数理解析研究所講究録 1468 巻 2006 年 99-112

池田リフトのL関数の二乗平均値について

(On the mean square of L-functions attached to Ikeda lifts)

名大・多元数理　　松本 耕二

(Kohji Matsumoto : Graduate School of Math., Nagoya University)

Riemannゼータ関数 $\zeta(s)$ の二乗平均値の研究というのは解析的整数論における古典的な問題のひとつで,

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt \sim \begin{cases} \zeta(2\sigma)T & \sigma>\frac{1}{2} \quad (1)\\ T\log T & \sigma=\frac{1}{2} \quad (2)\\ C(\sigma)T^{2-2\sigma} & \sigma<\frac{1}{2} \quad (3)\end{cases}$$

($C(\sigma)$ は σ に依存して定まる定数)

であることが古くから知られている。実際 (1) は Landau および Schnee (1909, 互いに独立), (2) は Hardy-Littlewood (1918) により, (3) は (1) と $\zeta(s)$ の関数等式から直ちに導ける。この種の結果は, $\zeta(s)$ の真の大きさを推測する手がかりにもなるし, 応用上も色々と重要なので, 類似の結果を他のゼータ関数, L関数についても求めたい, という自然な欲求が生じる。

例えば $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz}$ を $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する，weight κ の正則 cusp 形式で，$a(1)=1$ かつ Hecke 固有関数になっているものとし，対応するL関数を $L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ と書けば，この級数の絶対収束域は $\sigma=\mathrm{Re}\,s>\frac{1}{2}(\kappa+1)$ なので，変数をシフトして $L^*(s,f)=L(s+\frac{\kappa-1}{2},f)$ とおけばこれは $\sigma>1$ で絶対収束し，従って臨界領域は $0\leqq\sigma\leqq 1$ となる。そしてこの領域における二乗平均値は

$$\int_1^T |L^*(\sigma+it,f)|^2\,dt \sim \begin{cases} C(\sigma)T & \frac{1}{2}<\sigma\leqq 1 & (4)\\ CT\log T & \sigma=\frac{1}{2} & (5)\\ C(\sigma)T^{3-4\sigma} & 0\leqq\sigma<\frac{1}{2} & (6)\end{cases}$$

となる。ここで (4) は Potter (1940), (5) は Good (1974) による。

しかし，$\zeta(s)$ や $L^*(s,f)$ の場合に臨界領域における二乗平均値の漸近的な大きさが決定できたのは，これらの場合には関数等式のガンマ因子が比較的小さいからであって，一般にはこうはいかない．一般的状況設定として，$\varphi(s)$ を $\sigma>\rho\ (\geqq 1)$ で絶対収束する Dirichlet 級数で，全複素平面に有理型に解析接続され，

$$\Delta(s)\varphi(s)=B_1B_2^{-s}\Delta(1-s)\varphi(1-s) \qquad (B_1,\ B_2：定数)$$

の形の関数等式を満たすとしよう．但し

$$\Delta(s)=\prod_{j=1}^{J}\Gamma(\alpha_j+\beta_j s) \qquad \alpha_j\in\mathbb{R},\ \beta_j>0$$

とする。この時，$\eta=\sum_{j=1}^{J}\beta_j$ の大きさが平均値の挙動に強

く影響する．実際，$\sigma>\rho$ では容易に

$$\int_1^T |\varphi(\sigma+it)|^2 dt \sim C(\sigma)T \tag{7}$$

がわかるので，上の関数等式を用いると $\sigma<1-\rho$ で

$$\int_1^T |\varphi(\sigma+it)|^2 dt \sim C(\sigma)T^{2(1-2\sigma)\eta+1} \tag{8}$$

となる．この (7) と (8) をもとに，Phragmén-Lindelöf の凸性原理を用いると，$1-\rho\leqq\sigma\leqq\rho$ で

$$\int_1^T |\varphi(\sigma+it)|^2 dt = O(T^{1+2(\rho-\sigma)\eta+\varepsilon}) \tag{9}$$

（ε は小さい正数），特に

$$\int_1^T |\varphi(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt = O(T^{1+(2\rho-1)\eta+\varepsilon}) \tag{10}$$

