数理解析研究所講究録 1472 巻 2006 年 185-192

渦糸系の非平衡定常分布

東京大学工学系研究科物理工学専攻　　伊藤　純至（Junshi Ito）
Department of Applied Physics, School of Engineering,
The University of Tokyo

台風のような気象現象や超伝導といった現象では、多くの渦が併合することにより大規模な渦が生まれる。このような現象を2次元渦糸系で相互作用で扱った場合、渦糸の挙動はカオス的になるが、ハミルトン形式で表せるため何らかの統計的性質があると考えられる。粘性をもち、合体が起こりうるオイラー系で流体方程式を解いた場合の統計的性質を確かめ、これを実際の現象に応用したいと考えている。

1．研究の背景と目的

毎年、日本列島では甚大な被害もたらす気象災害が発生する。この中でも、台風はスケールが特に大きな現象であり、２００４年には過去最多の上陸数を記録し、各地で洪水、強風などの被害をもたらした。この台風について、何らかの解析をしてみたいというモチベーションで研究にとりかかっている。台風にはまだまだ研究の余地が多くあり、例えば進路予報をみてみると、予報としては７２時間後までの予報円が示されるが、予報通りにはなかなか進行せず、急旋回したりする場合が多いことは周知の事実である。進路予報は大気－海洋結合モデルの数値シミュレーションを基盤としているが、その計算結果よりは通例、早めに北西から、北東方向へ転向するといった経験則も含めた予報を行っている。また普段の予報で使っているモデルでは台風は自発的に発生してくることがないので、台風が発生した後に、より細かくメッシュを区切ったモデルを作り直して、詳細な進路予報を行っている。このため一層の予報技術の向上が求められている。あるいは温暖化に伴う海水温の上昇で台風の規模、勢力が大きくなる、発生数が増えるといった気候学的な懸念もされている。

このように台風に関する気象現象には様々興味深いテーマがあるが、私の研

究の切り口としては、台風の発生過程に注目することにした。日本に到来する台風の規模は、どうやら台風の初期発生地点であるフィリピン沖の台風の発生時期の気圧配置で決まっているらしい、ということが言われている。初期配置の影響を維持したまま、日本に到来することが多いということが観測から示されている。このことから台風の中期的な予報ができる可能性がある。現状ではどのような初期配置が、どのような形として発達した台風に出現するかはまだよくわかっていないので、この対応関係を突き詰めれば、予報として活用できるのではないかと思われる。

台風発生時にはクラウドクラスターと呼ばれる、赤道収束帯で多く発生する積乱雲が集合し、それらが合体することによってより大きなスケールの台風になるという6日程度の過程がある。このような積乱雲の発生には、コリオリ力や高い温度の海水からの潜熱の供給といった要素もあるが、とりあえずそれらを抜きにして、積乱雲は地上低気圧による上昇気流で形成されるので、これを正の渦度をもつ渦糸として表現することにした。大気の運動を2次元系で表現することは水平方向と鉛直方向のスケールの違いを考慮すればそれほど悪い近似ではないと思われる。

この系は渦同士の相互作用による運動で記述できる。2つの渦があった場合、同符号のものは渦の重心の周りを回転し、異符号のものは並進するという性質がある。多数の渦がある場合は、4つ以上、あるいは3つと境界がある場合にカオス的な挙動を示すことが知られている。

この挙動において、渦糸が集合する性質がある、という予想が1949年にオンサガーによってなされている[1]。非圧縮非粘性流体の2次元渦糸系は2次元座標であるxとyを共役とした、以下に示すような渦度と渦糸間距離を用いた点渦のハミルトン形式で表すことができる。

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij}$$

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

ここでハミルトニアン、並進運動量、慣性モーメント、角運動量が保存する。この形式において統計力学的な扱いをする。ハミルトニアンをx、yについて配位空間を作り、その状態密度から仮想的な温度を定義すると、以下のような式で表される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(E)dE = \int_D \cdots \int_D dx_1 dy_1 \ldots dx_N dy_N = A^N$$

