数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 1-8

On the Hochschild cohomology of Frobenius algebras

眞田　克典 (Sanada, Katsunori)
東京理科大学理学部数学教室
(Department of Mathematics, Tokyo University of Science)

1 はじめに

多元環の Hochschild コホモロジーは，1945 年 G. Hochschild によって (おそらく群のコホモロジーをモデルとして) 定義され，1956 年 Cartan-Eilenberg[CE] によって Ext を用いた定義が，その後，MacLane[Mac] により，(多元環が基礎環上射影的等の条件を仮定せずに定義できる) 相対的コホモロジーによる定義が与えられました．

一般に Hochschild コホモロジーの計算は非常に困難であるとされており，実際，[EH] や [EHS] に見られるような特別な多元環に対してもその計算は非常に複雑です．

しかし，多元環の Hochschild コホモロジーは，その多元環に付随する様々な category の同値に関しての不変量として，非常に興味深い対象と考えられます．

ここでは，Frobenius 多元環に対する完備 Hochschild コホモロジーについての一般的ことがらを述べ，その若干の応用も含めて，hereditary order の Hochschild コホモロジー環の構造について述べます．

2 多元環の Hochschild コホモロジー

R を単位元をもつ可換環，Λ を上有限生成射影的 R 多元環とする．Λ の enveloping algebra $\Lambda\otimes_R\Lambda^{\mathrm{opp}}$ を Λ^e で，また Λ の中心を $Z\Lambda$ で表わす．M を左 Λ^e 加群 (以下，Λ-bimodule として記述することもある) とするとき，

$$H^n(\Lambda, M)=\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M)\quad (n\geqslant 0)$$

を，M を係数加群とする Λ の Hochschild コホモロジーとよぶ．これは明らかに R 加群であるが，$Z\Lambda$ 加群であることも比較的容易にわかる (すぐ後で，cup 積に関連して述べる)．$H^n(\Lambda,\Lambda)$ を $HH^n(\Lambda)$ と略記することにする．定義より，

$$H^0(\Lambda, M)\cong M^\Lambda=\{x\in M\mid ax=xa \text{ for any } a\in\Lambda\}$$

なので，特に，$HH^0(\Lambda)=Z\Lambda$ である．

2.1 Standard resolution, cup 積

$n \geqslant 0$ と Λ に対して，$X_n = \Lambda \otimes \cdots \otimes \Lambda$ $(n+2\text{-times})$ とおく．このとき，Λ の Λ^e-projective resolution

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} \Lambda \longrightarrow 0, \tag{1}$$

$$d_n(x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1},$$

$$d_1(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) = x_0 x_1 \otimes x_2 - x_0 \otimes x_1 x_2,$$

$$d_0(x_0 \otimes x_1) = x_0 x_1$$

が存在する．この resolution を Λ の standard resolution とよぶ．

また，diagonal approximation

$$\Delta_{i,j} : X_{i+j} \to X_i \otimes_\Lambda X_j;$$

$$x_0 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i+j+1} \mapsto x_0 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes 1 \otimes_\Lambda 1 \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+j+1}$$

によって cup 積 $H^i(\Lambda, M) \otimes H^j(\Lambda, N) \xrightarrow{\smile_{i,j}} H^{i+j}(\Lambda, M \otimes_\Lambda N)$ が定義される．このとき，この cup 積は結合法則を満足し，anti-commutativity:

$$\alpha \smile_{i,j} \beta = (-1)^{ij} \beta \smile_{j,i} \alpha \quad \text{for } \alpha \in HH^i(\Lambda), \beta \in HH^j(\Lambda, M)$$

を満すことがわかる．そして，積 $Z\Lambda \otimes H^i(\Lambda, M) \xrightarrow{\smile_{0,i}} H^i(\Lambda, M)$ は，上に述べた $H^i(\Lambda, M)$ の $Z\Lambda$ 加群としての構造を与えるものに他ならない．また，$HH^i(\Lambda) \otimes HH^j(\Lambda) \xrightarrow{\smile} HH^{i+j}(\Lambda)$ を得るので，この cup 積によって

$$HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{k \geqslant 0} HH^k(\Lambda)$$

は環となる．これを Λ の Hochschild コホモロジー環とよぶ．この環は，$HH^0(\Lambda) = Z\Lambda$ を部分環として含む．

2.2 Frobenius 多元環の完備 Hochschild コホモロジー

Λ を有限生成自由な Frobenius R 多元環とする．すなわち，Λ の R 上の基底の組 $(u_i, v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ で，$\varphi(u_i)(v_j) = \delta_{ij}$ を満すような左 Λ 加群としての同型 $\varphi : \Lambda \cong \mathrm{Hom}_R(\Lambda, R)$ が存在すると仮定する．このとき，任意の $x \in \Lambda$ に対して，$\alpha_{ji}(x) \in R$ が存在し，

$$x u_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \alpha_{ji}(x), \quad v_j x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(x) v_i$$