を得る。例えば $\rho=1$ ならこの (10) の右辺は $O(T^{1+\eta+\varepsilon})$ であるが，Kanemitsu-Sankaranarayanan-Tanigawa [KST] は多少の付加条件の下でこの評価を $O(T^{\eta+\varepsilon})$ に改良できることを示している。しかし，もし $\varphi(s)$ に対して Lindelöf 予想の類似

$$\varphi(\tfrac{1}{2}+it) = O(|t|^\varepsilon) \tag{11}$$

が成り立つなら (10) の右辺は $O(T^{1+\varepsilon})$ と評価されるはずであるから，η が大きければ，証明されている評価 $O(T^{\eta+\varepsilon})$ は予想より遥かに悪いことがわかる。

典型的な例として Siegel modular 形式のスタンダード L 関数を考えよう。 F を

$$Sp(g, \mathbb{Z}) = \{ M \in GL(2g, \mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_nM = J_n \} \qquad J_n = \begin{pmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{pmatrix}$$

に関する weight k の正則 Hecke-eigen Siegel cusp 形式とし,

$$L(s, F, st) = \prod_p \left\{ (1-p^{-s}) \prod_{j=1}^{g} (1-\alpha_j(p)p^{-s})(1-\alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}$$

($\alpha_j(p)$ は Satake parameters) を対応するスタンダード L 関数とすれば，凸性原理による評価は

$$\int_1^T |L(\sigma+it, F, st)|^2 dt = O(T^{(2g+1)(g+1-\sigma)+1+\varepsilon}) \qquad (12)$$

$(-g \leqq \sigma \leqq g+1)$ であり，特に

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, F, st)|^2 dt = O(T^{(2g+1)(g+\frac{1}{2})+1+\varepsilon}) \qquad (13)$$

である。上述のようにこの指数は $(2g+1)(g+\frac{1}{2})+\varepsilon$ でおきかえられる。更に Kohnen-Sankaranarayanan-Sengupta は最近のプレプリント [KSS] において，Duke-Howe-Li [DHL] による F の Fourier 係数の評価を用いれば，(13) の指数の $g+\frac{1}{2}$ の部分を $\frac{2}{3}g+\frac{1}{2}$ に（更に g が 2 のべきなら $\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}$ に）改良できることを指摘している。しかしそれでも，予想される真の大きさには程遠い評価しか得られていないのが現状である。

一般論としては今のところ，これが限界ではないかと思

われるが，Fがある種のliftingの像になっているような特殊な場合には，もっと遥かに精密な平均値定理を得ることができる。このことを報告するのが本稿の目的である。

そのためにまず，fを前出の$SL(2,\mathbb{Z})$に関するcusp形式とし，そのRankin-Selberg L関数

$$L(s, f\otimes f) = \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty} a(n)^2 n^{1-\kappa-s}$$

を考える。この場合関数等式のηの値は2だから，

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, f\otimes f)|^2 dt = O(T^{2+\varepsilon}) \tag{14}$$

がわかる。これに対しSankaranarayanan [S]は，Shimuraによる分解式

$$L(s, f\otimes f) = \zeta(s) L(s+\kappa-1, \mathrm{sym}^2 f) \tag{15}$$

を使うことで(14)が改良できることを注意した。ここで右辺第二項はsymmetric square L関数であるが，これについてもShimuraによって関数等式が証明されているから，上述の一般論が使える。そこで

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, f\otimes f)|^2 dt$$

$$= \int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it) L(\tfrac{1}{2}+it+\kappa-1, \mathrm{sym}^2 f)|^2 dt$$

$$\leqq \max_{1\leq t\leq T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \cdot \int_1^T |L(\kappa-\tfrac{1}{2}+it, \mathrm{sym}^2 f)|^2 dt \tag{16}$$

と進み，symmetric square の二乗平均値には一般論を適用して $O(T^{\frac{3}{2}+\varepsilon})$ と評価すれば，

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, f\otimes f)|^2 dt = O(T^{\frac{3}{2}+2\theta+\varepsilon}) \tag{17}$$

を得る。ここに θ は

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O(|t|^{\theta+\varepsilon}) \tag{18}$$

を満たす数であって，既に Hardy-Littlewood によって $\theta=\frac{1}{6}$ ととれることが示されているので，この値を用いれば (17) 右辺は $O(T^{\frac{11}{6}+\varepsilon})$ となり，(14) の改良を与える。現在最良の値である $\theta=\frac{32}{205}$ (Huxley, 2005) を用いるともう少し良い評価を得るし，Lindelöf 予想 $\theta=0$ を仮定すれば (14) 右辺を $O(T^{\frac{3}{2}+\varepsilon})$ にまで改良できるわけである。