D：点渦の動く領域
A：Dの面積

$$S = \log W(E)$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$$

位相空間の積分は有限であり、かつ

$$\lim_{|E|\to\infty} W(E) = 0$$

となるので、状態密度はあるエネルギーの値で極大値をもつ。これより渦糸系の仮想的な温度は負にもなり得るということがわかる。

温度が負になるということは、ボルツマン因子を考慮すれば、エネルギーが高い状態が実現しやすいということを意味する。エネルギーの高い状態とはつまり同じ渦度の渦糸同士が凝集していくということであり、ある初期配置では渦糸同士が集合するという性質を系がもつということである。

このような性質を数値計算によって確かめている先行研究が既にいくつかある。渦を渦点近似すれば、ポテンシャル中の粒子の運動として分子動力学法で計算できるので、オイラー系より計算量は少なく済む。京大グループによって円周境界での１０００個程度の渦糸のある系の時間発展が計算されている[2]。状態密度の分布をサンプリングによって求め、負温度状態においては同符号の渦糸が凝集していくことが示されている。

また矩形の周期境界条件の場合は、渦糸の分布が

$$\nabla^2 u + \lambda^2 \sinh u = 0$$

という sinh-Poisson 方程式になり、この方程式が sine_Gordon 方程式と似た手法で解析解をもつことも示されている[3]。

渦点近似では渦は凝集はしていくが、粘性による合体は起こり得ない。しかし台風の発生段階に注目した場合には、渦の粘性による合体は必ずみられると考えられる。そこでこの研究では、計算負荷は大きいが、合体の起こりうるオイラー系のシミュレーションでの渦の挙動の統計的性質を調べること、そしてその性質を渦を伴う現象に応用していくことを目的としている。

2．シミュレーションの方法と結果、課題

以上の様な背景から、積乱雲の凝集・合体を表現する第１近似的なモデルとして、合体の起こりうる２次元オイラー系の流体方程式を解き、渦糸を初期配置した系の時間発展をみるシミュレーションを行った。有限差分法でスキームはMac法、非圧縮非粘性流体のナビエストークス方程式を解いている。差分のメッシュは正方格子で数百×数百である。ナビエストークス方程式の中に含まれる、分子粘性の項は、レイノルズ数を無限大として、とりあえず消去してしまっている。時間積分を進める際に、差分法ではエリアシングを起こしてしまうため中心差分は用いることができない。そこで風上差分を用いるのだが、これは要するに数値粘性を加えるということである。数値粘性は物理的には不自然なもので、あまり好ましくないが、この研究では１００万ステップ以上の時間発展を計算しているためどうしても必要になってくる。このため、レイノルズ数無限大としても数値粘性を含むために、粘性によって渦が合体していく。

Mac法は

$u^0 \rightarrow p^0 \rightarrow u^1 \rightarrow p^1 \rightarrow \cdots$

というように速度、圧力を順に求めていくスキームだが、速度から圧力を求める際はポアソン方程式を反復法で解いている。２００×２００のメッシュで２００回くらい反復しており、この部分が最も計算時間がかかる箇所である。反復法はGauss-Cydel法を利用している。クーラン数を満たす領域では大体きちんと収束するようである。

圧力場を求めた後に、速度場と圧力場から時間に関する前進差分を行って、次ステップの速度場を求める。陽解法なのでクーラン数は満たさなければならない。この際の前進差分に前述の風上差分のスキームを用いなければならない。この風上差分が１次精度や通常用いられる３次精度であると、粘性の効果があまりにも大きいように見える。ふたつの同符号の渦度をもつ渦を近づけて、回転させているだけで４０万ステップ程度で合体して、ひとつの渦になってしまう。

