

# 空間形問題とその tangential 化について

## On space form problem and its tangential version

京都大学 数理解析研究所 吉野 太郎 (Taro Yoshino)  
 Research Institute for Mathematical Sciences,  
 Kyoto University

### 1 導入

$n$ 次元球面  $S^n$  は完備で正の定曲率を持つコンパクトなリーマン多様体である。 $S^n$  の (ある種の) 擬リーマン化がいつ存在するか考えてみよう。

**問題 1 (空間形問題).** 完備で正の定曲率を持つコンパクトな符号  $(p, q)$  の擬リーマン多様体はいつ存在するか?

この問題に対する部分的な答えとして次が知られている。

**事実 2.**  $(p, q)$  が以下の表に含まれるときは存在する。

$p$	N	0	1	3	7
$q$	0	N	2N	4N	8

Table 1

上の結果は  $p = 1, 3$  の場合は Kulkarni [Ku81] によって、 $(p, q) = (7, 8)$  の場合は小林 [Ko96] によって証明された。一方、事実 2 の逆は証明されていないが、次のように予想されている。

**予想 3 (空間形予想; [Ko01]).**  $(p, q)$  が Table 1 に含まれないときは存在しない。

正の定曲率を持った擬リーマン多様体を球空間形と呼ぶ (定義 5)。問題 1 は、完備でコンパクトな球空間形の存在を問う問題であり、空間形問題と呼ばれている。

空間形問題、及びその tangential 化がこの話の主題である。‘tangential 空間形’の正確な定義は後で述べることにし、先に主結果を見ることにしよう。

主定理 4 ([KoY05]). 完備でコンパクトな符号  $(p, q)$  の tangential 空間形が存在する必要十分条件は次の不等式で与えられる:

$$p < \rho(q). \quad (1)$$

ここで  $\rho(q)$  は  $q$  の Hurwitz-Radon 数であり、 $q = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$  ( $u$  は奇数、 $\beta \leq 3$ ) に対して

$$\rho(q) := 8\alpha + 2^\beta \quad (2)$$

と定義される (但し  $\rho(0) := \infty$  とする)。 $q$  を奇数倍しても  $\rho(q)$  の値は変わらないので、 $q$  が 2 の巾のときの  $\rho(q)$  の値を見ておこう。

$\rho(q)$	1	2	4	8	9	10	12	16	17	18	20	24	25	...
$q$	1	2	4	8	16	32	64	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$	...

Table 2

これより (1) を満たす  $(p, q)$  を具体的に書き下すと次の様になる。

$p$	N	0	1	2, 3	4...7	8	9	...
$q$	0	N	2N	4N	8N	16N	32N	...

Table 3

空間形問題とその tangential 化を結びつける一般論は今のところ見つかっていないものの、その答え (Table 1、Table 3) は比較的似ている。そのため著者は、空間形問題とその tangential 化の関係を調べることで、今後、空間形問題の解決に向けて前進できるのではないかと期待している。

この講義録では主に空間形問題とその tangential 化について見てゆく。2 節では空間形問題について定式化し、Clifford-Klein 形の言葉を用いた表現に書き換える。3 節では空間形問題の tangential 化を定式化し、もとの空間形問題との関連について考察する。また、空間形以外の問題について二例、元の問題とその tangential 化について比較する。4 節では定理の証明を行う。

## 2 空間形問題

‘tangential 化’の話は後回しにして、この節ではまず空間形問題について考えていこう。

### 2.1 一般の空間形問題

最初に空間形を定義する。

**定義 5.** 定曲率の擬リーマン多様体を空間形 (space form) という。特に、曲率が正の場合は球空間形 (spherical space form) という。

従って問題 1 は「完備でコンパクトな球空間形」の存在問題であると言える。この問題の動機は「コンパクトな球空間形」の部分であり、完備性は問題を簡単にするための技術的な条件である。実際、 $\min(p, q) \leq 1$  の場合には完備性がコンパクト性から導かれる事が知られている ([KI96])。

問題 1 は曲率が正の空間形を扱っている。同じようにコンパクトな空間形の存在問題を曲率が 0 あるいは負の場合にも考えることも出来る。しかし、これらを新しい問題として定式化しても、さほど意味は無い。実際、曲率が 0 のコンパクトで完備な空間形は常に存在し ( $\mathbb{R}^{p+q}$  に自然に符号  $(p, q)$  の擬リーマン計量を定めると、商空間  $\mathbb{Z}^{p+q} \backslash \mathbb{R}^{p+q}$  は符号  $(p, q)$  のトーラスとなる)、符号  $(p, q)$  のコンパクトで完備な負曲率空間形の存在は、符号  $(q, p)$  のコンパクトで完備な正曲率の空間形の存在に帰着される (擬リーマン計量の定義  $ds^2 = dx_1^2 + \dots$  を  $ds^2 = -(dx_1^2 + \dots)$  に置き換えれば良い)。即ち、一般の空間形問題を考えるにあたって、曲率が正あるいは負のどちらか一方の場合のみを扱えば十分である。

