数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 51-61

$O(p,q)$ の極小表現の反転を与える積分作用素*

京都大学・数理解析研究所　小林俊行 (Toshiyuki KOBAYASHI)
京都大学・数理解析研究所　真野元 (Gen MANO)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University
toshi@kurims.kyoto-u.ac.jp　gmano@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

It is proved in [14] that the minimal unitary representation π of the indefinite orthogonal group $O(p,q)(p+q:\text{even})$ can be realized on a Hilbert space consisting of square integrable functions on a conical subvariety C of $\mathbb{R}^{p+q-2}$ associated to a quadratic form of signature $(p-1,q-1)$. This geometric realization is analogous to the Schrödinger model of the Weil representation of the metaplectic group. In this classical case, we recall that the 'inversion' element with respect to the Siegel parabolic subgroup acts as the Fourier transform. The main aim of this article is to find such a unitary operator $\pi(w_0)$ on $L^2(C)$ corresponding to the 'inversion' element w_0 in the case of the minimal representation of $O(p,q)$. We shall give an explicit integral formula for $\pi(w_0)$ on $L^2(C)$ by means of integro-differential operators involving Bessel functions. Corollaries include Plancherel type theorem and reciprocal formula of Meijer's G-functions.

目次

* 京都大学数理解析研究所における研究集会「群の表現と調和解析の広がり」(Representation Theory of Groups and Extension of Harmonic Analysis) 2005 年 7 月 25 日~7 月 28 日（研究代表者；河添健氏）における講演記録

1 はじめに

本稿では、不定値直交群 $O(p,q)$ の極小表現について、L^2 モデルと呼ばれる実現を扱い、群の作用、特に「反転」元と呼ばれる特別な元の作用を、積分作用素によって表わすことを目標とする。

$$w_0 := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

として、不定値直交群 $G := O(p,q)$ を

$$O(p,q) = \{g \in GL(p+q,\mathbb{R}) : {}^t g w_0 g = w_0\}.$$

で実現される行列群とする。$O(p,q)$ の極小ユニタリ表現[*1]π は $p=q=4$ の場合に Kostant [15] によって、$p,q \geq 2, p+q$ が >4 かつ偶数となる一般の場合には、Binegar-Zierau [1], Huang-Zhu [7], Kobayashi-Ørsted [14] によって構成された。π は平坦な擬リーマン多様体の山辺作用素の解空間として実現できる（共形変換群によるモデル）。さらに、そのモデルのフーリエ変換を取ることによって、錐

$$C := \{\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^{p+q-2} \setminus \{0\} : \zeta_1^2 + \cdots \zeta_{p-1}^2 - \zeta_p^2 - \cdots - \zeta_{p+q-2}^2 = 0\}.$$

[*1] $p,q>2$ ならば、この表現を単位元成分 $SO_0(p,q)$ に制限しても既約になる。さらに、$p+q>6$ ならば、普遍包絡環における annihilator が Joseph ideal になる。

上、二乗可積分関数のなすヒルベルト空間 $L^2(C)$ に実現することもできる [14] (C 上の測度の具体的表示については (2.2) を参照)。後者の実現は、シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ の二重被覆群であるメタプレティック群 $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ の Segal-Shale-Weil 表現 (あるいは単に Weil 表現ともいう) ϖ の $L^2(\mathbb{R}^n)$ への実現と非常に類似した性質を持つ。本稿の焦点をはっきりとさせるためにも、Weil 表現 ϖ に関してよく知られている重要な性質をいくつか挙げてみよう。

1) 表現空間は $L^2(\mathbb{R}^n)$ であり、ϖ のユニタリ内積は通常の L^2 内積である。

2) ϖ は $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ の二つの既約表現の直和になるが、いずれの既約表現についても、ジーゲル放物型部分群 P_{Siegel} へ制限してもまだ既約である。P_{Siegel} の作用は、簡単に記述することができる。

3) $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ には作用しない ($\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ が n 次元多様体に連続に作用するならば、その作用は自明になってしまう)。これに対応して、$d\varpi(X)(X\in\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$ は $X\notin\mathfrak{p}_{\mathrm{Siegel}}$ のとき、一階の微分作用素で記述することはできない (実際には二階の微分作用素が必要になる)。これはまた P_{Siegel} 以外の $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ の元 g の作用 $\varpi(g)$ が関数の引き戻しといった簡単な作用ではないことを意味する。

