}{\sigma^2}\int_y^{k_0}\frac{f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\Big\}. \tag{3.4}$$

任意の $M > 0$ にたいし, k_0 を十分小さくとると, (2.12a)+(2.12b) より,

$$f(\xi) > M\xi \quad \text{for } 0 < \xi < k_0$$

となる. この評価を (3.4) に適用し

$$\varphi(y) > \Big(\frac{y}{k_0}\Big)^{\beta}\cdot\Big(\frac{k_0}{y}\Big)^{2sM/\sigma^2} \to \infty \quad \text{as } y \to 0.$$

となる. ここで M は任意に大きいので, φ は $k = 0$ 近傍で可積分ではなく, $\lim_{k\to 0}|S(k)| = \infty$ となる. あとは, 付録 A.1 で述べる量を計算すれば, 補題の結論が得られる. □

命題 3.3. 生産関数 f が (2.12a)+(2.12b) を満たす. このとき SDE (3.2) には the pathwise unique solution $\{k(t,w)\}$ が存在する. ◇

3.2 経済諸量の漸近挙動

1975 年に Merton [6] は, per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ にたいし次の結論を導いた:

> f が (2.12a)+(2.12b) をみたし, さらに

$$\lambda + n - \sigma^2 > 0 \tag{3.5}$$

[9] このノートでは, 付録 A.1 で述べる境界点の分類を利用し, 解の一意存在を確かめる.
[10] 付録 A.1 にその結果を要約する.

とする．このとき，(A.3) で定義される $\mu(k)\,dk$ が per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ の an invarinat probability measure である．◇

ところが，この (3.5) を仮定することの必然性は不明確である[11]．そこで，我々は，(3.5) を仮定しないで $\{k(t,w)\}$ の漸近挙動を考えよう．

補題 3.4. f が (2.12a)+(2.12b) を満たしている．このとき (3.3) の β にたいし

$$\varphi(y) \simeq y^{\beta} \quad \text{for large } y. \quad \diamondsuit \tag{3.6}$$

証明 Inada 条件 (2.12b) より $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ となるので，

$$s\,f(k) - (\lambda + n - \sigma^2)\,k \simeq -(\lambda + n - \sigma^2)\,k \quad \text{for large } k$$

となる．あとは簡単な計算で，補題の結論が得られる．□

これより，Merton の仮定 (3.6) を外し (2.12a)+(2.12b) のみを仮定した場合に，境界点 0 と ∞ は付録 A.1 に従って以下の通り分類できる:

(3.7)

$\lambda + n - \sigma^2/2$	< 0	≥ 0
$k = 0$	an infinite natural	
$k = \infty$	a finite natural	an infinite natural

つぎに 付録 A.2 で述べた既知の結果を参照すると，Merton の結論を拡張した結論が簡単に得られる:

命題 3.5. 生産関数 f は (2.12a)+(2.12b) をみたしている．

このとき，係数 $0 < \lambda < 1$, $n > 1$, $\sigma > 0$ [12]の大小関係により per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ の漸近挙動は以下の通りになる．

(i) $\lambda + n - \sigma^2/2 < 0$ のとき，確率 1 で $\lim_{t\to\infty} k(t,w) = \infty$.

(ii) $\lambda + n - \sigma^2/2 \geq 0$ のとき，$\{k(t,w)\}$ は $(0,\infty)$ 上で recurrent であり，(A.3) で与えられる an invariant measure $\mu(k)\,dk$ にたいし (A.5) が成立．ただし等号が成立した場合，$\mu(k)\,dk$ は有限な測度ではない．◇

注意 3.6. 勤労人口 $\{L(t,w)\}$ の明示的な解は簡単に得られる:

$$L(t,w) = L(0)\,\exp\{(n - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\,B(t,w)\}$$

これより

(i) $n \neq \sigma^2/2$ のとき，

$$\lim_{t\to\infty} L(t,w) = \begin{cases} 0 & n < \sigma^2/2 \\ \infty & n > \sigma^2/2, \end{cases} \qquad a.s..$$

[11] (3.5) は，an invariant measure が存在するための十分条件ではあるが必要条件ではない，(3.10).

