数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 93-98

A remark on Glauberman-Watanabe corresponding blocks with a normal defect group

田阪　文規　千葉大学 自然科学研究科
e-mail ftasaka@g.math.s.chiba-u.ac.jp

有限群Gへ、Gの位数と素な可解群Sが作用している時、GのS-不変な既約指標と、GのSによる中心可群（G^Sと書く）の既約指標の間には、ある1対1対応（Glauberman対応）が存在することが知られていたが、[18]において、Sによりcentraliseされるdefect groupを持つという仮定のもとでは、その背後に、Brauer categoryが同値な(p-)blockの1対1対応（Watanabe対応）が存在する、ということが示された。実際、[18]において、Glauberman対応により、Watanabe対応するblocksの間に、isotypyが引き起こされることが示されているが、その後、この指標レベルの現象を環論的に説明するものとして、blocksがnormal defect groupを持つ場合には、対応するblocksは、（Glauberman対応を引き起こす[5]、trivial moduleをsourceとして持つbimoduleによりsplended[9][5]）Morita同値[10]、であることが示されている。(p-可解群の場合は[7][6]を参照。)

ここでは、Watanabe対応するblocksがnormal defect groupをもつとき、Glauberman対応を引き起こす、Morita同値を与えるbimoduleが、block algebraをbimoduleとしてみて、片側restriction、または、片側inductionして得られるbimoduleの直既約因子として得られる、ということを注意する。（Glauberman対応に関する基本的事実については[8]を、Puigの理論については、[17]を参照。）

以下、pを素数、$(\mathcal{O},K,k)$をp-modular systemで、完備離散付値環と、以下で考える群に対して分裂体となる標数0の商体と、標数pの代数閉体となる剰余体からなるものとする。

定理 1 (Glauberman[4]). 任意の組(G,S)（ここで、Gは有限群、SはGと位数が素な可解群でGの自己同型群の部分群であるもの）に対し、次の条件を満たす全単射$\pi(G,S)\colon \mathrm{Irr}(G)^S \to \mathrm{Irr}(G^S)$が存在する。

(1) TをSの正規部分群とするとき、$\pi(G,T)$は、$\mathrm{Irr}(G)^S$と$\mathrm{Irr}(G^T)^S$の間の全単射を与え、$\pi(G,S)=\pi(G^T,S/T)\circ\pi(G,T)$を満たす。

(2) Sが、ある素数qに対するq-群のとき、$\pi(G,S)(\chi)$は、χのG^Sへのrestrictionに現れる重複度がqと素な唯一の既約指標（実際、qを法として± 1。）。ここで、χはGのS-不変な既約指標。

定理１の対応を既約指標の Glauberman 対応という。

定理 2 (Watanabe[18]). G の S-不変な block b が、G^S に含まれる defect group P を持つとすると、次が成り立つ。

(1) b に属する G の既約指標は全て、S-不変。

(2) 次の条件を満たす G^S の block $w(b)$ が一意に定まる。: Glauberman 対応は、b に属する既約指標と $w(b)$ に属する既約指標の間の全単射。

(3) block $w(b)$ は P を defect group として持ち、b と $w(b)$ の Brauer category は同値。

(4) blocks b と $w(b)$ の間に perfect isometry（実際、より強く、isotypy）が存在する。

定理２（２）の対応を block の（Glauberman-）Watanabe 対応という。以下、G の p-部分群 P は、S により centralise される（「Watanabe's situation」）とする。また、有限群 G に、位数 q（G の位数と素なある素数）の巡回群 S が作用しているとして、statement を記す。(定理１ (1) より、始めの設定は、この設定に還元される。)