4) P_{Siegel} に対する「反転」と呼ばれる特別な元 w_0' が存在し、$\varpi(w_0')$ は、(定数倍を除いて) フーリエ変換に一致する。

$\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ は、P_{Siegel} を w_0' から生成されるので、2) と 4) によって、$\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ 全体の作用を具体的に書き下すことができる (前述の 3) 参照。また、具体的な表示式については [17] を参照)。

群 $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ のかわりに、群 $O(p,q)$ の場合についても、極小表現 π の $L^2(C)$ への実現に関して、ユニタリ内積は L^2 内積と一致する。さらに、ジーゲル放物型部分群に相当するような極大放物型部分群 $P^{\max}$ が存在し、2) と同様に $P^{\max}$ の作用は簡単に記述することができるが、3) に関しても同様の現象が起こっている [9, 14]。欠けている部分は 4) に相当する主張である。いま、

$$G=P^{\max}\cup\left(P^{\max}\cdot w_0\cdot P^{\max}\right)$$

なので、$P^{\max}$ の「反転」元 w_0 ((1.1) 参照) の作用 $\pi(w_0)$ を具体的に書き下すことができれば、群全体の作用がわかったと言えることになるだろう。そこで次のように焦点を絞ることができる。

問題. $O(p,q)$ の極小表現 π のヒルベルト空間 $L^2(C)$ への実現に対して、「反転」を与え

るユニタリ作用素 $\pi(w_0)$ を積分変換の形で記述せよ。

2 ユニタリ反転作用素 $\pi(w_0)$ の動径成分

2.1 動径成分の積分核表示

以下、$p, q \geq 2$ かつ $p+q>4$ とする。まず、C 上の座標を、極座標により以下のように与える；

$$\mathbb{R}_+ \times S^{p-2} \times S^{q-2} \to C, \quad (r, \omega, \eta) \to (r\omega, r\eta). \tag{2.1}$$

このとき C 上の測度

$$d\mu := \frac{1}{2} r^{p+q-5} dr d\omega d\eta \tag{2.2}$$

は、群 $O(p-1, q-1)$ の自然な作用に関して不変な測度である。これに応じて、ヒルベルト空間の分解

$$L^2(C) \equiv L^2(C, d\mu) \simeq \sum_{l,k=0}^{\infty}{}^{\oplus} L^2((0,\infty), r^{p+q-5}dr) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{p-1}) \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{q-1}), \tag{2.3}$$

を得る。ただし、$\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{p-1})$ は、球面 S^{p-2} 上、次数 l の球調和関数を表わすものとし、$p=2$ の時は、$l=0,1$ とする。

このとき、ユニタリ反転作用素

$$\pi(w_0) : L^2(C) \to L^2(C)$$

に関して次の結果が成り立つ。

定理 2.1 (ユニタリ反転作用素の動径成分). $l, k \in \mathbb{N}$ とする。

1) $\pi(w_0)$ は、分解 *(2.3)* の各直和成分を保ち、$T_{l,k} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ の形で各直和成分に作用する。ここで、「動径成分」$T_{l,k}$ は、$L^2((0,\infty), r^{p+q-5}dr)$ 上のユニタリ作用素である。

2) $\pi(w_0)$ の動径成分 $T_{l,k}$ は、一変数の積分変換で与えられる：

$$T_{l,k} f(r) = \int_0^\infty K_{l,k}(rr') f(r') r'^{p+q-5} dr'. \tag{2.4}$$

ここで、核関数 $K_{l,k}(t)$ は、

$$K_{l,k}(t) := \begin{cases} (-1)^{l+\frac{p-q}{2}} G^{20}_{04}(t^2 | \frac{l+k}{2}, \frac{-q+3+l-k}{2}, \frac{-p-q+6-l-k}{2}, \frac{-p+3-l+k}{2}) \\ \qquad \frac{p-q}{2} + l - k \geq 0 \text{ のとき}; \\ (-1)^k G^{20}_{04}(t^2 | \frac{l+k}{2}, \frac{-p+3-l+k}{2}, \frac{-p-q+6-l-k}{2}, \frac{-q+3+l-k}{2}) \\ \qquad \frac{p-q}{2} + l - k \leq 0 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{2.5}$$