[12] 順に (2.4) の資本増加の摩擦係数，勤労人口を表す SDE (3.1) の増加率，確率摂動の大きさ．

(ii) $n = \sigma^2/2$ のとき, $\{L(t,w)\}$ は $(0,\infty)$ 上で recurrent である, つまり

$$\limsup_{t\to\infty} L(t,w) = \infty, \quad \liminf_{t\to\infty} L(t,w) = 0 \qquad a.s.. \quad \diamondsuit$$

つぎに per-capita capital stock の成長率を調べてみよう. 確率項のない 定理 2.6 では, per-capita capital stock の成長率は

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = s \cdot \frac{f(k(t))}{k(t)} - (\lambda + n)$$

となるので, その時間平均は

$$\begin{aligned} \frac{\log k(t) - \log k(0)}{T} &= \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{s}{T}\int_0^T \frac{f(k(t))}{k(t)}\,dt - (\lambda+n) \\ &\to s \cdot \frac{f(k*)}{k*} - (\lambda + n) = 0 \quad \text{as } T \to \infty \end{aligned}$$

である.

一方 Random Solow Equation (3.2) でも, deterministic case と同様に

$$d(\log k(t,w))$$

を per-capita capital stock の成長率と定義する. すると Ito の公式から

$$\frac{\log k(T,w) - \log k(0)}{T} = \frac{s}{T}\int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt - (\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma}{T}B(T,w) \tag{3.8}$$

となり, その時間平均の漸近挙動も調べることが出来る.

以上の結果をまとめる.

定理 3.7. 生産関数 f は (2.12a) と Inada 条件 (2.12b) をみたしている. このとき

- Per-capita capital stock $k(t,w)$,
- Per-capita capital stock の成長率の時間平均[13]

$$\rho(t,w) \equiv \frac{\log k(t,w) - \log k(0)}{t}, \tag{3.9}$$

- 勤労人口 $L(t,w)$,

という三つの経済量の $t \to \infty$ における漸近挙動は以下の通り:

(3.10)

<table>
<tr><td>$\lambda + n - \sigma^2/2$</td><td>< 0</td><td>$= 0$</td><td colspan="3">> 0</td></tr>
<tr><td>$n - \sigma^2/2$</td><td colspan="3">< 0</td><td>$= 0$</td><td>> 0</td></tr>
<tr><td>$k(t,w)$</td><td>∞ $a.s.$</td><td>recurrent†</td><td colspan="3">recurrent$^\sharp$</td></tr>
<tr><td>$\rho(t,w)$</td><td>r_1 $a.s.$</td><td colspan="4">0 $a.s.$</td></tr>
<tr><td>$L(t,w)$</td><td colspan="3">0 $a.s.$</td><td>recurrent$^\flat$</td><td>∞ $a.s.$</td></tr>
</table>

[13] $t \to \infty$ で, 拡散過程 $\{k(t,w)\}$ の Lyapunov index となる.

ここで "recurrent†" とは, $\{k(t,w)\}$ は $(0,\infty)$ 上で recurrent であるが (A.3) の an invariant measure $\mu(k)\,dk$ が有限でなく, その Cézaro 極限も

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T k(t,w)\,dt=\infty \quad a.s.$$

となることである. 一方 "recurrent$^\sharp$" では an invariant measure $\mu(k)\,dk$ が確率測度である.

また r_1 は有限な定数で,

$$r_1\equiv-(\lambda+n-\frac{\sigma^2}{2})>0,$$

である. さらに "recurrent$^\flat$" とは, $\{L(t,w)\}$ が $(0,\infty)$ 上で recurrent であり, その invariant measure は $\exp\{x\}\,dx$ となることである. ◇

証明 $k(t,w)$ 及び $L(t,w)$ の挙動は, 命題 3.5 と注意 3.6 で既に調べている. そこで, $\rho(t,w)$ の挙動を調べる.

まず $\lambda+n-\sigma^2/2>0$ の場合を扱うが, この場合は an invariant measure $\mu(k)\,dk$ は確率測度である. 重複対数の法則より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}B(T,w)=0 \quad a.s.$$

である. すると (3.8), (3.9), Ergodic Theorem (A.5) より

$$\lim_{T\to\infty}\rho(T,w)=s\int_0^\infty\frac{f(y)}{y}\,\mu(y)\,dy-(\lambda+n-\frac{\sigma^2}{2}) \quad a.s.$$