この風上差分を５次精度にすると飛躍的に渦の寿命が延びて、同じ初期配置で１０００万ステップ以上、渦が合体せず回転していること状況がみられた。これは以前のスキームと比べて、粘性が「ない」状態に見える。中心差分は数値粘性はないのだが１０万ステップで程度で、理論通りに発散してしまい利用することができない。

このスキームはひとつの格子点の差分をする場合、上下左右３つずつの点の値が必要となるため、境界での計算方法は、複雑になってしまう。そのため当

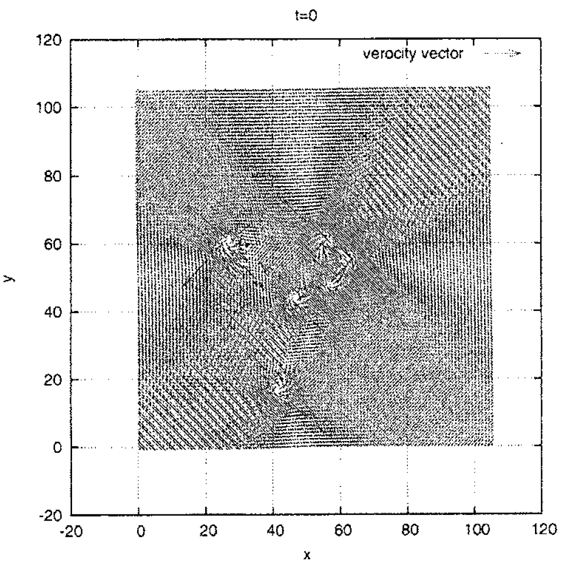
初はスキームが単純になる周期境界条件を x 方向、y 方向両方に課した。

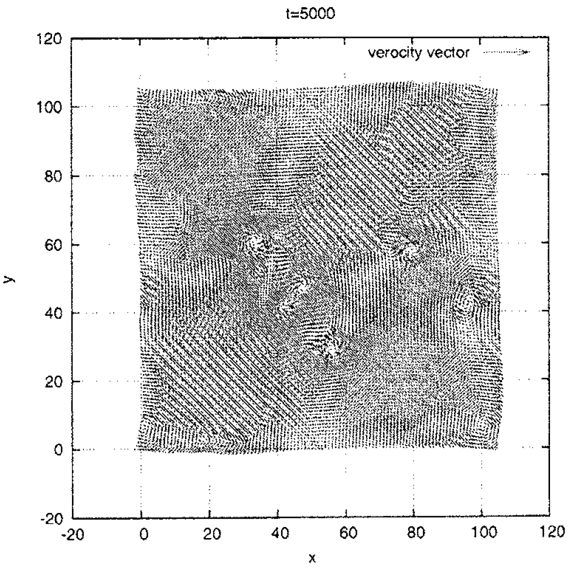
初期条件として、渦糸の速度分布

$$u_x = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{-x}{x^2+y^2}$$

に従って、１０本程度を重ね合わせて配置した。周期境界条件なので周期を超えた裾を拡張して足し合わせるなどの工夫も行った。

このシミュレーションによって、２次元グラフ上で各格子点上の速度ベクトルを表示すると一応、渦の運動が再現できているように見えた。１０数本渦糸を配置して、時間積分していくと１００万ステップ程度で、数個の渦に合体していく。次の図が表示例である。