で定義される。ただし、$G^{pq}_{mn}(x)$ は *Meijer* の G 関数である（§5 参照）。

2.2 $q = 2$ の場合

定理 2.1 は、$q = 2$ の場合でも成立する。この場合の π は古くから知られており、$SO_0(p,2)$ の最高ウェイト表現と最低ウェイト表現の直和に分解される。$q = 2$ の場合、球調和関数 $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{q-1}) = \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^1)$ の次数 k は 0 か 1 に限られ、核関数 $K_{l,k}(t)$ はベッセル関数に退化する：

$$\begin{aligned} K_{l,0}(t) = K_{l,1}(t) &= (-1)^{l+\frac{p-2}{2}} G^{20}_{04}\left(t^2 \middle| \frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}, \frac{-p+3-l}{2}, \frac{-p+4-l}{2}\right) \\ &= (-1)^{l+\frac{p-2}{2}} t^{-\frac{p-3}{2}} J_{p-3+2l}(4\sqrt{t}). \end{aligned}$$

(最初の等式は、G 関数の対称性

$$G^{20}_{04}(x|a_1,a_2,a_3,a_4) = G^{20}_{04}(x|a_2,a_1,a_3,a_4) = G^{20}_{04}(x|a_1,a_2,a_4,a_3),$$

から従い、三番目の等式は、還元公式 (5.2) から従う)。

したがって、$q = 2$ の場合の定理 2.1 は、[11, Theorem 6.1.1 (2)] の別証明を与えていることにもなる。なお、この場合の $T_{l,0} = T_{l,1}$ は、変数変換によって Hankel 変換

$$f(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(y) J_\nu(xy) y dy$$

に一致することがわかる。

2.3 G 関数に関する再帰公式と Plancherel 型公式

定義式 (1.1) により w_0 は $w_0^2 = 1$ を満たすので、$\pi(w_0)^2 = \mathrm{id}$ である。定理 2.1 (1) により、これは、各 $(l,k) \in \mathbb{N}^2$ について、動径成分のユニタリ作用素 $T_{l,k}$ に関する等式 $T^2_{l,k} = \mathrm{id}$ を導く。$T_{l,k}$ の核関数は、(2) により与えられているので、次の二つの系を得ることになる。

系 2.2 (Plancherel 型公式). a, b, l を $a \geq 0, b \geq l, l \leq 0$ を満たす半整数とすると、積分変換

$$S_{a,b,l} : f(r) \to \int_0^\infty G^{20}_{04}(rr'|a,b,2l-a,2l-b) f(r') r'^{1-4l} dr'$$

は $L^2((0,\infty), r^{1-4l}dr)$ 上のユニタリ作用素である。特に、

$$||S_{a,b,l}f||^2_{L^2((0,\infty),r^{1-4l}dr)} = ||f||^2_{L^2((0,\infty),r^{1-4l}dr)}.$$

が成り立つ。

系 2.3 (再帰公式). 記号を系 *2.2* のままとし、$a \geq 0, b \geq l, l \leq 0$ とする。ユニタリ作用素 $S_{a,b,l}$ は $L^2((0,\infty), r^{1-4l}dr)$ において位数 2 である。$S_{a,b,l} \circ S_{a,b,l} f = f$ を書き下すことにより、$f \in L^2((0,\infty), r^{1-2(a+c)}dr)$ についての以下の再帰公式を得る：

$$f(r) = \int_0^\infty G^{20}_{04}(rr''|a,b,2l-a,2l-b) \times \int_0^\infty \Big(G^{20}_{04}(r''r'|a,b,2l-a,2l-b) f(r') r'^{1-4l} dr'\Big) r''^{1-4l} dr''. \tag{2.6}$$

二重積分は $L^2((0,\infty), r^{1-4d}dr)$ の稠密な部分空間で収束する。

なお、上記の系に現われる G 関数についての公式は、文献では見当たらなかった。新しい公式なのかもしれない。

3 ユニタリ反転作用素を与える積分作用素

3.1 主結果

第 1 節で述べたように、われわれの目標は、反転 w_0 に対するユニタリ作用素 $\pi(w_0) : L^2(C) \to L^2(C)$ の具体的な積分公式を求めることであった。大まかに言うなら、定理 2.1 (1) により、$\pi(w_0)$ はヒルベルト和

$$\pi(w_0) = \sum_{l,k=0}^{\infty}{}^{\oplus} T_{l,k} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$$