が成り立つ．$\mu = \varphi(1)$ $(\in \mathrm{Hom}_R(\Lambda, R) =: \Lambda^*)$ とおき，任意の $x \in \Lambda$ に対して，

$$x^\nu = \sum_{i=1}^{n} \mu(u_i x) v_i$$

とおくと，ν は Λ の $Z\Lambda$ 上の環自己同型 (Λ の Nakayama 自己同型) であることがわかる．

一般に Λ-bimodule M に対して，左からの Λ の作用を ν をほどこしてから作用させることにしたものを $_\nu M$ と記すことにすると，Λ-bimodule としての同型

$$\varphi : \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R({}_\nu\Lambda, R) \ =: ({}_\nu\Lambda)^*$$

が得られる．

Λ^e-projective resolution (1) から，Λ^e-projective module の exact sequence

$$0 \longrightarrow ({}_\nu\Lambda)^* \xrightarrow{d_0^*} ({}_\nu X_0)^* \xrightarrow{d_1^*} ({}_\nu X_1)^* \xrightarrow{d_2^*} ({}_\nu X_2)^* \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

が得られるので，(1) と (2) を φ でつないで，(記号も少し変更して) Λ の完備 projective resolution

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} X_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} X_{-3} \longrightarrow \cdots$$

を得る．これから，

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_{-2}, M) \xrightarrow{d_{-1}^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_{-1}, M) \xrightarrow{d_0^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_0, M) \xrightarrow{d_1^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_1, M) \longrightarrow \cdots \tag{3}$$

のホモロジーを Λ の完備コホモロジーと定義することにする ([Na]):

$$\widehat{H}^n(\Lambda, M) := \mathrm{Ker}\ d_{n+1}^\# / \mathrm{Im}\ d_n^\#$$

(これは projective resolution の選び方によらない)．

特に，$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_0, M) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_{-1}, M) \cong M$ を通して，

$$d_0^\# : M \longrightarrow M; m \mapsto \sum_{i=1} u_i m v_i =: N_\Lambda(m)$$

なので，

$$\widehat{H}^0(\Lambda, M) = M^\Lambda / N_\Lambda(M)$$

がわかる．特に，$\widehat{HH}^0(\Lambda) = Z\Lambda / N_\Lambda(\Lambda)$ [1]．また，

$$\widehat{H}^{-1}(\Lambda, M) = {}_{N_\Lambda}M / I_\Lambda(M)$$

ただし ${}_{N_\Lambda}M := \{m \in M \mid N_\Lambda(m) = 0\}, N_\Lambda(M) := \left\{ \sum_i m_i x_i^\nu - x_i m_i \mid x_i \in \Lambda, m_i \in M \right\}$

もわかる．

Modified Hochschild ホモロジー　上の complex (3) の代りに，modify された complex:

$$\cdots \longrightarrow {}_{\nu^{-1}}X_1 \otimes_{\Lambda^e} M \xrightarrow{d_1 \otimes \iota} {}_{\nu^{-1}}X_0 \otimes_{\Lambda^e} M \xrightarrow{d_0 \otimes \iota} {}_{\nu^{-1}}X_{-1} \otimes_{\Lambda^e} M \xrightarrow{d_{-1} \otimes \iota} {}_{\nu^{-1}}X_{-2} \otimes_{\Lambda^e} M \longrightarrow \cdots$$

を用いて，ホモロジーとして完備コホモロジーを与えることもできる: $\widehat{H}^\nu_{-n-1}(\Lambda, M) \cong \widehat{H}^n(\Lambda, M)$．
実際，任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して，同型

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X_r, M) \cong {}_{\nu^{-1}}X_{-r-1} \otimes_{\Lambda^e} M$$

が 2 つの complex の同型を与える．

[1] これは，[Br] では，(symmetric algebra に対しては) stable center，また，$N_\Lambda(\Lambda) = \mathrm{Im}\ (\Lambda \cong (\Lambda \otimes \Lambda)^\Lambda \to Z\Lambda; x \mapsto \sum_{i=1}^n u_i x v_i)$ は projective center とよばれています．