となる. この右辺を第 1 項を実際に計算しよう. (3.3) の β と (A.3)+(A.4) から

$$\begin{aligned}
s\int_0^\infty\frac{f(y)}{y}\,\mu(y)\,dy&=s\int_0^\infty dy\,\frac{f(y)}{y}\,\frac{C}{\sigma^2\,y^{2+\beta}}\,\exp\{-\frac{2s}{\sigma^2}\int_y^{k_0}\frac{f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\}\\
&=\frac{s\,C\,\sigma^2}{2s}\int_0^\infty dy\,\frac{1}{\sigma^2\,y^{1+\beta}}\Big(\frac{2s}{\sigma^2}\,\frac{f(y)}{y^2}\,\exp\{-\frac{2s}{\sigma^2}\int_y^{k_0}\frac{f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\}\Big)\\
&=\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{y^{1+\beta}}\,\exp\{\frac{2s}{\sigma^2}\int_y^{k_0}\frac{f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\}\Big|_{y=0}^{\infty}\\
&\qquad+\frac{\sigma^2\,C}{2}(1+\beta)\int_0^\infty dy\,\frac{1}{\sigma^2\,y^{2+\beta}}\,\exp\{\frac{2s}{\sigma^2}\int_y^{k_0}\frac{f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\}\\
&=\frac{\sigma^2\,C}{2}\,(1+\beta)\,\frac{1}{C}=\lambda+n-\frac{\sigma^2}{2}.
\end{aligned}$$

これより $\lim_{T\to\infty}\rho(T,w)=0$ が導かれ, recurrent$^\flat$ の場合の結論が示された.

つぎに, $\lambda+n-\sigma^2/2=0$ の場合, an invariant measure は $\displaystyle\int_0^\infty\mu(y)\,dy=\infty$ だが, 関数 $f(y)/y$ は $\mu(y)\,dy$ 可積分である. 任意の $M>0$ にたいし

$$T\geq\int_0^T I_{(0,M)}(k(t,w))\,dt$$

となるから, Ergodic Theorem (A.5) より

$$0\leq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt\leq\lim_{T\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^T\frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt}{\displaystyle\int_0^T I_{(0,M)}(k(t,w)\,dt}=\frac{\displaystyle\int_0^\infty\frac{f(y)}{y}\,\mu(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^M\mu(y)\,dy} \quad a.s.$$

となる. ここで $M \to \infty$ とすると, $\int_0^\infty \mu(y)\,dy = \infty$ だから

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt = 0 \quad a.s.$$

となる. あとは前と同じ議論により, "recurrent†" の場合に $\rho(t,w) \to 0\ a.s.$ との結論が得られる.

残された $\lambda + n - \sigma^2/2 < 0$ の場合は, 証明が簡単なので割愛する. □

4 Inada 条件の妥当性

我々は, 生産関数 $F(K,L)$ にたいして, Inada 条件 (2.8a)+(2.8b) を仮定した. しかし近年, 0 近傍での Inada 条件 (2.8a) は妥当ではないとの意見が提出されている, Kamihigashi [4].

すなわち, 生産関数 $f(k)$ の性質 (2.12b, 第 1 式) は, (2.8a) から導かれる. ところが 平均値の定理 を使うと,

$$\begin{aligned} F(K+1,L) - F(K,L) &= L\Big(F(\frac{K+1}{L},1) - F(\frac{K}{L},1)\Big) = L\Big(f(\frac{K+1}{L}) - f(\frac{K}{L})\Big) \\ &= L\,f'(y)\,\frac{1}{L} = f'(y), \quad y \in (\frac{K}{L}, \frac{K+1}{L}) \end{aligned}$$

となる. ここで L が十分大きいとき, $y \simeq 0$ となり, (2.12b, 第 1 式) から $f'(y) \simeq \infty$ となる. すなわち,

勤労人口が十分大きいとき, 資本を 1 単位増やすだけで, 生産量が極端に増加する

との奇妙な結論が導かれる.

そこで Kamihigashi は 生産関数 $f(k)$ にたいし, 次を仮定することを提案した:

仮定 4.1 (Kamihigashi [4]). $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ は C^2-級の関数で, 以下を満たす.

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{aligned} &f(0) = 0 \ \text{ で strictly concave,} \\ &\text{(Kawahigashi 条件)} \quad 0 < \exists \lim_{k\to 0} f'(k) \equiv \eta < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

注意 4.2. Kamihigashi 条件 (4.1) を仮定した場合, SDE (3.2) の係数は $[0,\infty)$ 上で Lipschitz 条件を満たしている. そのため, Inada 条件 (2.12b) を仮定した場合と異なり, pathwise unique な解の存在には何らの困難も生じない. $\diamondsuit$

本節では, 0 近傍での Inada 条件 (2.12b, 第 1 式) に代えて Kawahigashi 条件 (4.1) を仮定し, per-capita capital stock $\{k(t,w)\}$ の $t \to \infty$ での挙動を調べる.