これ以降は、曲率正の空間形、即ち球空間形について考える。このとき、計量を適当にスカラー倍することで曲率は 1 であるとして一般性を失わない。

## 2.2 Clifford-Klein 形

曲率 1 の完備でコンパクトな空間形の存在は“コンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題”として定式化することが出来る。2.3 節、2.4 節において、問題 1 を少しずつ変形し最終的にコンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題に帰着される様子を見てゆく。ただし、目標を見失わないよう変形の最終的な形 (問題 7) を先に見ておくことにしよう。空間形問題の tangential 化は、この最終的な形に対して自然に定義される。

まず、Clifford-Klein 形を定義する。 $G$  をリー群とし、 $H$  を閉部分群とする。 $G$  の離散部分群  $\Gamma$  が等質空間  $G/H$  に固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき商写像

$$\omega : G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$$

は被覆写像となり、 $\omega$  が局所微分同相写像となるように商空間  $\Gamma \backslash G/H$  に多様体の構造を入れることが出来る。

**定義 6.** 上の多様体  $\Gamma \backslash G/H$  を等質空間  $G/H$  の Clifford-Klein 形という。

Clifford-Klein 形の言葉を用いると問題 1 は、次のように言い替えることが出来る。

**問題 7.** 等質空間  $O(p+1, q)/O(p, q)$  のコンパクトな Clifford-Klein 形はいつ存在するか?

この節の残りの部分で、問題 1 を少しずつ変形し、最終的に問題 7 の形に至る様子を見ていく。

### 2.3 余コンパクトな離散群の存在問題

まず初めに、問題 1 をある離散群の存在問題に帰着しよう。

コンパクト性を仮定しなければ、完備で曲率 1 の空間形は常に存在する。実際、これは次のように具体的に構成できる： $\mathbb{R}^{p+q+1}$  に自然に符号  $(p+1, q)$  の擬リーマン計量を定め、 $\mathbb{R}^{p+q+1}$  の超平面  $X(p, q)$  を次で定める。

$$X(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} : x_1^2 + \cdots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q+1}^2 = 1\}. \quad (3)$$

このとき：

**命題 8.**  $X(p, q)$  は完備で曲率 1 の擬リーマン多様体である。従って、特に完備な球空間形である。また、 $X(p, q)$  は  $p \geq 2$  ならば連結かつ単連結である。

次の事実は、任意の完備な球空間形が  $X(p, q)$  に局所微分同相である事を意味する。

**事実 9 ([W84]).**  $M$  を曲率 1 の完備で連結な符号  $(p, q)$  の球空間形とする。 $M$  の普遍被覆多様体  $\tilde{M}$  は、以下のものと同型である。

$$\tilde{M} \simeq \begin{cases} X(p, q) & (p \geq 2 \text{ のとき}), \\ \tilde{X}(1, q) & (p = 1 \text{ のとき}), \\ X_0(0, q) & (p = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

但し  $\tilde{X}(1, q)$  は  $X(1, q)$  の普遍被覆多様体、 $X_0(0, q)$  は  $X(0, q)$  の  $(1, 0, \dots, 0)$  を含む連結成分とする。

以下、簡単のために  $p \geq 2$  の場合のみを考える ( $p = 0, 1$  の場合には、事実 9 に基づいて  $X(p, q)$  を  $\tilde{X}(1, q)$  や  $X_0(0, q)$  に読みかえれば良い)。

事実 9 より、曲率 1 の完備で連結な球空間形  $M$  は、基本群  $\Gamma := \pi_1(M)$  によって、 $M \simeq \Gamma \backslash X(p, q)$  と書ける事が分かる。これより、問題 1 は次のように言い替えることが出来る。

**問題 10.**  $X(p, q)$  に作用する離散群  $\Gamma$  で次の条件を満たすものはいつ存在するか？

- (a)  $\Gamma$  は  $X(p, q)$  に固有不連続かつ固定点自由に作用する。
- (b)  $\Gamma$  は  $X(p, q)$  の擬リーマン計量を保つ。
- (c)  $\Gamma \backslash X(p, q)$  はコンパクトである。