Cup 積　完備コホモロジーにおいても cup 積を定義することができる ([S1], [S2]):

$$\widehat{H}^n(\Lambda, M) \otimes \widehat{H}^m(\Lambda, N) \xrightarrow{\smile} \widehat{H}^{n+m}(\Lambda, M \otimes_\Lambda N) \text{ (for } m, n \in \mathbb{Z}).$$

したがって，Hochschild コホモロジー環 $\widehat{HH}^*(\Lambda) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{HH}^n(\Lambda)$ も定義できる．

Frobenius 多元環の拡大　Γ/Λ を Frobenius 拡大，すなわち，

$$\Gamma = a_1\Lambda \oplus \cdots \oplus a_m\Lambda = \Lambda b_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda b_m$$

であって，$\varphi_{\Gamma/\Lambda}(a_i)(b_j) = \delta_{ij}$ を満すような (Γ, Λ)-bimodule isomorphism:

$$\varphi_{\Gamma/\Lambda} : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda,-}(\Gamma, \Lambda)$$

が存在するものとする．また，

$$\mu_{\Gamma/\Lambda} = \varphi_{\Gamma/\Lambda}(1), \quad N_{\Gamma/\Lambda}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x b_i \quad (\text{for } \ x \in \Gamma)$$

とおく．Λ が前述のような基底の組 $(u_i, v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ をもつ Frobenius R 多元環と仮定するとき，Γ は $(a_iu_j, v_jb_i)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ を R 基底としてもつ Frobenius R 多元環となる．このとき，

$$\nu_\Gamma\mid_\Lambda = \nu_\Lambda, \quad N_{\Gamma/\Lambda}N_\Lambda = N_\Gamma, \quad \mu_\Lambda\mu_{\Gamma/\Lambda} = \mu_\Gamma$$

が成り立つ．ただし，ν_Γ, ν_Λ はそれぞれ Γ, Λ の Nakayama 自己同型を表わす (以下これを単に ν で表わす)．

Restriction, corestriction　上の記号の下で，$p \geqslant 0$ に対して，

$$(X_\Lambda)_p = \Lambda \otimes \cdots \otimes \Lambda \ (p+2\text{-times})$$
$$(X_\Gamma)_p = \Gamma \otimes \cdots \otimes \Gamma \ (p+2\text{-times})$$

とおく．

このとき，$p \geqslant 1$ に対して，complex の間の準同型:

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}((X_\Gamma)_p, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}((X_\Lambda)_{p-1} \otimes \Gamma, M) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}((X_\Lambda)_p, M) \tag{4}$$

が同型 $\mathrm{Ext}^p_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}(\Gamma, M) \cong H^p(\Lambda, M)$ を与えることがわかる．同様に，$q \geqslant 1$ に対して，complex の間の準同型:

$${}_{\nu^{-1}}(X_\Gamma)_q \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}} M \longleftarrow {}_{\nu^{-1}}(\Gamma \otimes (X_\Lambda)_{q-1}) \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}} M \cong {}_{\nu^{-1}}(X_\Lambda)_q \otimes_{\Lambda^e} M \tag{5}$$

が同型 $\mathrm{Tor}_q^{\nu\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}(\Gamma, M) \cong H_q^\nu(\Lambda, M)$ を与える．

任意の $r \in \mathbb{Z}$ と任意の Γ^e 加群 M に対して，restriction map $\mathrm{Res}^r : \widehat{H}^r(\Gamma, M) \longrightarrow \widehat{H}^r(\Lambda, M)$ を定義する．$p \geqslant 1$ に対しては，

$$H^p(\Gamma, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}(\Gamma, M)$$

は自然な写像

$$\mathrm{res}^p : \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}((X_\Gamma)_p, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}((X_\Gamma)_p, M)$$

から引き起こされる．また，$q \geqslant 1$ に対して，

$$H_q^\nu(\Gamma, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\nu\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}}(\Gamma, M)$$

が

$$\mathrm{res}_q : {}_{\nu^{-1}}(X_\Gamma)_q \otimes_{\Gamma^e} M \longrightarrow {}_{\nu^{-1}}(X_\Gamma)_q \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma^{\mathrm{opp}}} M;\ y\otimes x \mapsto \sum_{i=1}^m ya_i \otimes b_i x$$

から引き起こされる．ここで，

$$\mathrm{res}^0 = \iota_M : M \longrightarrow M$$
$$\mathrm{res}_0 : M \longrightarrow M; x \mapsto \sum_{i=1}^m b_i x a_i^\nu$$

とおくと，これらの res は Γ の complex から Λ の complex への chain map を与えることがわかり，結果として，

$$\mathrm{Res}^r : \widehat{H}^r(\Gamma, M) \longrightarrow \widehat{H}^r(\Lambda, M)$$

