

On the complete relative cohomology of Frobenius extensions

野澤 武司 (Takeshi Nozawa)

長岡工業高等専門学校

Nagaoka National College of Technology

1. 序

$K$  を可換環とし、 $\Lambda$  が Frobenius  $K$ -algebra であるとき、[4] にあるように、complete cohomology  $H^r(\Lambda, -)$  ( $r \in \mathbf{Z}$ ) が定義される。これについては [4] や [6],[7] など研究されているが、少し一般化して、 $\Lambda$  がその部分環の Frobenius extension の場合はどうなるだろうか？この小文ではその場合について [5] で得られた結果を報告したい。

2. Complete relative cohomology

$K$  を可換環、 $\Lambda$  を  $K$ -algebra,  $\Gamma$  をその subalgebra とし、環の拡大  $\Lambda/\Gamma$  が Frobenius extension とする。 $P$  を enveloping algebra  $\Lambda \otimes_K \Lambda^\circ$  とし、自然な準同型写像  $\Gamma \otimes_K \Gamma^\circ \rightarrow \Lambda \otimes_K \Lambda^\circ$  の像を  $S$  とおくと、 $S$  は  $P$  の部分環になり、環の拡大  $P/S$  は Frobenius extension になる。 $\Lambda$  を左  $P$ -加群と見て、[2] で紹介されている  $\Lambda$  の complete  $(P, S)$ -resolution

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow X_s & \xrightarrow{d_s} & X_{s-1} & \rightarrow \dots & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{d_0} & X_{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \dots & \rightarrow X_{-s} & \xrightarrow{d_{-s}} & X_{-(s+1)} & \rightarrow \dots \\ & & & & & \varepsilon \searrow & & \nearrow \eta & & & & & & \\ & & & & & & \Lambda & & & & & & & \end{array}$$

をとる ( $\varepsilon$  は全射,  $\eta$  は単射の準同型写像である。 $\Lambda$  の complete  $(P, S)$ -resolution とはこのような形の各左  $P$ -加群  $X_r$  ( $r \in \mathbf{Z}$ ) が  $(P, S)$ -projective な  $(P, S)$ -exact sequence のことである)。  $M$  を左  $P$ -加群として、この complete  $(P, S)$ -resolution より chain complex

$$\dots \leftarrow \text{Hom}({}_P X_1, {}_P M) \xleftarrow{d_1^*} \text{Hom}({}_P X_0, {}_P M) \xleftarrow{d_0^*} \text{Hom}({}_P X_{-1}, {}_P M) \xleftarrow{d_{-1}^*} \dots$$

を得る。ただし、 $f \in \text{Hom}({}_P X_{r-1}, {}_P M)$  に対して、 $d_r^*(f) = f \circ d_r$  である。この chain complex より complete relative cohomology group を

$$H^r(\Lambda, \Gamma, M) = \text{Ker } d_{r+1}^* / \text{Im } d_r^* \quad (r \in \mathbf{Z})$$

により定義する。環  $\Lambda$  の中心を  $Z(\Lambda)$  とおくと、 $\text{Hom}({}_P X_r, {}_P M)$  が  $Z(\Lambda)$ -加群だから、 $H^r(\Lambda, \Gamma, M)$  も  $Z(\Lambda)$ -加群である。

環の拡大  $\Lambda/\Gamma$  は Frobenius extension なので、dual projective pair と呼ばれる  $\Lambda$  の元  $r_1, \dots, r_n, l_1, \dots, l_n$  と Frobenius homomorphism と呼ばれる両側  $\Gamma$ -準同型写像  $h \in \text{Hom}({}_\Gamma \Lambda_\Gamma, {}_\Gamma \Gamma_\Gamma)$  が存在し、任意の  $x \in \Lambda$  に対して、 $x = \sum_{i=1}^n h(xr_i)l_i = \sum_{i=1}^n r_i h(l_i x)$  となるが、このとき、次が成り立つ。

定理 1 ([5]) 任意の左  $P$ -加群  $M$  に対して、 $M^\Lambda = \{m \in M \mid xm = mx \text{ for all } x \in \Lambda\}$ ,  $M^\Gamma = \{m \in M \mid xm = mx \text{ for all } x \in \Gamma\}$ ,  $N_{\Lambda/\Gamma}(M) = \{\sum_{i=1}^n r_i m l_i \mid m \in M^\Gamma\}$  とおくと、同型

$$H^0(\Lambda, \Gamma, M) \simeq M^\Lambda / N_{\Lambda/\Gamma}(M)$$

が成り立つ。

この定理の証明は具体的な  $\Lambda$  の complete  $(P, S)$ -resolution から  $H^0(\Lambda, \Gamma, M)$  を構成することによって直ちに証明される。