block algebra $\mathcal{O}Gb$ は、primitive interior G-algebra で、その defect multiplicity module V（$\overline{G}:=N_G(P_\gamma)/P$ 上の k 係数の twisted group algebra。ここで、P_γ は b の defect pointed group。）を $\overline{G}^S$ 上の twisted group algebra へ restriction すると、重複度が q と素な直既約因子（V' とする）が唯一つ存在する（重複度は q を法として ± 1）ことがいえる。実際、V は、simple projective なので、$\mathcal{O}$ 上の module に lift でき、K 係数の $\overline{G}$ 上の twisted group algebra 上の defect 0 の character が対応するが、それを $\overline{G}^S$ 上の twited group algebra に restriction すると、重複度が q と素（q を法として ± 1）なものが唯一つ現れ、それは、defect 0 の character であることが分かる。(適当な covering group を考え、Glauberman 対応を考える (cf.[6])。または、[3]。defect に関することは [2] を参照。）また、V（projevtive module）の G^S への restriction の V' 以外の直既約因子達の和（W とする）に対応する K 上の character の、各因子の重複度は q の倍数だが、k 上の twisted group algebra（k は代数閉体）の Cartan 行列の行列式は p べきであることと、q と p が素であることより、W の各直既約因子の重複度も q で割り切れることが従う。ここで、V' と Puig 対応する $\mathcal{O}Gb$ の pointed group を G^S_β とおき、β に属するべき等元 f に対し、$f\mathcal{O}Gbf$ と同

型な primitive interior G^S-algebra を $(\mathcal{O}Gb)_\beta$、$f\mathcal{O}Gb$ と同型な（直既約）$\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を M とおく。

上の記号のもと、次のことを示すことができる。

定理 3. G の S-不変な block b が、S により centralise される、normal な defect group P を持つとき、$(\mathcal{O}Gb)_\beta$ と $\mathcal{O}G^S w(b)$ は、primitive interior G^S-algebra として同型。

特に、

(1) b と $w(b)$ は、同型な source algebra を持つ。すなわち、b と $w(b)$ は、splendid Morita 同値 [9][5]。

(2) M は b と $w(b)$ の間の Morita 同値を与える。また、$\mathcal{O}Gb$-module の category から、$\mathcal{O}G^S$-module の category への restriction functor は、直既約因子に M が重複度 $qn \pm 1$ で現れ（n はある整数）、その他の直既約因子達の重複度が q の倍数であるような $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を $\mathcal{O}G$ 上 tensor する functor と同型。よって、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が存在する [5]。

次は、Green 対応より、normal defect の場合に還元でき、その場合、M は Morita 同値を引き起こす bimodule となることを利用する。すなわち、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times 1]$-module としての、また、M の $\mathcal{O}[G^S \times 1]$-module としての自己準同型環は、primitive interior G-algebra として $\mathcal{O}Gb$ と同型（Puig による Morita の定理の言い替え ([15]Prop.6.5)）なので、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times G^S]$-module としての、また、$M$ の $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module としての構造は、$\mathcal{O}Gb$ の G^S-不変な subalgebra における、b の分解の様子、よって、Puig 対応より、$\mathcal{O}Gb$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}^S$ へ restriction したときの様子から分かる。また、M の dual を $\mathcal{O}[G \times G]$-module に、また、$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module に induction した module の様子は、$\mathcal{O}G^S w(b)$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}$ へ induction した module の様子で分かる。(cf.[1])

系 4. b を G の S-不変な block で、S により centralise される defect group を持つものとする。このとき、直既約 $\mathcal{O}[G \times G]$-module$\mathcal{O}Gb$ を $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-加群に restriction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複度が q と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、q を法として 1）、それは、$\mathcal{O}G^S w(b)$ と同型。また、直既約 $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G \times G]$-加群に induction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複

度が q と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、q を法として1）、それは、$\mathcal{O}Gb$ と同型。

注意 5. normal defect group を持つ block algebra は、PE（ここで、P は defect group,E は inertial quotient）上の twisted group algebra と Morita 同値なので（[11][13]）、[10][5] では、Watanabe 対応している blocks の、対応する 2-cocycle を比べているが、ここでは、次のようにして source algebra の同型を得ている。すなわち、$i = i'f = fi'$（ここで、i は b の、i' は $w(b)$ のある source idempotent、f は β のある元）が normal defect group をもつときは成り立つので、f を両側からかけることにより、$w(b)$ の source algebra $i'\mathcal{O}G^Si'$ から、b の source algebra $i\mathcal{O}Gi$ への interior P-algebra hom. を得るが、normal defect group を持つ block の source algebra は、[17]Th.44.3 のような $\mathcal{O}$-basis をもつことから、これは同型になる。