が得られる．

同様にして，cochain あるいは chain レベルでの map によって，

$$\mathrm{Cor}^r : \widehat{H}^r(\Lambda, M) \longrightarrow \widehat{H}^r(\Gamma, M)$$

が定義できる．なお，0 次元と -1 次元はそれぞれ

$$\mathrm{cor}^0 = N_{\Gamma/\Lambda} : M \longrightarrow M$$
$$\mathrm{cor}_0 = \iota_M : M \longrightarrow M$$

から引き起こされる．

このとき，

$$\mathrm{Cor}^r\mathrm{Res}^r(w) = N_{\Gamma/\Lambda}(1)w \ (w \in \widehat{H}^r(\Gamma, M), r \in \mathbb{Z})$$

が成立する．また，Res は cup 積を保存する．よって，環準同型 $\widehat{HH}^*(\Gamma) \longrightarrow \widehat{H}^*(\Lambda, \Gamma)$ が定義される．さらに，Λ-bimodule の埋め込み $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ を用いて，

$$\widehat{HH}^*(\Lambda) \longrightarrow \widehat{H}^*(\Lambda, \Gamma) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} \widehat{HH}^*(\Gamma)$$

が定義できる．0 次元を見ると，$Z\Lambda/N_\Lambda(\Lambda) \longrightarrow Z\Gamma/N_\Gamma(\Gamma) : \overline{z} \mapsto \overline{N_{\Gamma/\Lambda}(z)}$ である．

3 Hereditary orders の Hochschild コホモロジー

ここでは，hereditary order の Hochschild コホモロジーについて述べる．notation および基本的事実は [S4] に従うので，少し長くなるがその部分を §3.1 として引用する．

3.1 Maximal orders および hereditary orders (local case)

R を，π を素元とし，$R/(\pi)$ が有限体であるような完備離散付値環とする．K を R の商体とし，A を index $n \geqslant 1$ の central simple K-algebra とする．このとき，A は，ある division K-algebra D 上の行列環 $M_m(D)$ に同型となる．ここで，D は cyclic algebra $(W/K, \sigma, \pi) = \bigoplus_{i=0}^{n} W\Pi^i$, $\Pi^n = \pi$, に同型となる．ただし，W/K は Galois 群 $G = \langle\sigma\rangle$ をもつ次数 n の不分岐拡大である．いま，S を W の付値環とするとき，R-algebra $\Delta = \bigoplus_{i=0}^{n-1} S\Pi^i$ は D の一意的な maximal order となる．そして，$(\Pi) = \Delta\Pi = \Pi\Delta$ は Δ の一意的な極大両側 ideal である．

Maximal orders $A = M_m(D)$ のすべての maximal R-order は

$$\Lambda = M_m(\Delta) = \begin{bmatrix} \Delta & \cdots & \Delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta & \cdots & \Delta \end{bmatrix}$$

に同型となる．R-algebra Λ は R-algebra Δ に Morita equivalent なので，同型 $HH^*(\Lambda) \cong HH^*(\Delta)$ を得る．さて，Δ は次の周期的 projective resolution をもつことがわかっている ([S3]):

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Delta\delta_0\Delta \xrightarrow{\sigma} \Delta\delta_1\Delta \xrightarrow{\delta} \Delta\delta_0\Delta \xrightarrow{u} \Delta \to 0.$$

上で $\delta_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, $\delta_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\sigma} \otimes y_i$. ただし，$(x_i, y_i)_{i=1}^{n}$ は，$T_{W/K}(x_i y_i) = \delta_{i,j}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\tau} y_i = \delta_{\tau,1}$ を満たす，S の R-bases の pair とする．また，$u(1 \otimes 1) = 1$, $\delta(1 \otimes 1) = \Pi \otimes 1 - 1 \otimes \Pi$, $\sigma(1 \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i \otimes \Pi^{n-i-1}$ とおいた．これを用いて，$HH^*(\Delta) = R[x]/(\pi x)$, $\deg x = 2$, がわかる．なお，加群の構造については [B] で知られていた．

Hereditary orders A のすべての hereditary order は次の行列環に同型である:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\Delta) & \cdots & \cdots & (\Delta) \\ (\Pi) & (\Delta) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\Pi) & \cdots & (\Pi) & (\Delta) \end{bmatrix}^{\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}}.$$

ここで，invariants $\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ は対角線上のブロック行列のサイズを表す ($m = m_1 + \cdots + m_r$). r を type とよぶ．さて，type r をもつ hereditary order は type r, invariants $\{1, 1, \ldots, 1\}$ をもつ basic な hereditary order に Morita equivalent であることがわかる．従って，Hochschild cohomology は basic なものに限って考えればよい．ところで，basic な hereditary order は Frobenius 的なので，完備 Hochschild cohomology ring を構成することができ，それが 2 次の可逆元をもつことから，Hochschild cohomology は周期 2 であることがわかる ([S3]).