## 2. Cup 積

[6] において、Frobenius algebra の complete cohomology に cup 積が定義されているが、Frobenius extension の complete relative cohomology についても次のように定義される。

定義 1 ([5])  $A, B$  を任意の左  $P$ -加群とし、 $r, s$  を任意の整数とする。任意の元  $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$ ,  $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$  に対して、元  $\alpha \cup \beta \in H^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$  が存在し、次の条件 (i) ~ (iv) を満たすとき、 $\cup$  を cup 積と言う。

(i)  $\cup$  は  $Z(\Lambda)$ -準同型写像

$$H^r(\Lambda, \Gamma, A) \otimes_{Z(\Lambda)} H^s(\Lambda, \Gamma, B) \xrightarrow{\cup} H^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$$

を引き起こす。

(ii)  $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$  を  $(P, S)$ -exact sequence とする。左  $P$ -加群  $B$  に対して、 $0 \rightarrow A_1 \otimes_\Lambda B \rightarrow A_2 \otimes_\Lambda B \rightarrow A_3 \otimes_\Lambda B \rightarrow 0$  が  $(P, S)$ -exact ならば任意の  $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A_3)$ ,  $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$  に対して、 $\partial(\alpha \cup \beta) = \partial(\alpha) \cup \beta$  が成り立つ。ただし、 $\partial$  は connecting homomorphism を表すものとする。

(iii)  $0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow 0$  を  $(P, S)$ -exact sequence とする。左  $P$ -加群  $A$  に対して、 $0 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_1 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_2 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_3 \rightarrow 0$  が  $(P, S)$ -exact ならば任意の  $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$ ,  $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B_3)$  に対して、 $\partial(\alpha \cup \beta) = (-1)^r \alpha \cup \partial(\beta)$  が成り立つ。ただし、 $\partial$  は connecting homomorphism を表すものとする。

(iv) 図式

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Lambda, \Gamma, A) \otimes_{Z(\Lambda)} H^0(\Lambda, \Gamma, B) & \xrightarrow{\cup} & H^0(\Lambda, \Gamma, A \otimes_{\Lambda} B) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(A) \otimes_{Z(\Lambda)} B^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(B) & \longrightarrow & (A \otimes_{\Lambda} B)^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(A \otimes_{\Lambda} B) \end{array}$$

は可換である。ここで、縦方向の同型写像は定理1の同型写像であり、最下行の準同型写像は

$$(a + N_{\Lambda/\Gamma}(A)) \otimes (b + N_{\Lambda/\Gamma}(B)) \rightarrow a \otimes b + N_{\Lambda/\Gamma}(A \otimes_{\Lambda} B)$$

によって与えられる。

[5] では、[1, p.140] と同様に  $\Lambda$  の complete  $(P, S)$ -resolution  $X$  に diagonal approximation  $\Delta : X \rightarrow X \otimes_{\Lambda} X$  が存在することを帰納法で示し、それを使って cup 積の存在を示している。そして、この cup 積は次の性質を持つ。

定理2 ([5](anti-commutativity))  $M$  を左  $P$ -加群とするとき、任意の  $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, \Lambda)$ ,  $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, M)$  に対して、 $\alpha \cup \beta = (-1)^{rs} \beta \cup \alpha$  が成り立つ。

定理3 ([5](associativity))  $A, B, C$  を左  $P$ -加群とするとき、任意の  $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$ ,  $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$ ,  $\gamma \in H^t(\Lambda, \Gamma, C)$  に対して、 $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$  が成り立つ。

これらの定義・定理によって直和  $\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H^r(\Lambda, \Gamma, \Lambda)$  は環になる。