の形で書けるので、$T_{l,k}$ の核関数 $K_{l,k}$ を l,k についてを「足し合わ」せればよい (ただし、実際の証明は定理 2.1 を使うが、そのまま足し合わせるわけではない)。

主結果を述べるために、記号の準備を最初にしておこう。まず、一変数 t の超関数 $\Xi_{p,q}(t)$ を

$$\Xi_{p,q}(t) := \begin{cases} t_+^{-\frac{p+q-6}{4}} J_{\frac{p+q-6}{2}}(2\sqrt{2t_+}) & \min(p,q) = 2 \text{ のとき} \\ t_+^{-\frac{p+q-6}{4}} Y_{\frac{p+q-6}{2}}(2\sqrt{2t_+}) + \frac{2(-1)^{\frac{p+q-4}{2}}}{\pi} t_-^{-\frac{p+q-6}{4}} K_{\frac{p+q-6}{2}}(2\sqrt{2t_-}) & \\ \qquad p,q > 2 \text{ かつどちらも奇数のとき} & \\ t_+^{-\frac{p+q-6}{4}} J_{\frac{p+q-6}{2}}(2\sqrt{2t_+}) - \sum_{l=0}^{\frac{p+q-8}{2}} \frac{(-1)^l}{\Gamma(\frac{p+q-6}{2}-l)} \delta^{(l)}(t) & \\ \qquad p,q > 2 \text{ かつどちらも偶数のとき} & \end{cases} \tag{3.1}$$

で定める。ただし、$Y_\nu(z), K_\nu(z)$ は変形ベッセル関数である。$p,q>2$ かつどちらも奇数のとき、(3.1) は、Cauchy の主値の意味で超関数を正則化している。

次に、核関数 $K(\zeta,\zeta')$ を、

$$K(\zeta,\zeta') \equiv K(p,q;\zeta,\zeta') := c_{p,q}\Xi_{p,q}(\langle\zeta,\zeta'\rangle) \quad (\zeta,\zeta' \in C) \tag{3.2}$$

$$c_{p,q} := \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}}{2^{\frac{p+q-2}{4}}\pi^{\frac{p+q-4}{2}}} \tag{3.3}$$

と定義する。ただし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の通常のユークリッド内積である。

定理 3.1 (ユニタリ反転作用素の積分表示). (p,q) を、$p,q \geq 2$ かつ $p+q \geq 6$ を満たす自然数の組とすると、反転 w_0 に対するユニタリ作用素 $\pi(w_0): L^2(C) \to L^2(C)$ は、以下の積分作用素で与えられる。

$$\pi(w_0)u(\zeta) = \int_C K(\zeta,\zeta')u(\zeta')d\mu(\zeta'), \quad u \in L^2(C). \tag{3.4}$$

定理 3.1 は、(3.4) で定義される積分微分作用素が $L^2(C)$ 上連続であることも主張している。群の作用にそのような積分微分作用素が自然に現われることは興味深いと思われる (一般に $\mathbb{R}^n$ 上の積分微分作用素は、$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の連続作用素にはなるとは限らない)。

3.2 再帰公式、Plancherel 型公式

定義式 (1.1) により w_0 は $w_0^2=1$ を満たすので、$\pi(w_0)^2=\mathrm{id}$ である。よって、$\pi(w_0)$ の動径成分 $T_{l,k}$ に関する Plancherel 型公式、再帰公式 (§2.3 参照) と同じく、$\pi(w_0)$ についても、核関数 $K(\zeta,\zeta')$ に関する以下の系を得る。

系 3.2 (Plancherel 型公式). $S: L^2(C) \to L^2(C)$ を $K(\zeta,\zeta')$ (*(3.2)* 参照) を核関数に持つような積分変換とすると、S はユニタリである。特に、

$$||Su||_{L^2(C)} = ||u||_{L^2(C)}.$$

系 3.3 (再帰公式). 記号を系 *3.2* のままとする。ユニタリ作用素 S は $L^2(C)$ で位数 2 である。つまり、以下の再帰公式が成り立つ：

$$u(\zeta) = \int_C K(\zeta,\zeta'')\Big(\int_C K(\zeta'',\zeta')u(\zeta')d\mu(\zeta')\Big)d\mu(\zeta''), \quad u \in L^2(C).$$

メタプレクティック群 $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ の反転 w_0' は、Weil 表現 $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^n))$ において、$\mathbb{R}^n$ 上のフーリエ変換として作用していたことを思い出すと、系 3.2、3.3 はフーリエ変換 $\mathcal{F}$