3.2 Hereditary order の周期 2 の resolution

前節で述べたように，type m, invariants $\{1, 1, \ldots, 1\}$ のbasic な hereditary order Λ に対して，その完備 Hochschild コホモロジー $\widehat{HH}^*(\Lambda)$ が 2 次の可逆元をもち，よってコホモロジーは周期 2 であることが示された ([S3]). そして実際に，$n = 1$ の場合には周期 2 の projective resolution も構成できた ([S5]). ここでは，一般の $n \geqslant 2$ の場合にも周期 2 の projective resolution が構成できる

ことをごく簡単に述べる．本節の内容は，東京理科大学理学研究科大学院の須田学さんとの共同研究によるものです．

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\Delta) & \cdots & \cdots & (\Delta) \\ (\Pi) & (\Delta) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\Pi) & \cdots & (\Pi) & (\Delta) \end{bmatrix}^{\{1,1,\dots,1\}} \qquad (\subset A = M_m(D)).$$

とする．

Λ^e 加群 $\Lambda \otimes \Lambda$ の直和因子として現われる 2 つの加群

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda E_i \delta_0 E_i \Lambda,$$
$$P_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda E_i \delta_1 E_{\overline{i-1}} \Lambda$$

を考える．ここで，E_i は Λ の行列単位 $E_{i,i}$ を表わし，$\overline{k}$ は，$\overline{k} \equiv k \mod m, 1 \leqslant \overline{k} \leqslant m$ なる整数とする．また，

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{m} (x_i E)^{\nu - k} \otimes y_i E \ (\in \Lambda \otimes \Lambda)$$

とおいた．ν は Frobenius R 多元環 Λ の Nakayama 自己同型とする．

定理 1 Λ は周期 2 の Λ^e-projective resolution をもつ：

$$\cdots \xrightarrow{\eta_0} P_1 \xrightarrow{\eta_1} P_0 \xrightarrow{\eta_0} P_1 \xrightarrow{\eta_1} P_0 \xrightarrow{\rho} \lambda \longrightarrow 0.$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\rho(E_i \delta_0 E_i) = E_i, \\ &\eta_1(E_i \delta_1 E_{\overline{i-1}}) = E_i (X \delta_0 - \delta_0 X) E_{\overline{i-1}}, \\ &\eta_0(E_i \delta_0 E_i) = E_i \left(\sum_{k=0}^{nm-1} X^k \delta_1 X^{nm-k-1} \right) E_i, \\ &\text{ただし，} X = \Pi E_{1,m} + E_{2,1} + \cdots + E_{m,m-1} \end{aligned}$$

とおいた ($E_{i,j}$ は A の行列単位)．

この resolution を用いて，Λ の Hochschild コホモロジー環の構造を得る：

定理 2 次数付き環としての同型：

$$HH^*(\Lambda) \cong R[x]/(\pi x), \quad \deg x = 2$$

が存在する．一般の type, invariant をもつ hereditary order についても同じ環構造である．

参考文献

[B] F. R. Bobovich, Cohomologies of maximal orders of simple central algebras, *Math. Notes* **6** (1969), 589–592

[Br] M. Broué, On Representations of Symmetric Algebras: An Introduction, *Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich* (1991)

[CE] H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra", *Princeton University Press, Princeton, NJ* (1956)

[EH] K. Erdmann and T. Holm, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, *Forum Math.* **11** (1999), 177–201

[EHS] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, II, *to appear*

[Mac] S. MacLane, "Homology", *Springer* (1963)

[Na] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, *Osaka Math. J.* **9** (1957), 165–187

[S1] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992),65–88

[S2] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992),89–106

[S3] K. Sanada, Hochschild cohomology of minimal hereditary orders, *J. Algebra* **176** (1995),786–805

[S4] 眞田克典, Hochschild cohomology of orders, 有限群のコホモロジー論の研究 (佐々木洋城, ed.), 数理解析研究所講究録 **1251**, 京都大学数理解析研究所, 2002, 37–41

[S5] S. Koenig, K. Sanada and N. Snashall, On Hochschild cohomology of orders, *Archiv der Mathematik* **81** (2003), 627–635

162-0827 東京都新宿区若宮町 26

東京理科大学理学部数学教室

E-mail: `sanada@rs.kagu.tus.ac.jp`