### 3. Complete relative cohomology の準同型写像

この章以降では前2章のように  $\Lambda$  が可換環  $K$  上の algebra,  $\Gamma$  がその subalgebra で、環の拡大  $\Lambda/\Gamma$  が Frobenius extension である前提に加えて、環の拡大  $\Gamma/K$  も Frobenius extension であると仮定する。 $\Lambda/\Gamma, \Gamma/K$  が Frobenius extension であるので、 $\Lambda/K$  も Frobenius extension である。よって、左  $P$ -加群  $M$  に対して、 $H^r(\Lambda, K, M)$  が  $\Lambda$  の complete  $(P, K)$ -resolution  $Y$  より得られる。また、左  $S$ -加群  $M$  に対して、 $H^r(\Gamma, K, M)$  が  $\Gamma$  の complete  $(S, K)$ -resolution  $Z$  より得られる。 $(\Gamma/K$  が Frobenius extension であるので、 $S = \text{Im}(\Gamma \otimes_K \Gamma^{\circ} \rightarrow \Lambda \otimes_K \Lambda^{\circ}) \simeq \Gamma \otimes_K \Gamma^{\circ}$  である) ところで、 $Q = \Gamma \otimes_K \Lambda^{\circ}$  とおくと、 $Q$  は自然な準同型写像  $\Gamma \otimes_K \Lambda^{\circ} \rightarrow \Lambda \otimes_K \Lambda^{\circ} (= P)$  が単射であるので、 $P$  の部分環と見なせるが、 $Y$  と  $Z \otimes_{\Gamma} \Lambda$  がともに  $\Lambda$  の complete  $(Q, K)$ -resolution になるため左  $P$ -加群  $M$  に対して、同型

$$H^r(\text{Hom}(QY, QM)) \simeq H^r(\text{Hom}(QZ \otimes_{\Gamma} \Lambda, QM))$$

が成り立つ。また、同型  $\text{Hom}(QZ_r \otimes_{\Gamma} \Lambda, QM) \simeq \text{Hom}(S Z_r, S \text{Hom}(\Lambda_{\Lambda}, M_{\Lambda})) \simeq \text{Hom}(S Z_r, S M)$  より

同型

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Z \otimes_{\Gamma} \Lambda, {}_Q M)) \simeq H^r(\Gamma, K, M)$$

を得るが、この2つを合成して、同型

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M)) \simeq H^r(\Gamma, K, M)$$

が成り立つ。そして、自然な準同型写像  $\text{Hom}({}_P Y_r, {}_P M) \rightarrow \text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M)$  より引き起こされる準同型写像

$$H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M))$$

と合成して、restriction homomorphism

$$\text{Res}^r : H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\Gamma, K, M) \quad (r \in \mathbf{Z})$$

を得る。また、上の同型

$$H^r(\Gamma, K, M) \simeq H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M))$$

を準同型写像  $\text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M) \rightarrow \text{Hom}({}_P Y_r, {}_P M)$  ( $f \in \text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M)$  に対し

て  $f \rightarrow [y \rightarrow \sum_i^n r_i f(l_i y)]$ ) によって引き起こされる準同型写像

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M)) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M)$$

と合成して、corestriction homomorphism

$$\text{Cor}^r : H^r(\Gamma, K, M) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M) \quad (r \in \mathbf{Z})$$

を得る。

$\Lambda$  の complete  $(P, K)$ -resolution  $Y$  の各左  $P$ -加群  $Y_r$  は  $(P, K)$ -projective であるが、環の拡大  $P/K$  は Frobenius extension となるので、 $(P, K)$ -injective でもある。よって、 $Y$  は  $\Lambda$  の  $(P, K)$ -projective resolution と  $(P, K)$ -injective resolution をつなげて1つにしたものとみなせる。したがって、 $\Lambda$  の identity homomorphism が準同型写像

$$\text{Inf}^r : H^r(\Lambda, \Gamma, M) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M) \quad r \geq 1$$

および

$$\text{Def}^r : H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\Lambda, \Gamma, M) \quad r \leq -1$$

を引き起こす。(それぞれ inflation homomorphism, deflation homomorphism と呼ぶ) また、定理1の同型により、 $H^0(\Lambda, K, M)$  と  $M^\Lambda/N_{\Lambda/K}(M)$ ,  $H^0(\Lambda, \Gamma, M)$  と  $M^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(M)$  を同一視すると準同型写像  $H^0(\Lambda, K, M) \rightarrow H^0(\Lambda, \Gamma, M)$  ( $m + N_{\Lambda/K}(M) \in H^0(\Lambda, K, M)$  に対して、 $m + N_{\Lambda/\Gamma}(M) \rightarrow m + N_{\Lambda/\Gamma}(M)$ ) が存在