さてこの Sankaranarayanan によるアイデアは，(15) のような分解式がある場合には常に適用可能であることは明らかである。筆者は [M2] において，Rankin-Selberg L 関数，Doi-Naganuma lift に付随する Hilbert modular 形式の L 関数，および Ikeda lift に付随するスタンダード L 関数の場合について，Sankaranarayanan のアイデアに基づく議論を提示した。

［注意］Rankin-Selberg L 関数の $\sigma=\frac{1}{2}$ における二乗平均については，Sankaranarayanan の結果以上のことが [M2] に書

かれているわけではない。しかし[M2]においてはもうひとつ，臨界領域の右寄りの部分での二乗平均値公式の誤差評価の改良というテーマも扱われている。これはRankin-Selberg L関数の場合に筆者[M1]が初めて扱った問題だが，Ivićは[Iv]において筆者の評価を改良した。Sankaranarayanan[S]にもこの問題に対する言及が見られるが，筆者は[M2]において，[Iv]の方法と[S]のアイデアを組み合わせることで，誤差評価の更なる改良が可能であることを指摘した。——

[M2]の中で特に著しい結果が得られているのがIkeda liftの場合である。まず f を再び $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する正則normalized Hecke-eigen cusp形式とし，今度はweightを 2κ とする。自然数 ν を $\nu\equiv\kappa \pmod 2$ を満たすようにとると，

$$L(s,F_0,st)=\zeta(s)\prod_{j=1}^{2\nu}L(s+\kappa+\nu-j,f) \qquad (19)$$

となるような，$Sp(2\nu,\mathbb{Z})$ に関するweight $\kappa+\nu$ のHecke-eigen Siegel cusp形式 F_0 が存在することをIkeda[Ik]は証明した。これが f のIkeda liftである。

この(19)は(15)と類似した分解式であるが，大きな違いは，右辺の各因子の臨界領域に「ずれ」があることである。式(15)においては，$\zeta(s)$ も $L(s+\kappa-1,\mathrm{sym}^2 f)$ もその臨界領域

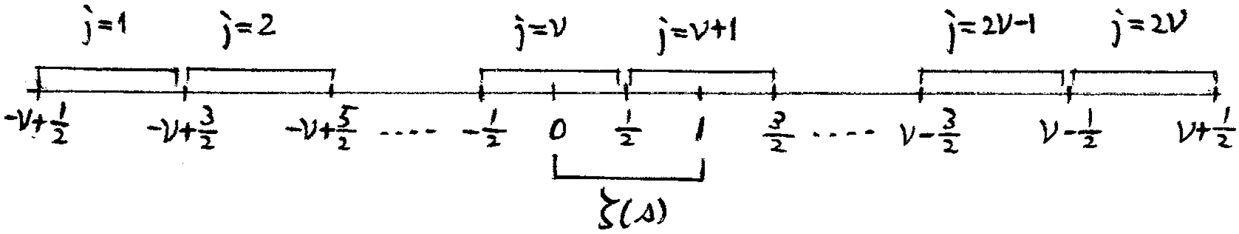
は共に $0\leqq\sigma\leqq1$ である。ところが $L(s,f)$ の臨界領域は（今は f の weight が 2κ だから）$\kappa-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\kappa+\frac{1}{2}$ であり，従って (19) の右辺の $L(s+\kappa+\nu-j,f)$ の臨界領域は

$$\kappa-\frac{1}{2}\leqq\sigma+\kappa+\nu-j\leqq\kappa+\frac{1}{2}$$

即ち

$$-\nu+j-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq-\nu+j+\frac{1}{2} \qquad (20)$$

である．また $\zeta(s)$ の臨界領域はもちろん $0\leqq\sigma\leqq1$ であり，これらを図示すると



となっている。特に各 j に対する (20) は，端点を除いて，共通部分を持たない。そこで例えば $\nu-\frac{1}{2}<\sigma\leqq\nu+\frac{1}{2}$ においては，$j=2\nu$ に対応する因子 $L(s+\kappa-\nu,f)$ だけが臨界領域内にあり，(19) 右辺の他の因子はすべてその絶対収束域にある。従って $1\ll|\zeta(s)|\ll1$，また $1\leqq j\leqq2\nu-1$ に対し

$$1\ll|L(s+\kappa+\nu-j,f)|\ll1$$

である。ここに記号 $f\ll g$ は $f=O(g)$ と同じ意味である。（下からの評価は Euler 積表示から従う。）よって

$$\int_1^T|L(\sigma+it,F_0,st)|^2\,dt\asymp\int_1^T|L(\sigma+\kappa-\nu+it,f)|^2\,dt \qquad (21)$$