**注意 11.** 条件 (a) に関しては、一般の多様体  $M$  に対し、基本群  $\pi_1(M)$  の普遍被覆多様体  $\tilde{M}$  への作用は固有不連続かつ固定点自由であることに注意。逆に、多様体  $X$  に離散群  $\Gamma$  が固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき商写像

$$\varpi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$$

は被覆写像となり、 $\omega$  が局所微分同相写像となるように  $\Gamma \backslash X$  に多様体の構造を定めることが出来る。

条件 (b) は、商多様体  $\Gamma \backslash X(p, q)$  が擬リーマン計量を持ち、被覆写像  $\omega$  が擬等長写像となるために必要かつ十分な条件である。

## 2.4 $O(p+1, q)$ の離散部分群の存在問題

問題 10 をさらに言い替えよう。

$G$  を不定値直交群  $G := O(p+1, q)$  とし、 $X(p, q)$  を (3) で定めた超平面とする。このとき、 $G$  は  $X(p, q)$  に擬リーマン計量を保って作用する。また逆に、 $X(p, q)$  上の擬リーマン計量を保つ変換は  $G$  に属する。従って、問題 10 の条件 (b) は  $\Gamma \subset G$  と言い替えることが出来る。

一方、 $G$  は  $X(p, q)$  に推移的に作用する。従って  $X(p, q)$  は等質空間であり、一点  $x$  (例えば  $x = (1, 0, \dots, 0)$ ) を固定する  $G$  の部分群  $H := G_x$  を用いて、 $X(p, q) \simeq G/H$  と書くことができる。

以上より、問題 10 の言い替えとして次を得る。

問題 12.  $(G, H) = (O(p+1, q), O(p, q))$  とする。次の条件を満たす  $G$  の離散部分群  $\Gamma$  はいつ存在するか?

- (a)  $\Gamma$  は等質空間  $G/H$  に固有不連続かつ固定点自由に作用する。
- (b)  $\Gamma \backslash G/H$  はコンパクトである。

この問題を Clifford-Klein 形の言葉を用いて書き換えたものが、問題 7 に他ならない。(但し、 $p=1$  の場合には  $G = \tilde{O}(2, q)$  と考える。)

## 3 Tangential 化

この節では、等質空間  $G/H := O(p+1, q)/O(p, q)$  に対し、その tangential 等質空間  $G_\theta/H_\theta$  を定義する。

問題 7 (あるいは問題 1) は  $G/H$  のコンパクトな Clifford-Klein 形の存在を問う問題であった。その tangential 化を「 $G_\theta/H_\theta$  のコンパクトな Clifford-Klein 形を問う問題」として定式化する。

### 3.1 簡約型等質空間の tangential 化

問題 7 において  $G = O(p+1, q)$  は簡約リー群であり、 $H = O(p, q)$  はその簡約部分群である。このような簡約リー群  $G$  とその簡約部分群  $H$  に対し、その等質空間  $G/H$  を

簡約型等質空間という。ここでは一般の簡約型等質空間  $G/H$  に対し、その tangential 化  $G_\theta/H_\theta$  を定義しよう。

$G$  を簡約リー群とし  $\theta$  をそのカルタン対合とする。このとき、 $G$  のリー環  $\mathfrak{g}$  は  $\theta$  に応じて  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  とカルタン分解する。

$\mathfrak{k}$  をリー環とする  $G$  の解析的部分群  $K$  は、 $\mathfrak{p}$  に Adjoint として作用する。 $K$  と  $\mathfrak{p}$  の半直積群

$$G_\theta := K \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{p}$$

を  $G$  のカルタン運動群という。このとき  $G$  と  $G_\theta$  は微分同相写像

$$\Phi_\theta : G \rightarrow G_\theta, \quad e^X k \mapsto (k, X)$$

を通じて多様体として同型となるが、一般にリー群としては同型でなく、最早  $G_\theta$  は簡約リー群ではない。

大まかに言えば簡約型等質空間  $G/H$  に対して、 $G_\theta/H_\theta$  をその tangential 等質空間という。より正確には、次のように構成する。

$G/H$  を簡約型等質空間とする。適当な  $g \in G$  を取ることで  $gHg^{-1}$  を  $\theta$  不変な部分群にできるので、以下では  $H$  を始めから  $\theta$  不変とする。このとき、 $(\Phi_\theta$  は群準同型写像でないにもかかわらず)  $\Phi_\theta(H)$  は  $G_\theta$  の閉部分群となり、さらに  $H$  のカルタン運動群  $H_\theta$  と自然に同型となる ( $H_\theta \xrightarrow{\sim} \Phi_\theta(H) \subset G_\theta$ )。この同型を通じて  $H_\theta$  を  $G_\theta$  の部分群と見なすと、等質空間  $G_\theta/H_\theta$  を考えることができる。