の Plancherel 公式、再帰公式の対応物だと解釈することができる（ただし、Weil 表現の場合、反転元 w_0' は $\widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$ の中で位数 4 であり、これはフーリエ変換 $\mathcal{F}$ が位数 4、すなわち $\mathcal{F}^4=\mathrm{id}$ であることに対応している)。

4 主結果（定理 3.1）に関するいくつかのコメント

主結果（定理 3.1）の証明については別に述べることとし、ここでは主結果の意味やコメントについて手短かに触れたい。

4.1 注意 1：積分の意味、ラドン変換

(3.4) の右辺の積分は、$K(\zeta,\zeta')$ が超関数を含んでいるため、積分微分作用素として考えなければならない。これをより正確に述べるため、$u\in C_0^\infty(C)$ に対して $\mathbb{R}^{p+q-2}$ 上の超関数 Tu を定める、すなわち、埋め込み写像

$$T: C_0^\infty(C)\to\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{p+q-2}),\quad u\to u\delta(Q)$$

を考える。すると、超関数 Tu の台のコンパクト性により、ラドン変換

$$R(Tu)(\zeta,t):=\int_{\mathbb{R}^{p+q-2}}(Tu)(\zeta')\delta(t-\langle\zeta,\zeta'\rangle)d\zeta'$$

が定義できる（超関数のラドン変換については、例えば [5, 6] 参照)。(3.4) の右辺の積分は、(3.2) により、

$$\begin{aligned}c_{p,q}\int_C\Xi_{p,q}(\langle\zeta,\zeta'\rangle)u(\zeta')d\mu(\zeta')=&c_{p,q}\int_{\mathbb{R}}\Xi_{p,q}(t)R(Tu)(\zeta,t)dt\\=&c_{p,q}\langle\Xi_{p,q},R(Tu)(\zeta,\cdot)\rangle,\end{aligned}\tag{4.1}$$

として計算されるものである。この等式は、(Weil 表現のユニタリ反転作用素である) フーリエ変換の平面波展開に対応している。

$\Xi_{p,q}(t)$ は特異点を原点で持つ超関数であるので、(4.1) のペアリングが well-defined であるためには、$R(Tu)(\zeta,t)$ が $t=0$ においてある程度の微分可能性を持つことが必要である（[16] 参照)。

4.2 注意 2：核関数の台

核関数 $K(\zeta,\zeta')$ の注目すべき点として、p,q の偶奇によって、台の様子が異なることが挙げられる。つまり、

$$\operatorname{supp}\Xi_{p,q}=\begin{cases}\mathbb{R}_+ & p,q\text{ どちらも偶数のとき}\\ \mathbb{R} & p,q\text{ どちらも奇数のとき}\end{cases}$$

であるので、$K(\zeta,\zeta')$ の台は、

$$\operatorname{supp}K=\begin{cases}\{(\zeta,\zeta')\in C\times C:\langle\zeta,\zeta'\rangle\geq 0\} & p,q\text{ どちらも偶数のとき}\\ C\times C & p,q\text{ どちらも奇数のとき}\end{cases}\tag{4.2}$$

である。この不思議な現象がなぜ起こるかについての直接的な理由はまだわかっていない。

4.3 注意 3：$q=2$ の場合

$q=2$ のとき、錐 C は、二つの連結成分

$$C_\pm:=\{(\zeta_1,\cdots,\zeta_p)\in C:\zeta_p\gtrless 0\}$$

の非連結和として表わされ、核関数 $K(\zeta,\zeta')$ の台は、(4.2) より、

$$\{\zeta,\zeta'\in C\times C:\langle\zeta,\zeta'\rangle\geq 0\}=(C_+\times C_+)\sqcup(C_-\times C_-)$$

であることがわかるので、$\pi(w_0)$ は、二つの積分変換 $\pi_\pm(w_0):L^2(C_\pm)\to L^2(C_\pm)$ の和として表わされ、それぞれの核関数は、$K(\zeta,\zeta')$ を $C_\pm\times C_\pm$ に制限した関数である。これは、複素解析的半群の手法によって $\pi(w_0)$ を記述した [11, Theorem 6.1.1 (1)] の別証明を与えていることにもなる。