である。ここに記号 $f \asymp g$ は $g \ll f \ll g$ の意。そして (21) 右辺は (4)〜(6) によって評価でき，結局 $\nu-\frac{1}{2}<\sigma\leq\nu+\frac{1}{2}$ において

$$\int_1^T |L(\sigma+it, F_0, st)|^2 dt \asymp \begin{cases} T & \nu<\sigma\leq\nu+\frac{1}{2} \quad (22) \\ T\log T & \sigma=\nu \quad (23) \\ T^{1+4(\nu-\sigma)} & \nu-\frac{1}{2}<\sigma<\nu \quad (24) \end{cases}$$

を得る。同様にして，$0\leqq\sigma\leqq1$ 以外のすべての σ に対し，Ikeda lift の L 関数の二乗平均値の大きさは定数倍を除いて定まることになる。

これに対し $0\leqq\sigma\leqq1$ においては，臨界領域内にある因子が複数個あるので状況は少し複雑になる。特に $0<\sigma<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$ の場合には今のところ二乗平均値の upper bound しか得られていない。しかし $\sigma=0, \frac{1}{2}, 1$ においてはもっと詳しいことまでわかる。以下，最も興味深いと思われる $\sigma=\frac{1}{2}$ のときの状況を述べよう。このとき臨界領域内にある因子は $\zeta(s)$, $L(s+\kappa, f)$, $L(s+\kappa-1, f)$ の三個あるが，このうち $\zeta(s)$ 以外の二個は，臨界領域といってもその境界線上にある。すると $L(s, f)$ の zero-free region に関する Moreno の結果により，上下からの評価が可能となる．即ち，$\sigma=\frac{1}{2}+it$ とすると $L(s+\kappa, f)=L(\frac{1}{2}+\kappa+it, f)$ であるが，これは

$$(\log(|t|+2))^{-2} \ll |L(\tfrac{1}{2}+\kappa+it, f)| \ll (\log(|t|+2))^2 \qquad (25)$$

を満たす。 $L(s+k-1,f)=L(-\frac{1}{2}+k+it,f)$ の評価は関数等式により(25)に帰着できる。また $j\leq\nu-1$ なら絶対収束域にあるから $|L(s+k+\nu-j,f)|\asymp 1$ であり，$j\geq\nu+2$ なる場合には関数等式を用いて $|L(s+k+\nu-j,f)|\asymp(|t|+2)^{2(j-\nu)-1}$ がわかる。以上により

$$\int_{T/2}^{T}|L(\tfrac{1}{2}+it,F_0,st)|^2dt\begin{cases}\ll T^{2\nu^2}(\log T)^8\displaystyle\int_{T/2}^{T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2dt\\[2ex] \gg T^{2\nu^2}(\log T)^{-8}\displaystyle\int_{T/2}^{T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2dt\end{cases}$$

となる。これを $T,\ T/2,\ T/4,\ T/8,\cdots$ について考えて加え，(2)を用いると

$$\frac{T^{2\nu^2+1}}{(\log T)^7}\ll\int_{1}^{T}|L(\tfrac{1}{2}+it,F_0,st)|^2dt\ll T^{2\nu^2+1}(\log T)^9 \qquad (26)$$

が得られる。以上はすべて［M2］において証明されている結果である（［M3］も参照）。

これらの結果は，Siegel modular 形式 F のスタンダード L 関数一般について得られる既述の結果（(12), (13) など）より遥かに精密である。特に(26)は，Lindelöf 予想の類似(11)が，$L(\frac{1}{2}+it,F_0,st)$ については成立しないことを示している。Lifting の像になっていない F に対する $L(\frac{1}{2}+it,F,st)$ については Lindelöf 予想が成り立っていると推測するのが自

然であろうから，lifting の像になっている時だけ，際立った違いを見せているわけである。

さて (26) はなお，左右に log-factor 分の食い違いが生じているが，この食い違いをもっと小さくすることができる。筆者は Sankaranarayanan と共同研究を行なって，次の結果を証明した（[MS]）：

$$\frac{T^{2\nu^2+1}\log T}{(\log\log T)^8} \ll \int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, F_0, st)|^2 dt \ll T^{2\nu^2+1}\log T\,(\log\log T)^8. \tag{27}$$

同様の結果が $\sigma=0,1$ に対しても成り立つ。また [MS] においては Saito-Kurokawa lift に対応する spinor L関数についても類似の結論が導かれている。