**定義 13.** 上のように構成した  $G_\theta/H_\theta$  を  $G/H$  の tangential 等質空間という。特に、 $G/H$  が対称空間の場合、 $G_\theta/H_\theta$  もまた対称空間となる。このとき  $G_\theta/H_\theta$  を  $G/H$  の tangential 対称空間ともいう。また  $G/H$  が球空間形、つまり  $O(p+1, q)/O(p, q)$  のとき、その tangential 対称空間を tangential 空間形という。

### 3.2 コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題の tangential 化

等質空間  $G/H$  を一つ選んだとき、そのコンパクト Clifford-Klein 形の存在を問うことが出来る。この問題に対し、 $G_\theta/H_\theta$  のコンパクト Clifford-Klein 形の存在を問う事を (問題の) ‘tangential 化’ という。

tangential 化することで問題が (比較的) 簡単になることが経験的に分かっている。また、現在知られている限り、両者のコンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在に関する結果は一致している。即ち、

$G/H$  にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する

$$\iff G_\theta/H_\theta \text{ にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する}$$

という命題は (どちら向きの implication も証明されていないが) 今までのところ反例も見つかっていない。

従って、問題の tangential 化は、元の問題に対する「良い近似」であると考えることが出来る。

最も簡単な例として、リーマン対称空間  $G/K$  を考えよう。つまり、 $G$  を簡約型リー群とし、 $K$  をその極大コンパクト群とする。このとき、リーマン対称空間  $G/K$  は  $P := \exp(\mathfrak{p})$  と自然に同型であり、tangential 対称空間  $G_\theta/K_\theta$  は  $\mathfrak{p}$  と自然に同型となる (この辺りが tangential 化と名付けた「気持ち」である)。

Borel [Br63] によると、 $G/K$  は常にコンパクト Clifford-Klein 形を持つ。つまり、 $\Gamma \backslash G/K$  がコンパクト多様体となるような、離散部分群  $\Gamma \subset G$  が存在する。

一方、これを tangential 化した問題は殆ど自明である。実際、 $G_\theta/K_\theta \simeq \mathfrak{p}$  は線形空間であるから、 $\mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^n$  の余コンパクトな離散群として  $\mathbb{Z}^n$  を選べば良い ( $\mathfrak{p}$  は  $G_\theta$  の閉部分群であるから、 $\mathbb{Z}^n$  は  $G_\theta$  の離散部分群である)。

いま、 $G/K \simeq P$  と  $G_\theta/K_\theta \simeq \mathfrak{p}$  は、多様体としては同型、つまり  $\exp: \mathfrak{p} \rightarrow P$  を通じて微分同相である事に注意しよう。しかし、考えている幾何構造が異なるため、許容される離散群が異なる (一方では  $G$  の離散部分群、他方では  $G_\theta$  の離散部分群でなければならない)。従って、一方の離散群から  $\Phi_\theta$  や  $\exp$  を通じて他方の離散群が得られる訳ではなく、 $\Gamma$  と  $\mathbb{Z}^n$  はいわば「それぞれ独立に存在している」と言える。

この事情は、一般の等質空間においても同様である。すなわち、 $G/H$  と  $G_\theta/H_\theta$  は多様体としては同型である。しかし、許容される離散群は異なり、両者のコンパクト Clifford-Klein 形の存在を直接結びつける一般論は (今のところ) 存在しない。

### 3.3 Tangential 空間形問題

以上の一般論を空間形問題に適用することで、tangential 空間形問題を考えることが出来る。そして、主定理 4 はその解を完全に与えている。

Section 3.2 の初めに見たように、現在証明されている結果に限れば、 $G/H$  と  $G_\theta/H_\theta$  それぞれのコンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在は一致している。

実際、空間形問題についても存在しないことが実際に確かめられているのは次の結果のみであり、これは主定理 4 の結果に反していない。

**事実 14** ([W84], [Be96], [KoO90]).  $(p, q)$  が次の条件のいずれかを満たすならば、符号  $(p, q)$  の完備でコンパクトな空間形は存在しない。

- (a)  $p \geq q > 0$ .
- (b)  $p + 1 = q$  is odd.
- (c)  $pq$  is odd.

