数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 80-83

A Remark on derived equivalences and perfect isometries

切刀直子 (Naoko Kunugi)
愛知教育大学・数学教育講座 (Aichi University of Education)

1 Introduction

$(K, \mathcal{O}, k)$ を十分大きな p-modular system とする。有限群 G, H に対し、A, B をそれぞれ G, H のブロックとする。A, B の間に derived equivalence があれば、A, B の間に perfect isometry が存在するが、逆は一般には成立しない (例えば、$p=2$ のとき、$\mathcal{O}D_8$ と $\mathcal{O}Q_8$ の間では perfect isometry が存在するが、derived equivalence は存在しない)。

ここでは、cyclic defect をもつ block の perfect isometry と derived equivalence について考えたい。Cyclic block については Brauer tree algebra であることから、いろいろな人によりいろいろなことが調べられている。ここでの話は、それらの結果から容易にわかるものばかりであると思う。

以下の話で使う Derived equivalence や perfect isometry の定義などの一般論は、Broué ([1], [2]), Rickard([6], [7], [8]), Roquier([10]) などの文献を参照していただきたい。

2 Example

まず、例を紹介する。

$G = Sz(8)$, $p = 5$ とする。$|G| = 29120$ であり、G の Sylow 5-部分群 P は 位数 5 の巡回群 C_5 となる。G には 位数 3 の巡回群 $S \cong C_3$ が作用していて、$H = C_G(S) = N_G(P) \cong C_5 \rtimes C_4$ である。

A を G の principal block とし、B を H の principal block とする。A, B の decomposition matrix は次の通りである。

	k	14_1	14_2	63
χ_1	1			
χ_{14_1}		1		
χ_{14_2}			1	
χ_{64}	1			1
χ_{91}		1	1	1

	1_a	1_b	1_c	1_d
θ_{1_a}	1			
θ_{1_b}		1		
θ_{1_c}			1	
θ_{1_d}				1
θ_4	1	1	1	1

これより A, B の Brauer tree がわかるが、ここでは省略する。Rouquier は cyclic block に対して、splendid tilting complex の構成を与えている ([9] を参照)。それにしたがって、この場合の splendid tilting complex を構成すると、

$$0 \longrightarrow P_{14_1} \otimes P_{1_c} \oplus P_{14_2} \otimes P_{1_b} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

となる。ただし、M は A を $k[G\times H]$-module としてみたときの唯一つの vertex $\Delta(P)$ の直既約因子である。この splendid tilting complex により誘導される perfect isometry は

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_{14_1} \\ \chi_{14_2} \\ \chi_{64} \\ \chi_{91} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \theta_{1_a} \\ -\theta_{1_b} \\ -\theta_{1_c} \\ \theta_4 \\ \theta_{1_d} \end{pmatrix}$$

となることが計算できる。

一方この設定では A と B の間の Glauberman 対応を考えることができ、次のような perfect isometry を与えていることが示されている (Watanabe [11] を参照)。

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_{14_1} \\ \chi_{14_2} \\ \chi_{64} \\ \chi_{91} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \theta_{1_a} \\ -\theta_{1_b} \\ -\theta_{1_d} \\ \theta_4 \\ \theta_{1_c} \end{pmatrix}$$

この perfect isometry を与えるような splendid tilting complex が存在するかどうか考えたい。実際、これは次の定理などを使うことにより、比較的容易に構成することができた。

Theorem 2.1 (Rickard[8]) *$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を symmetric k-algebra とする。$F:\mathrm{mod}\mathcal{A}\longrightarrow\mathrm{mod}\mathcal{B}$ を exact functor で、stable equivalence を導いているとする。$\{S_1,\cdots S_r\}$ を simple $\mathcal{A}$-module の全体とする。*

このとき、$F(S_1),\cdots,F(S_r)$ に stably isomorphic な complex $X_1,\cdots,X_r$ で、

(i) $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{mod}\mathcal{B})}(X_i,X_j)=\delta_{ij}$

(ii) $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{mod}\mathcal{B})}(X_i,X_j[m])=0$ *for* $m<0$

(iii) $X_1,\cdots,X_r$ は $D^b(\mathrm{mod}\mathcal{B})$ を生成

を満たすようなものが存在すれば、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は derived equivalent である。

ここでの例では、bimodule M により stable equivalence $F=-\otimes_B M^*$ が与えられている。$F(S)$ は S の Green 対応子に一致する。次のような complex を考える。

$$\begin{array}{lccccccccc}
X_a: & & & 0 & \to & k & \to & 0 & & \\
X_b: & 0 & \to & P_{14_1} & \to & F(1_b) & \to & 0 & & \\
X_c: & & & 0 & \to & F(1_c) & \to & 0 & & \\
X_d: & & & 0 & \to & F(1_d) & \to & P_{14_2} & \to & 0
\end{array}$$