するので、これを  $\text{Def}^0$  と定義する。

上に述べた4つの準同型写像  $\text{Res}^r$ ,  $\text{Cor}^r$ ,  $\text{Inf}^r$ ,  $\text{Def}^r$  の間には次のような関係がある。

定理4 ([5])  $N$  を左  $P$ -加群とし、左  $P$ -加群  $N^i$  ( $i \geq 0$ ) を  $N^0 = N$ ,  $N^i = \text{Hom}({}_Q P, {}_Q N^{i-1})$  ( $i \geq 1$ ) と帰納的に定義すると、 $r \geq 1$  に対して  $H^n(\Gamma, K, N^{r-n}) = 0$  ( $0 < n < r$ ) ならば、

$$0 \rightarrow H^r(\Lambda, \Gamma, N) \xrightarrow{\text{Inf}^r} H^r(\Lambda, K, N) \xrightarrow{\text{Res}^r} H^r(\Gamma, K, N)$$

は完全である。

定理5 ([5])  $M$  を左  $P$ -加群とし、左  $P$ -加群  $M_i$  ( $i \geq 0$ ) を  $M_0 = M$ ,  $M_i = P \otimes_Q M_{i-1}$  ( $i \geq 1$ ) と帰納的に定義すると、 $r \geq 0$  に対して  $H^{-n}(\Gamma, K, M_{r-n}) = 0$  ( $0 \leq n \leq r-1$ ) ならば、

$$0 \leftarrow H^{-r}(\Lambda, \Gamma, M) \xleftarrow{\text{Def}^{-r}} H^{-r}(\Lambda, K, M) \xleftarrow{\text{Cor}^{-r}} H^{-r}(\Gamma, K, M)$$

は完全である。

定理4の証明は[3]による。定理5の証明は  $r = 0$  の場合を証明し、帰納法により他の場合が証明される。

#### 4. Cup 積と Complete relative cohomology の準同型写像

先の章で述べた  $\text{Res}^r$  と cup 積の関係については[7]で述べられている。[5]では cup 積と  $\text{Inf}^r$ ,  $\text{Def}^r$  の間に次のような関係があることを示している。

命題1 ([5])  $A, B$  を左  $P$ -加群とし、 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  をそれぞれ  $H^r(\Lambda, \Gamma, A)$ ,  $H^s(\Lambda, \Gamma, B)$ ,  $H^r(\Lambda, K, A)$ ,  $H^s(\Lambda, K, B)$  の元とするとき次の等式が成り立つ。

- (1)  $\text{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \beta) = \text{Inf}^r(\alpha) \cup \text{Inf}^s(\beta)$  ( $r \geq 1, s \geq 1$ )
- (2)  $\text{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \beta') = \text{Def}^r(\alpha') \cup \text{Def}^s(\beta')$  ( $r \leq 0, s \leq 0$ )
- (3)  $\text{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \text{Inf}^s(\beta)) = \text{Def}^r(\alpha') \cup \beta$  ( $r < 0, s \geq 1, r+s \leq 0$ )
- (4)  $\text{Def}^{r+s}(\text{Inf}^r(\alpha) \cup \beta') = \alpha \cup \text{Def}^s(\beta')$  ( $r \geq 1, s < 0, r+s \leq 0$ )
- (5)  $\text{Inf}^{r+s}(\text{Def}^r(\alpha') \cup \beta) = \alpha' \cup \text{Inf}^s(\beta)$  ( $r \leq 0, s \geq 1, r+s \geq 1$ )
- (6)  $\text{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \text{Def}^s(\beta')) = \text{Inf}^r(\alpha) \cup \beta'$  ( $r \geq 1, s \leq 0, r+s \geq 1$ )

この命題の証明は具体的な  $\Lambda$  の complete  $(P, S)$ -resolution と complete  $(P, K)$ -resolution を用いて  $\text{Inf}^r$  と  $\text{Def}^r$  を具体的に与えることと、帰納法を使うことによってすべての  $r, s$  について証明している。

### References

- [1] K.S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] R. Farnsteiner, On the cohomology of ring extensions, Advances in Math. 87(1991), 42–70.
- [3] A. Hattori, On fundamental exact sequences, J. Math. Soc. Jap. 12(1960), 65–80.
- [4] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, Osaka Math. J. 9(1957), 165–187.
- [5] T. Nozawa, On the complete relative cohomology of Frobenius extensions, Tsukuba J. Math. 17(1993), 99–113.
- [6] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 65–88.
- [7] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 89–106.