一方、まだ分かっていない部分、すなわち予想の部分にまで視野を広げると、元の空間形予想 (予想 3) と、その tangential 化の解 (主定理 4) は異なっている。従って、「予

想 3 に反例が発見される」か、あるいは「元のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題とその tangential 化の間に不一致が発見される」のか、どちらに決着が付くか興味深い。また、tangential 化の解が元の問題を解く手がかりを与えるかもしれないと期待している。

### 3.4 その他の等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形とその tangential 化

コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題とその tangential 化を別の等質空間に付いても考えてみよう。ここでは、等質空間  $G/H = O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  と  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  を考える。どちらも等質空間  $G/H$  のコンパクト Clifford-Klein 形が存在する必要十分条件は決定できていないものの、その tangential 化については必要十分条件を決定できている。まず、簡約型等質空間に関する予想及び事実から見ていこう。

**予想 15 ([KoY05]).** 対称空間  $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ為の必要十分条件は  $n = 1, 3, 7$  である。

この予想に関し、 $n = 1, 3, 7$  の場合にはコンパクト Clifford-Klein 形が存在することが既に分かっている。また逆に、 $n \geq 2$  かつ  $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$  の場合にコンパクト Clifford-Klein 形が存在しないことも分かっている。

**事実 16 ([Ko96]).** 等質空間  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  は  $n = 1, 3$  のときコンパクト Clifford-Klein 形を持つ。

これらの tangential 化に対する解は次で与えられる。

**定理 17.**  $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  の tangential 対称空間のコンパクト Clifford-Klein 形が存在する必要十分条件は  $n = 1, 3, 7$  である。

**定理 18.**  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  の tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形が存在する必要十分条件は  $n = 1, 3$  である。

空間形問題のときと異なり、予想 15 と定理 17 および事実 16 と定理 18 は、コンパクト Clifford-Klein 形の存在条件が一致している。そのため予想 15 については、正しいと言える「証拠」が一つ増えたと言え、また事実 16 については、他の  $n$  に対してはコンパクト Clifford-Klein 形が存在しなそうだと「推測」できる。

## 4 証明

この節で定理 4、定理 17、定理 18 を証明する。証明はどれも同じ手順で進み、その流れは次の様になる。



$G_\theta/H_\theta$  にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する

$\xLeftrightarrow{4.1}$   $\mathfrak{p}$  にある部分空間  $W$  が存在する

$\xLeftrightarrow{4.2}$  nonsingular な線形写像  $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathfrak{p}$  が存在する

$\xLeftrightarrow{4.4}$   $n$  や  $(p, q)$  に関する具体的な条件

つまり、コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を段階的に、より簡単な問題に帰着させ最終的に具体的な条件を導く。4.1 節で触れる最初のステップでは一般の tangential 等質空間について成り立つ補題 (補題 19) を用いる。この補題の証明は省略する。4.2 節で触れるステップは個々の等質空間毎に示す必要があるが、大まかには同じ方針で証明できる。最後に 4.4 節で具体的な条件を決定するが、そのために必要な可除代数、合成代数に関する結果を 4.3 節でまとめる。

#### 4.1 部分空間の存在に帰着

ここでの主結果は補題 19 である。この補題は、コンパクト Clifford-Klein 形の存在を部分空間の存在に帰着する。この補題を述べるために、まず非コンパクト次元を定義しよう。

リー群  $G$  に対し、その非コンパクト次元  $d(G)$  を次で定義する。

$$d(G) := \dim(G) - \dim(K).$$

但し  $K$  は  $G$  の極大コンパクト群とする。  $G$  内の極大コンパクト群は互いに conjugate であるから、 $d(G)$  は  $K$  のとりかたによらず well-defined である。特に  $G$  を簡約リー群とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  をそのリー環のカルタン分解とすると

$$d(G) = d(G_\theta) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{p}$$

が成り立つ。

次の補題は tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を連結な部分群 ( $\mathfrak{p}$  の部分空間) の存在問題に帰着する。

**補題 19** ([KoY05]).  $G_\theta := K \ltimes \mathfrak{p}$  を  $G$  のカルタン運動群とし、 $H_\theta := K_H \ltimes \mathfrak{p}_H$  をその部分群とする。このとき、次は同値である。

- (i)  $G_\theta/H_\theta$  はコンパクト Clifford-Klein 形を持つ。
- (ii) 次の条件 (a), (b) を満たす  $\mathfrak{p}$  の部分空間  $W$  が存在する。

(a)  $\dim W + d(H) = d(G)$ .

(b)  $W \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H = \{0\}$  (for any  $k \in K$ ).