平均値の定理より

$$f(\xi) \simeq \eta\xi \quad \text{for small } \xi$$

となるので,

$$\text{(4.2)} \qquad \varphi(y) \simeq y^\beta \exp\{-\frac{2s}{\sigma^2}\log y\} = y^{2(\lambda+n-\sigma^2-s\eta)/\sigma^2} \quad \text{for small } y.$$

これより 付録 A.1 に従うと, $\{k(t,w)\}$ の境界点 0 および ∞ は次のように分類される:
$\lambda + n - \sigma^2/2 \equiv \theta$ とおく.

(4.3)

	$\theta < 0$	$0 \le \theta \le s\eta$	$s\eta < \theta$
$k = 0$	an infinite natural	an infinite natural	a finite natural
$k = \infty$	a finite natural	an infinite natural	an infinite natural

この分類を 付録 A.2 で再録した結果に当てはめれば, 次の結論が容易に得られる.

定理 4.3. 生産関数 f は Kamihigashi 条件 (4.1) をみたしている. このとき

- Per-capita capital stock $k(t, w)$,
- Per-capita capital stock の成長率の時間平均

$$\rho(t, w) \equiv \frac{\log k(t, w) - \log k(0)}{t},$$

諸量の $t \to \infty$ での漸近挙動は以下の通り: $\lambda + n - \sigma^2/2 \equiv \theta$ とおく.

(4.4)

θ	$\theta < 0$	$\theta = 0$	$0 < \theta < s\eta$	$\theta = s\eta$	$\theta > s\eta$
$k(t, w)$	∞ *a.s.*	recurrent†	recurrent$^\sharp$	recurrent‡	0 *a.s.*
$\rho(t, w)$	r_1 *a.s.*		0 *a.s.*		r_3 *a.s.*

ここで "recurrent†" あるいは "recurrent‡" とは, $\{k(t, w)\}$ は $(0, \infty)$ 上で recurrent であるが (A.3) の an invariant measure $\mu(k)\,dk$ が有限でなく, その Cézaro 極限も

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T k(t, w)\,dt = \begin{cases} \infty \quad a.s. & \text{recurrent}^\dagger \\ 0 \quad a.s. & \text{recurrent}^\ddagger \end{cases}$$

となる意味である. 一方 "recurrent$^\sharp$" では an invariant measure $\mu(k)\,dk$ が確率測度である.

また r_1, r_3 は有限な定数で,

$$r_1 \equiv -(\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) > 0, \qquad r_3 \equiv s\eta - (\lambda + n - \frac{\sigma^2}{2}) < 0,$$

である. ◇

注意 4.4. (i) 勤労人口 $\{L(t, w)\}$ は生産関数 f に無関係である. 従って, 定理 3.7 の結果

$$L(t.w) \to \begin{cases} 0 \quad a.s. & n - \sigma^2/2 < 0 \\ \text{recurrent} & n - \sigma^2/2 = 0 \\ \infty \quad a.s. & n - \sigma^2/2 > 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

がそのまま成立している.

(ii) Inada 条件を仮定した 定理 3.7 と比較すると, (4.4) では, 新たに per-capita capital stock $k(t, w)$ が確率 1 で 0 に収束する場合 ($\theta > s\eta$ の場合) が出現している. この場合でも $s\eta, \lambda$ の値が適切な範囲にあれば, 勤労人口 $L(t, w)$ に関しては (4.5, 右辺) のどの事例も起こりえる. ◇

定理 4.3 の証明　$k(t,w)$ の挙動は (4.3) と 付録 A.2 より明らかである. $\rho(t,w)$ の挙動を調べる.

まず $\theta = s\eta$ の場合を扱う. このとき 仮定 4.1 より

$$\varphi(y) \simeq y^{-1} \quad \text{for small } y, \qquad \varphi(y) \simeq y^{-1+(2s\eta)/\sigma^2} \quad \text{for large } y$$

となり, (4.3) と 付録 A.2 より, $\{k(t,w)\}$ は recurrent だが, その an invariant measure $\mu(k)\,dk$ は

$$\mu(k)\,dk \simeq \frac{1}{\sigma^2 k}\,dk \quad \text{for small } k, \qquad \mu(k)\,dk \simeq \frac{1}{\sigma^2 k^{1+(2s\eta)/\sigma^2}}\,dk \quad \text{for large } k$$

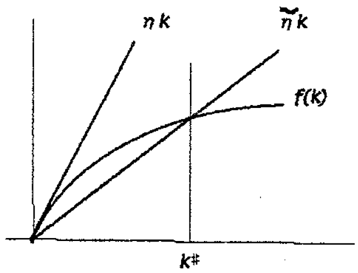
で有限な測度ではない. そこで

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt$$

を計算しよう.