上述した (26) の証明において，log-factor が出てきた理由は，不等式 (25) にある。ところが (25) において最大値，ないしは最小値に近い値を取るような t はあまり多くはない。この「あまり多くはない」という状況を定量的に定式化して，それによって積分の評価の改良を図る，というのは解析的整数論ではしばしば使われるテクニックである。[MS] における (27) の証明にもこのテクニックが用いられる。具体的には次の補題による。Dirichlet 級数 $L(s)$ が $\sigma>1$ で絶対収束して Euler 積表示も持ち，$\sigma>1-\delta_1$ まで解析接続され，その

範囲で $s=1$ での (possible) pole を除いて正則とする。また $L(s)$ の零点 $\rho=\beta+i\gamma$ で $\beta\geq\sigma$, $|\gamma|\leq T$ を満たすものの(重複度も込めた)個数を $N_L(\sigma,T)$ とする。このとき,

補題([MS]) $L(s)$ が $\sigma>1-\delta_1$ で $L(s)=O((|t|+2)^{c_1})$ ($c_1>0$) を満たし,また任意の $\eta>0$ に対し $N_L(\sigma,T)=O(T^{c_2(1-\sigma)+\eta})$ ($c_2>0$) とする。実数 $t_1,\cdots,t_R$ が $\frac{T}{2}<t_1<\cdots<t_R\leqq T$, $|t_{r+1}-t_r|\geqq 1$ $(1\leq{}^\forall r\leq R-1)$ を満たし,

$$|\log L(1+it_r)|>A\log\log\log T-\log\varepsilon \quad (1\leq{}^\forall r\leq R)$$

が成り立つとすれば,$\delta=\delta(\varepsilon)$ が存在し,$\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\delta\downarrow 0$ で,$R=O(T^{(c_2+1)\delta}(\log T)^3)$ が成り立つ。———

この形の補題はもともとは $L(s)$ が Riemann ゼータ関数の場合に,$\sum_{n\leq x}d(n)^2$ ($d(n)$ は n の正の約数の個数)の漸近式の誤差評価を目的として Ramachandra - Sankaranarayanan によって導入されたものである。その後 Kühleitner - Nowak が,ある種の Diophantus 方程式の解の個数を評価するため,代数体の Dedekind ゼータ関数の場合に補題を示した。[MS] では上のような一般的設定にまで補題を拡張している。実際に (27) の証明に必要なのは $L(s)=L^*(s,f)$ の場合であるが,この時は Perelli の結果により $N_L(\sigma,T)$ についての必要な評価が成

りたつから，補題が使える。補題から(27)を導く計算の詳細については[MS]を参照していただきたい。

式(27)を見ていると，定数 C が存在して

$$\int_1^T |L(\tfrac{1}{2}+it, F_0, st)|^2 \, dt \sim C T^{2\nu^2+1} \log T \tag{28}$$

ではなかろうか，という気がしてくる。筆者は今のところ，これがもっともらしい予想だと思っているが，[MS]の方針ではこの予想には届かないので，証明のためには何か新しいアイデアが必要なことは間違いない。

文　献

[DHL] W. Duke, R. Howe and J.-S. Li, Estimating Hecke eigenvalues of Siegel modular forms, Duke Math. J. 67 (1992) 219-240.

[Ik] T. Ikeda, On the lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree 2n, Ann. of Math. (2) 154 (2001) 641-681.

[Iv] A. Ivić, On mean values of some zeta-functions in the critical strip, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 15 (2003) 163-178.

[KST] S. Kanemitsu, A. Sankaranarayanan and Y. Tanigawa, A mean value theorem for Dirichlet series and a general divisor problem, Monatsh. Math. 136 (2002) 17-34.

[KSS] W. Kohnen, A. Sankaranarayanan and J. Sengupta, The quadratic mean of automorphic L-functions, preprint.

[M1] K. Matsumoto, The mean values and the universality of Rankin-Selberg L-functions, in "Number Theory", Proc. Turku Symposium, M. Jutila and T. Metsänkylä (eds.), Walter de Gruyter, 2001, pp. 201-221.

[M2] K. Matsumoto, Liftings and mean value theorems for automorphic L-functions, Proc. London Math. Soc. (3) 90 (2005) 297-320.

[M3] 松本耕二, リフティングに付随する保型L関数の平均値定理, 京大数理研講究録 1384 (2004) 199-207.

[MS] K. Matsumoto and A. Sankaranarayanan, On the mean square of standard L-functions attached to Ikeda lifts, preprint.

[S] A. Sankaranarayanan, Fundamental properties of symmetric square L-functions I, Illinois J. Math. 46 (2002) 23-43.