この補題の証明は省略する。

## 4.2 non-singular な線形写像

4.1 でコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を  $\mathfrak{p}$  内のある部分空間の存在問題に帰着した。ここではさらに、non-singular な線形写像 (定義 20) の存在問題に帰着する (補題 21)。補題 19 とは異なり、ここでの主結果はそれぞれの等質空間に対して別々に示す必要がある。しかし、どれも同様に証明できる為ここでは  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  の tangential 等質空間の場合に示す。まず、non-singular な線形写像を定義しよう。

**定義 20.**  $V_1, V_2, V_3$  を線形空間とする。線形写像  $f : V_1 \rightarrow \text{Hom}(V_2, V_3)$  が  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  に対して、

$$f(v_1)v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \text{ or } v_2 = 0$$

を満たすとき、 $f$  は non-singular であるという。

次の補題は tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を non-singular な線形写像の存在問題に帰着する。

**補題 21.** 簡約型等質空間  $G/H$  を次の表のように  $O(p+1, q)/O(p, q), O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  あるいは  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  とする。このとき、 $\mathfrak{g}$  のカルタン分解の  $\mathfrak{p}$  は、以下のように自然に  $\text{Hom}(V, W)$  (あるいは  $\text{End}(V)$ ) の部分空間と見なせる。また、 $d(G) - d(H)$  は次の様になる (但し  $M_A(n, \mathbb{R}) := \{X \in M(n, \mathbb{R}) : {}^tX = -X\}$ )。

$G/H$	$\mathfrak{p} \subset \text{Hom}(V, W)$	$d(G) - d(H)$
$O(p+1, q)/O(p, q)$	$M(q, p+1; \mathbb{R}) \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{R}^q)$	$q$
$O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$	$M_A(n+1, \mathbb{R}) \subset \text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$	$n$
$O^*(2n+2)/O^*(2n)$	$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A, B \in M_A(n+1, \mathbb{R}) \right\} \subset \text{End}(\mathbb{R}^{2n+2})$	$2n$

このとき、tangential 等質空間  $G_\theta/H_\theta$  がコンパクト Clifford-Klein 形を持つことは、non-singular な線形写像

$$f : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathfrak{p}$$

が存在することと同値である (但し  $r := d(G) - d(H)$  とした)。

*Proof.* どの場合も同様に証明できるので、 $G/H = O^*(2n+2)/O^*(2n)$  の場合を考える。 $\mathfrak{p}$  の記述及び  $d(G) - d(H)$  の計算は定義から分かるので省略し、non-singular な線形写像の存在のみ示す。 $K, \mathfrak{p}_H$  を補題 19 で定めたようにおく。すなわち、 $K$  は  $\mathfrak{k}$  に対応する部分群であり、 $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$  とおくと、 $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_H$  は

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M(n+1, \mathbb{R}), {}^tA = -A, {}^tB = B \right\}$$

$$\mathfrak{p}_H = \{X \in \mathfrak{p} : Xe_1 = 0\}$$

で与えられる。また、

$$\mathfrak{p}_0 := \{X \in \mathfrak{p} \subset \text{End}(\mathbb{R}^{2n+2}) : \det X = 0\}$$

とおく。このとき

$$\mathfrak{p}_0 = \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H$$

を言えばよい。実際この場合、補題 19 の条件 (ii)(b) は  $W \cap \mathfrak{p}_0 = \{0\}$  となり、従って、(ii)(a),(b) を満たす  $W$  が存在することは non-singular な線形写像  $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathfrak{p}$  が存在することと同値となる。

$\mathfrak{p}_0 \supset \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H$  は明らかなので、 $\mathfrak{p}_0 \subset \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H$  を示そう。いま、 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2}$  に  $v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$  を対応させることで、自然な同一視  $\mathbb{R}^{2n+2} \leftrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  が出来る。これに応じて、 $K$  は自然に  $U(n+1)$  と同一視することが出来る。特に、 $U(n+1)$  は  $\mathbb{C}^{n+1}$  内の単位球面に推移的に作用することから、 $K$  もまた  $\mathbb{R}^{2n+2}$  内の単位球面に推移的に作用することが分かる。さて、 $X \in \mathfrak{p}_0$  とすると、 $v \in \mathbb{R}^{2n+2}$  を  $Xv = 0$  かつ  $\|v\| = 1$  となるように選べる。 $K$  の推移性から  $k \in K$  が存在して  $ke_1 = v$  とすることが出来る。これより、 $\text{Ad}(k^{-1})Xk \in \mathfrak{p}_0$  が分かり、 $\mathfrak{p}_0 \subset \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H$  が言えた。□

### 4.3 可除代数、合成代数と Hurwitz-Radon 数

4.2 節ではコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を non-singular な線形写像の存在問題に帰着した。これを元に 4.4 節では  $n$  や  $(p, q)$  に関する具体的な条件を求め、定理の証明を完結させる。その前に、ここで可除代数や合成代数に関する事実を復習しておく。これらの結果は 4.4 節で用いられる。

線形空間  $V = \mathbb{R}^n$  に積  $(x, y) \mapsto xy$  が定義され、 $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \in V$  に対し分配律

$$(ax + by)z = a \cdot xy + b \cdot yz, \quad x(ay + bz) = a \cdot xy + b \cdot xz$$