仮定 4.1 より $0 \le f(k)/k \le \eta$ となるので,

$$0 \le \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \eta\,dt = \eta. \tag{4.6}$$



つぎに, $0 < \tilde\eta < \eta$ なる定数 $\tilde\eta$ を任意に選ぶ. f は 仮定 4.1 を満たしているので,

$$f(k) = \tilde\eta k, \quad k > 0$$

を満たす唯 1 つの点 $k^\sharp > 0$ が存在する. ここで新しく 2 つの関数

$$h(k) \equiv \tilde\eta k, \qquad \tilde f(k) \equiv \begin{cases} \tilde\eta k & 0 \le k < k^\sharp \\ f(k) & k^\sharp \le k \end{cases}$$

を定義する. さらに

$$g(k) \equiv h(k) - \tilde f(k) = \begin{cases} 0 & 0 \le 0 \le k < k^\sharp \\ \tilde\eta k - f(k) & k^\sharp \le k \end{cases}$$

とおくと, $g(k)/k$ は $\mu(k)\,dk$ 可積分関数となる.

さて 任意の $\varepsilon > 0$ にたいし $\int_\varepsilon^\infty \mu(k)\,dk < \infty$ となるから, Ergodic Theorem (A.5) より

$$0 \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{g(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt \le \lim_{T\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^T \frac{g(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt}{\displaystyle\int_0^T I_{(\varepsilon,\infty)}(k(t,w))\,dt} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{g(y)}{y}\mu(y)\,dy}{\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \mu(y)\,dy} \quad a.s.$$

となる. ここで $\varepsilon \to 0$ とすると, 上式右辺 は 0 に収束する. つまり

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{h(k(t,w)) - \tilde{f}(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt = 0 \quad a.s.$$

である. 一方

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{h(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\eta}\,dt = \tilde{\eta}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt \\ &\quad= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t,w)) - h(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{h(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt = \tilde{\eta} \quad a.s.\end{aligned}$$

となる.

つぎに, 関数 $\tilde{f}$ の定義より $\tilde{f} \le f$ となっているので,

$$\tilde{\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\tilde{f}(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt \le \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt \quad a.s.. \tag{4.7}$$

ここで $\tilde{\eta}$ は任意なので, $\tilde{\eta} \uparrow \eta$ とすれば, (4.7) と (4.6) と併せて,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{f(k(t,w))}{k(t,w)}\,dt = \eta \quad a.s.$$

が得られた. あとは 定理 3.7 の証明と同じ議論により, $\theta = s\eta$ の場合に, $\rho(t,w) \to 0$ $a.s.$ となることが示される.

また θ が他の場合は, 定理 3.7 と同様の方法で, 定理の結論は簡単に証明できる. □

A 付録

A.1 1次元拡散過程の境界点

区間 $(0,\infty)$ 上の拡散過程 $\{k(t,w)\}$ が境界点 $0, \infty$ に到達できるかどうかは, canonical scale function $S(k)$ と speed measure $m(k)\,dk$ を調べることにより判定できる, Itô-McKean [2].

I. $k_0 \in (0,\infty)$ を任意に固定し,

$$\varphi(y) \equiv \exp\{-2\int_{k_0}^y \frac{sf(\xi) - (\lambda + n - \sigma^2)\xi}{\sigma^2\xi^2}\,d\xi\}, \quad y \in (0,\infty) \tag{A.1}$$

とおく．この φ にたいし

$$\text{(A.2)}\quad \begin{array}{ll} \text{(scale function)} & S(k) \equiv \int_{k_0}^{k} \varphi(y)\,dy, \quad k \in (0,\infty) \\ \text{(speed measure の密度関数)} & m(k) \equiv \dfrac{1}{\sigma^2 k^2 \cdot \varphi(k)}, \quad k \in (0,\infty), \end{array}$$

と定義する．Feller および Ito-Mckean は，この S と m の挙動と $\{k(t,w)\}$ の挙動との関係をしらべ，境界点を分類した．まず

$$A(k) \equiv \int_{k_0}^{k} dy\ \varphi(y) \int_{k_0}^{y} d\xi\ m(\xi), \quad B(k) \equiv \int_{k_0}^{k} dy\ m(y) \int_{k_0}^{y} d\xi\ \varphi(\xi)$$