注意 6. 定理３（２）の first と second statement より、M が Glauberman 対応（Brauer character でも）を引き起こすことは明らかだが、これは、Glauberman 対応の「sign」は block で共通であることは意味しているが、restriction で Glauberman 対応する character の重複度が M の重複度で出てくる、という主張ではない。

注意 7. [16][14] において、primitive interior G-algebra と、「G-triple」（defect group と"source algebra"と"defect multiplicity module"からなる。）の「ある同値類」の間に、１対１対応が存在することが示されている（微妙な論点が多いので [16][14] を参照して下さい。）が、定理３の上の statement は、S により centralise される defect group を持つ、S-不変な G の block algebra に対し、その「G-triple」の第３項を「Glauberman 対応」させた、「G^S-triple」（よって、対応する primitive interior G^S-algebra）を考えることができる、ということ。（他に、例えば、S-不変な simple kG-module の自己準同型環からなる primitive interior G-algebra に対しても、同様のことを考えることができる。）これは、G^S が defect group P の normalizer を含むときは、「primitive interior G-algebra の Green 対応」（$N_G(P)$ を含む群 H に対し、「G-triple」を「H-triple」とみて（P の G における normalizer と H における normalizer は等しい）対応を与えたもの [16]。加群の Green 対応は、（実質）Puig により、G-algebra の pointed groups の対応に一般化されていて（直既約 module の自己準同型環の「Green 対応」は Green 対応の自己準同型環）、block algebra の「Green 対応」は、block algebra とは限らないが、加群の Green 対応が、Morita 型の stable 同値

を与えていて、simple module が simple module と対応しているときは、Brauer 対応する block algebras が、「Green 対応」していることは、よく知られている。)。この対応で、block algebra は、block algebra と対応するとは限らないが、normal defect group を持つということが、Watanabe 対応する block algebras が、この対応関係にあることの、一つの十分条件になっている、というのが、定理 3 の first statement。

付記；本稿の作成にあたり、特に、北海道教育大学の奥山哲郎先生にお世話になりました。深く、感謝します。

参考文献

[1] L. Barker, Induction,restriction and G-algebras, Comm.algebra. **22** (1994), 6349–6383.

[2] E. C. Dade, Counting characters in blocks*II*, J. Reine Angew. Math. **448** (1994),97–190.

[3] E. C. Dade, A new approach to Glauberman's correspondence, J. Algebra **270** (2003), 583–628.

[4] G.Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. **20** (1968),1465–1488.

[5] M. E. Harris, Glauberman-Watanabe corresponding p-blocks of finite groups with normal defect groups are Morita equivalent, Trans.of the A. M. S.(2004)

[6] M. E. Harris and M. Linckelmann, On the Glauberman and Watanabe correspondences for blocks of finite p-solvable groups, Trans. of the A. M. S. **354**(9)(2002),3435–3453.

[7] H. Horimoto, A note on the Glauberman correspondence of p-blocks of finite p-solvable groups, Hokkkaido Math. J. **31** (2002), 255–259.

[8] I.M.Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press (1976).

[9] S. Koshitani, A remark on Glauberman-Watanabe correspondence of p-blocks of finite groups, preprint (2002)

[10] S.Koshitani and G.O.Michler, Glauberman correspondence of p-blocks of finite groups, J. Algebra **243** (2001),504–517.

[11] B. Külshammer, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm.Algebra **13** (1985),147–168.

[12] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176**(1981),265–292.

[13] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Alg. **116**(1988),7–129.

[14] L. Puig, On Thévenaz' parametrization of interior G-algebras, Math. Z. **215**,321–335.

[15] L. Puig, "On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks", Birkhauser (1999).

[16] Thévenaz, The parametrization of interior algebras, Math. z. **212** (1993), 411–454.

[17] Thévenaz, "G-Algebras and Modular Representation Theory", Oxford University Press (1995).

[18] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. algebra **216** (1999),548–565.