が成り立つとき  $V$  を実代数という。換言すれば、実代数  $V$  とは双線形写像

$$f: V \times V \rightarrow V$$

が定められている線形空間に他ならない。

**注意 22.** 実代数の公理に単位元の存在を含めることもあるが、ここでは特に断らない限りその存在を仮定しない。また、線形空間は常に有限次元とする。

**定義 23.** 実代数  $V$  が次の条件(可除性)をみたすとき、 $V$  を可除代数という。

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0.$$

**定義 24.** 実代数  $V$  にノルム  $\|v\|$  が定義されており、次の条件(ノルム条件)をみたすとき、 $V$  を合成代数という。

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|.$$

例 25. 実数 ( $\mathbb{R}$ )、複素数 ( $\mathbb{C}$ )、四元数 ( $\mathbb{H}$ )、八元数 ( $\mathbb{O}$ ) は合成代数である。また、任意の合成代数は可除代数でもある。

実代数  $V$  の積演算から線形写像  $T_L(a), T_R(a) \in \text{End}(V)$  を次のように定義できる。

$$T_L(a)x := ax, \quad T_R(a)x := xa \quad (a, x \in V)$$

このとき、 $T_L, T_R$  が non-singular であることと  $V$  が可除代数であることは同値である。また、任意の  $a \in V$  に対して  $T_L(a), T_R(a) \in \|a\| \cdot O(V)$  となることと  $V$  が合成代数であることは同値である (但し、 $O(V)$  は  $V$  の直交変換全体とする)。

Adams は Hurwitz-Radon 数 (定義は (2)) を用いて、non-singular な線形写像  $V \rightarrow \text{End}(W)$  が存在する必要十分条件を与えた。また、この事実の系として、(1, 2, 4, 8)-定理と呼ばれる可除代数の次元に関する結果が得られる。

事実 26 (Adams).  $(p, q)$  に関する次の条件は同値である。

- (i) non-singular な線形写像  $\mathbb{R}^p \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^q)$  が存在する。
- (ii)  $p \leq \rho(q)$ .

事実 27 (Kervaire, Milnor). 可除代数の次元は 1, 2, 4 または 8 である。

最後に、合成代数に関する基本的な性質を見ておこう。

事実 28.  $V$  を単位元  $e$  を持つ合成代数  $V$  とする。このとき、次が成り立つ。

(交代性)  $a, b \in V$  に対して、 $a^2b = a(ab)$ ,  $ba^2 = (ba)a$  が成り立つ。

(虚空間の存在)  $\mathbb{R}e$  の補空間  $\text{Im}V$  が存在し、 $a \in \text{Im}V$  に対して次を満たす。

$$a^2 = -\|a\|^2 e$$

#### 4.4 コンパクト Clifford-Klein 形の存在の必要十分条件

これまでの結果を用いて、 $O(p+1, q)/O(p, q)$ ,  $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  および  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  の tangential 等質空間がコンパクト Clifford-Klein 形を持つための必要十分条件を決定しよう。これは、定理 4 及び定理 17、定理 18 の証明を与えることになる。まず、定理 4 の証明から始めよう。

定理 4 の証明.  $G/H = O(p+1, q)/O(p, q)$  とする。補題 21 より、 $G_\theta/H_\theta$  にコンパクト Clifford-Klein 形が存在することは、non-singular な線形写像  $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{R}^q)$  が存在することと同値である。このとき  $f$  は自然に non-singular な線形写像  $\tilde{f}: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^q)$  を定めるので、事実 26 より必要十分条件  $p < \rho(q)$  が得られる。□

次の補題と補題 21、及び (1, 2, 4, 8)-定理より  $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$  がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は  $n = 1, 3, 7$  であることが分かる。従って、定理 17 が示される。

補題 29.  $\mathfrak{p} = M_A(n+1, \mathbb{R})$  とおく。このとき、 $n (\geq 1)$  に関する次の条件は同値。

- (i) 単位元を持った  $n+1$  次元の合成代数が存在する。
- (ii) non-singular な線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$  が存在する。
- (iii)  $n+1$  次元の可除代数が存在する。

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) を示す。  $V$  を単位元を持った  $n+1$  次元の合成代数とし、 $T_L$  を 4.3 節で定めた non-singular な線形写像とする。このとき、ノルム条件より

$$T_L(a) \in \|a\| \cdot O(n+1) \quad (4)$$

である。一方  $a \in \text{Im}V$  に対して、 $a(ax) = a^2x = -\|a\|^2x$  であるから、

$$T_L(a)^2 = -\|a\|^2 I \quad (5)$$

が分かる。(4) と (5) より  ${}^t T_L(a) = -T_L(a)$  となる。これより non-singular な線形写像

$$T_L: \text{Im}V (\simeq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{p}, \quad a \mapsto T_L(a)$$