これらの complex は simple B-module の F による像に stably isomorphic であり、Rickard の定理 (Theorem 2.1) の条件を満たしている。このとき、splendid tilting complex X で、$1_i\otimes_B X\cong X_i$ となるものが存在することもわかる (Holloway [3] 参照)。X は $\mathcal{O}$ の splendid tilting complex に lift でき、これにより誘導される perfect isometry が Glauberman 対応により与えられるものに一致する。

3 Remark

Cyclic block に対しては、次のことがわかる。

Remark 3.1 p を奇素数とし、A, B は共通の cyclic defect group D と共通の inertial group $E(\neq 1)$ を持つとする。このとき A と B の間の任意の perfect isometry に対し、splendid tilting complex X で、X の誘導する perfect isometry が non-exceptional character において I と一致するようなものが存在する。

Perfect isometry では必ず exceptional character は exceptional character に対応することと、Rouquier [9] により A, B はともに $\mathcal{O}[D \rtimes E]$ に splendid equivalent であることに注意すると、上の Remark は次のことからわかる。

Proposition 3.2 $C = k[D \rtimes E]$ とおく。C の *simple module* を $S_1, S_2, \cdots, S_e$ とし、S_i に対応する指標を χ_i とする。ただし、$S_{i+1} = \Omega^2 S_i$ とする。このとき、$1 \leq n < e$ に対し、

$$\begin{aligned} I(\chi_n) &= \chi_{n+1} \\ I(\chi_{n+1}) &= \chi_n \\ I(\chi) &= \chi \quad (\chi \neq \chi_n, \chi_{n+1}) \end{aligned}$$

なる *perfect isometry* I を誘導する *splendid tilting complex* X が存在する。

これに対しては、先ほどのように Rickard の定理 (Theorem 2.1) を満たす complex を見つけておけばよい。$1 \leq i \leq e$ に対して、complex X_i を

$$\begin{array}{lccccccccl} X_i: & & & & & 0 & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & 0 \quad (i \neq n, n+1) \\ X_n: & 0 & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{\psi_n} & P_n & \xrightarrow{\phi_n} & S_n & \longrightarrow & 0 \\ X_{n+1}: & & & 0 & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{(\psi_n, \phi_{n+1})} & P_n \oplus S_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

とする。ただし、

$$\begin{array}{ccccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\psi_n} & P_n & \xrightarrow{\phi_n} & S_n & \longrightarrow & 0 \\ & & P_{n+1} & \xrightarrow{\phi_{n+1}} & S_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

はともに minimal projective resolution であるとする。

$F = - \otimes_C C : \mathrm{mod}C \to \mathrm{mod}C$ は（自明な）stable equivalence を与えるが、上で定義した X_i は $F(S_i)$ と stably isomorphic であり、Rickard の定理の条件を満たしている。よって、splendid tilting complex X で、$S_i \otimes_C X \cong X_i$ となるものが存在することがわかる。X は $\mathcal{O}$ の splendid tilting complex に lift でき、これにより誘導される perfect isometry を計算すると、命題の主張のようになる。

Remark 3.3 exceptional character でのずれは（$\mathcal{O}$ 上の）derived equivalence により調整できるはずである ([5] などを参照)。

参考文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque **181-182** (1990), 61–92.

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Finite Dimensional Algebras and Related Topics, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, pp.1–26.

[3] M. Holloway, Broue's conjecture for the Hall-Janko group and its double cover Proc. London Math. Soc.,(3) 86 (2003), 109–130.

[4] M. Linckelmann, Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups, Math. Z., 223 (1996), 87-100.

[5] M. Linckelmann, On stable equivalences of Morita type. in "Derived equivalences for group rings" Springer Lecture Notes in Math. **1685**, (1998) 221–232

[6] J. Rickard, Morita theory for derived categories, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), 436–456.

[7] J. Rickard, Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. (3) 72 (1996), 331-358.

[8] J. Rickard, Equivalences of derived categories for symmetric algebras, J. Algebra, 257 (2002), 460–481.

[9] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, in "Derived equivalences for group rings" Springer Lecture Notes in Math. **1685**, (1998), 199–220.

[10] R.Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, in "Modular representation theory of finite groups" (Charlottesville, VA, 1998) pp.101–146, de Gruyter, Berlin, 2001

[11] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. Algebra 216 (1999), 548–565