5 付録：Meijer の G 関数

定理 2.1 で用いた *Meijer* の G 関数は、以下の積分で定義される [3, §5.3]:

$$G^{m,n}_{p,q}\left(x\middle|\begin{matrix}a_1, & \cdots, & a_p\\ b_1, & \cdots, & b_q\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_L\frac{\Pi_{j=1}^m\Gamma(b_j-s)\Pi_{j=1}^n\Gamma(1-a_j+s)}{\Pi_{j=m+1}^q\Gamma(1-b_j+s)\Pi_{j=n+1}^p\Gamma(a_j-s)}x^s ds,\tag{5.1}$$

ここで、空集合の積は 1 と解釈し、$0 \le m \le q, 0 \le n \le p$ を満たすとする。パラメータ a_j, b_j は、$\Gamma(b_j - s), j = 1, \cdots, m$ の極と $\Gamma(1 - a_k + s), k = 1, \cdots, n$ の極が全く重ならないように取っている。積分路 L は $\Gamma(b_j - s), j = 1, \cdots, m$ のすべての極が L の右側、$\Gamma(1 - a_k + s), k = 1, \cdots, n$ のすべての極が L の左側にあるようにして、$-\infty\sqrt{-1}$ から $+\infty\sqrt{-1}$ まで走る。

とくに、$p = n = 0$ のときには、

$$G_{0,q}^{m,0}(x|b_1, \cdots, b_q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_L \frac{\Pi_{j=1}^m \Gamma(b_j - s)}{\Pi_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s)} x^s ds,$$

になる。

パラメータ間に関係式があるときには、G 関数の還元公式が存在する：

$$G_{04}^{20}(x|a, a + \frac{1}{2}, b, b + \frac{1}{2}) = x^{\frac{1}{2}(a+b)} J_{2(a-b)}(4x^{\frac{1}{4}}). \tag{5.2}$$

なお、本稿の定理および系の証明については、別に述べる予定である。

参考文献

[1] B. Binegar and R. Zierau, Unitarization of a singular representation of $SO(p, q)$, *Comm. Math. Phys.*, **138** (1991), 245–258.

[2] A. Dvorsky and S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, *Invent. Math.*, **138** (1999), 203–224.

[3] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions*, **I**, McGraw-Hill, New York, 1953.

[4] A. Erdélyi et al., *Tables of Integral Transforms*, **II**, McGraw-Hill, New York, 1954.

[5] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, **V**, Academic Press, New York and London, 1966.

[6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, New York and London, 1984.

[7] J.-S. Huang and C.-B. Zhu, On certain small representations of indefinite orthogonal groups, *Representation Theory*, **I** (1997), 190–206.

[8] T. Kobayashi, Conformal geometry and global solutions to the Yamabe equations on classical pseudo-Riemannian manifolds, Proceedings of the 22nd Win-

ter School "Geometry and Physics" (Srni, 2002). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **71** (2003), 15–40.

[9] 小林俊行, $O(p,q)$ の極小ユニタリ表現のシュレディンガーモデル, 数理解析研究所講究録 1342（短期共同研究 「IV 型対称空間上の保型形式の研究」(ed. 織田孝幸氏)）(2003), 107–116.

[10] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formulas for the minimal representation of $O(p,2)$, *Acta Appl. Math.*, **86** (2005), 103–113.

[11] T. Kobayashi and G. Mano, The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of $O(p,2)$, *in preparation*

[12] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formula of the inversion for the minimal representation of $O(p,q)$, *in preparation*

[13] T. Kobayashi and G. Mano, Radon transform of a function supported on a cone, *in preparation*

[14] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$ III. Ultrahyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, *Adv. Math.* **180** (2003), 551–595

[15] B. Kostant, The vanishing scalar curvature and the minimal unitary representation of $SO(4,4)$, eds. Connes et al, Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Progress in Math., **92** , Birkhäuser, 1990 Boston, 85–124.

[16] 真野元, 錐上に台を持つ関数のラドン変換（数理解析研究所における研究集会「部分多様体の微分幾何学」(ed. 田丸博士氏) の講究録に収録予定)

[17] P. Perrin, Representations de Schrodinger, indice de Maslov et groupe metaplectique, Lecture Notes in Math., **880**, pp. 370–407, Springer, Berlin-New York, 1981.

[18] P. Torasso, Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de carastéristique nulle, *Duke Math. J.* **90** (1997), 261–377.

[19] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1922.