が得られた。

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) を示す。  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$  を non-singular な線形写像とする。非ゼロ元  $a \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $f(a)$  の固有値は非ゼロ純虚数であるから、任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対し  $f(a) + tI$  は固有値 0 を持ち得ない。これより、non-singular な線形写像

$$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \rightarrow M(n+1, \mathbb{R}), \quad (a, t) \mapsto f(a) + tI$$

が得られた。即ち、 $n+1$  次元の可除代数が存在する。

(iii)  $\Rightarrow$  (i) は (1, 2, 4, 8)-定理から分かる。 □

次の補題と補題 21、及び (1, 2, 4, 8)-定理より  $O^*(2n+2)/O^*(2n)$  がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は  $n = 1, 3$  であることが分かる。従って定理 18 が示される。

補題 30.  $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A, B \in M_A(n+1, \mathbb{R}) \right\}$  とおく。このとき、 $n (\geq 1)$  に関する次の条件は同値。

- (i) 単位元を持った  $n+1$  次元の結合的合成代数が存在する。
- (ii) non-singular な線形写像  $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathfrak{p}$  が存在する。

(iii)  $2n + 2$ 次元の可除代数が存在する。

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii)を示す。  $V$ を単位元を持った  $n + 1$ 次元の結合的合成代数とする。補題 29 の証明と同様にして、 $a \in \text{Im}V$  に対し  ${}^tT_L(a) = -T_L(a)$ ,  ${}^tT_R(a) = -T_R(a)$  が分かる。また、 $V$  の結合性より  $a, b \in V$  に対して  $T_L(a)$  と  $T_R(b)$  は可換である。従って、non-singular な線形写像

$$f : \text{Im}V \oplus \text{Im}V (\simeq \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathfrak{p}, \quad (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} T_L(a) & T_R(b) \\ T_R(b) & -T_L(a) \end{pmatrix}$$

が得られる。この写像が実際に non-singular であることは、 $f(a, b)^2 = -(\|a\|^2 + \|b\|^2)I$  から確かめられる。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)を示す。  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathfrak{p}$  を non-singular な線形写像とする。  $s, t \in \mathbb{R}$  に対して、 $g(s, t) := \begin{pmatrix} sI & tI \\ tI & -sI \end{pmatrix} \in M(2n + 2, \mathbb{R})$  とおくと、 $g(s, t)$  は  $\mathfrak{p}$  の任意の元と可換であり、その固有値は常に実数である。一方、非ゼロ元  $a \in \mathbb{R}^{2n}$  に対して、 $f(a) \in \mathfrak{p}$  の固有値は非ゼロ純虚数であるから、 $f(a) + g(s, t)$  は固有値 0 を持ち得ない。これより、non-singular な線形写像

$$\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow M(2n + 2, \mathbb{R}), \quad (a, (s, t)) \mapsto f(a) + g(s, t)$$

が得られる。即ち、 $2n + 2$ 次元の可除代数が存在する。

(iii) $\Rightarrow$ (i) は (1, 2, 4, 8)-定理から分かる。 □

以上より、定理 4、定理 17、定理 18 の証明が完了した。

## 参考文献

- [A62] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. **75** (1962), 603–632.
- [Be96] Y. BENOIST, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. **144** (1996), 315–347.
- [Br63] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.
- [BtM58] R. BOTT AND J. MILNOR, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.
- [E42] B. ECKMANN, *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen*, Comment. Math. Helvetici **15** (1942/43), 358–366.

- [H23] A. HURWITZ, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. **88** (1923), 1–25.
- [Kl96] B. KLINGLER, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. **306** (1996), 353–370.
- [Ko96] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, In: Lecture Notes of the European School, August 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Math **17**. Academic Press (1996), 99–165.
- [Ko01] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited–2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer (2001), 723–747.
- [KoO90] T. KOBAYASHI AND K. ONO, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Univ. of Tokyo **37** (1990), 71–87.
- [KoY05] T. KOBAYASHI AND T. YOSHINO, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces –revisited*, to appear.
- [Ku81] R. S. KULKARNI, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Adv. Math. **40** (1981), 10–51.
- [R22] J. RADON, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. math. Sem. Hamburg **1** (1922), 1–14.
- [W84] J. A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, 5th edn., Publish of Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1984.
- [Y05] T. YOSHINO, *Criterion of proper discontinuity in a Cartan motion group*, submitted to Int. J. of Math.