とおき，

$$\lim_{k\to 0} A(k) \equiv A_0, \quad \lim_{k\to 0} B(k) \equiv B_0,$$
$$\lim_{k\to\infty} A(k) \equiv A_\infty, \quad \lim_{k\to\infty} B(k) \equiv B_\infty$$

とする．これらの値に従って，境界点 0 は以下のように分類される：

	a regular boundary	an exit boundary	an entrance boundary	a finite natural boundary	an infinite natural boundary
$\lvert A_0\rvert$	$<\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$
$\lvert B_0\rvert$	$<\infty$	$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$
$\lvert S(0)\rvert$	$<\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$

(境界点 ∞ の分類も，$A_0, B_0, S(0)$ をそれぞれ $A_\infty, B_\infty, S(\infty)$ に置き換えれば同じである．)

II. 境界点が an entrance boundary, a finite natural, an infinite natrual の場合，拡散過程 $\{k(t,w)\}$ が有限時間でそこに到達する確率は 0 である．一方，a regular boundary, an exit の場合には，有限時間で到達する確率は 0 ではない．

また，境界点が an exit boundary, a finite natural, an infinite natural の場合，そこから出発した $\{k(t,w)\}$ が内部に入る確率は 0 である．一方，an entarance boundary の場合にはその確率は 1 となる．さらに a regular boundary の場合にはその確率は正だが 1 ではない．

A.2 1次元拡散過程の漸近挙動

左右の境界点が共に natural boundaries である 1 次元拡散過程の漸近挙動も既に研究されている．その結果を再録する，Nishioka [8].

I. 境界点 0 および ∞ が infinite natural boundaries なら，$\{k(t,w)\}$ は $(0,\infty)$ 上で recurrent となり

$$\mu(k) \equiv \frac{m(k)}{C} = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{\sigma^2 k^2 \varphi(k)} \tag{A.3}$$

が an invariant measure の密度関数となる．ただし 定数 C は

$$C \equiv \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty m(k)\,dk & \text{if the integral is finite} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{A.4}$$

である.

さらに, 次の Ergodic Theorem が成立する:

Ergodic Theorem (Maruyama-Tanaka [5]) $\mu(y)\,dy$-可積分である関数 g, h にたいし

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T g(k(u,w))\,du}{\int_0^T h(k(u,w))\,du} = \frac{\int_0^\infty g(y)\,\mu(y)\,dy}{\int_0^\infty h(y)\,\mu(y)\,dy} \qquad a.s.. \tag{A.5}$$

ただし, 右辺の分母は 0 ではない. ◇

II. 境界点の片側が a finite natural boundary, 他の片側が an infinite natural の場合は,

(i) $\{k(t,w)\}$ が有限時間で境界点に到達する確率は 0 である,

(ii)

$$\lim_{t\to\infty} k(t,w) = \begin{cases} 0 \quad a.s. & \text{if 0 is a finite natural boundary} \\ & \quad \text{and } \infty \text{ is an infinite natural} \\ \infty \quad a.s. & \text{if 0 is an infinite natural boundary} \\ & \quad \text{and } \infty \text{ is a finite natural.} \end{cases}$$

参考文献

[1] Chang, F. and Malliaris, A. G., Asymptotic growth under uncertainty: Existence and uniqueness, Rev. Economics Studies, 59 (1987), 169-174.

[2] Itô, K. and McKean, Jr., H. P., Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, 1965.

[3] Jensen, B. S. and Wang, C., Basic stochastic dynamic system of growth and trade, Rev. International Economics, 7 (1999), 378-402.

[4] Kamihigashi, T., Almost sure convergence to zero in stochastic growth models, 11 pages, 2003, preprint.

[5] Maruyama, G. and Tanaka, H., Some properties of one-dimensional diffusion processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, Math., 11 (1957), 117-141.

[6] Merton, R., An asymptotic theory of growth under uncertainty, Rev. Economic Studies, 42 (1975), 375-393.

[7] MIT Open Course Ware, Economic growth, 14.451 Lecture Notes, 2003, http:// ocw. mit. edu/ OcwWeb/ Economics/ index.htm

[8] Nishioka, K., On the stability of two-dimensional linear stochastic systems, Kōdai Math. Sem. Rep., **27** (1976), 211-230.