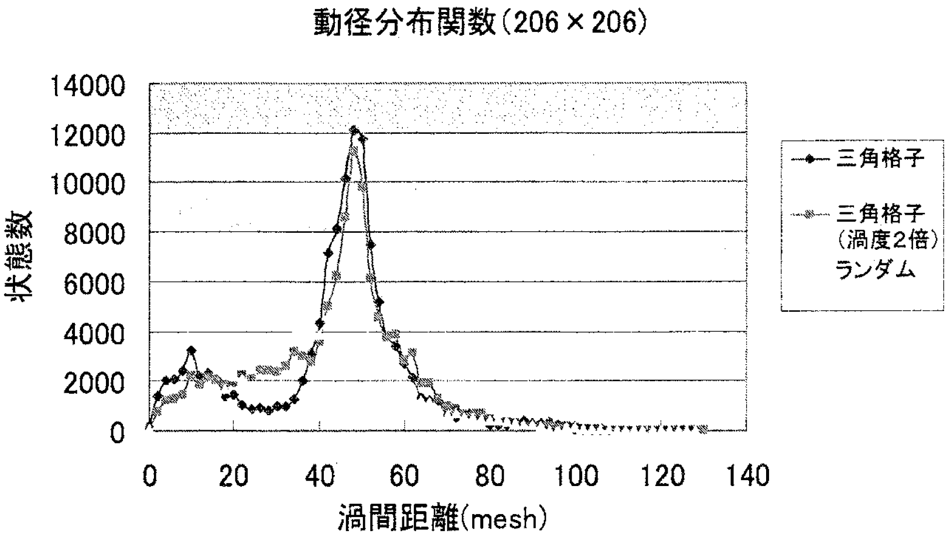


周期境界条件で同符号の渦ばかりを初期配置した系において、計算できているのはおかしいのではないか、という指摘を受けた。周期境界条件のポアソン方程式は解けるのか？という疑問はもっていたのだが、計算できているので収束しているのだろうと思っていた。しかし実際にはプログラム上のミスがあることがわかり、ポアソン方程式は自由端で解いてしまっていた。このため速度場は周期境界でありながら、圧力場は自由端という奇妙な状況を生んでしまっていた。

速度ベクトルの循環を計算し、その極大となる点を求めると、渦の中心位置を特定することができて、渦の運動の解析を行うことができる。ただし初期配

置では渦糸であるが、時間が進むに従って粘性によって、渦糸はなだらかな山になっていく。この山には若干の凸凹もあるため極大値を求めるにはいくらか工夫が必要である。特に渦同士が接近してくるとなかなか検出は難しくなる。画像処理と同じようにフーリエ変換をしてローパスフィルターをかけたりしてみたが、あまりうまくいかなかった。結局、渦の個数は減少はするけれども、増加はしないといったフィードバックをかけることで最大限うまく検出できるように工夫をしており、ある程度はうまく機能している。

検出できたステップでのみ動径分布を求めると次の図のようなグラフが得られる。例えばこのグラフの裾から渦の分布について、何らかの統計的性質が言えないだろうかと考えている。オンサガーの予想はミクロカノニカル分布を考えているが、粘性が加わるとカノニカル分布、渦の合体ということも加わるとグランドカノニカル分布のようになったものとして発展的に定式化することを目指している。



3．その他諸々の課題

研究はまだ初歩であり、今後への課題は２章で述べたことを含めたくさんある。渦の統計的性質では、オイラー系で計算された例はないと思い込んでいたのだが、周期境界でスペクトル法によって有限のレイノルズ数の場合が解析された先行例があり[4]、注意深く研究を進めていかなければならないことなど、京

大グループの方に指導していただいた。

圧力まで含めた、厳密な周期境界にする場合はポアソン方程式の解を収束させる都合上、1周期の中の渦度を厳密に 0 にしないといけない。圧力にも周期境界条件を課し、渦糸を渦度が0になるよう初期配置させて試してみたが、渦糸の速度分布式にしたがって格子点上に置く時点での、倍精度浮動小数点の演算の誤差のみで収束しなくなってしまう。数本程度の少数の弱い渦糸があるだけの場合は収束するが、渦度を大きくしたり、渦の数を増やしたりすると収束しなくなってしまう。このとき数値粘性による散逸があるので、1ステップ目のポアソン方程式が計算できると、以後のステップでも解いていけることがわかった。

そこで境界条件を変更してみた。その他の境界条件としては固定境界、流出境界、遠方境界などが考えられる。固定境界は、大気の運動を考える場合には自然な状況ではないように見えるが、高気圧に囲まれた空間と考えれば、周期境界よりもむしろ自然なように見える。一例として台風は太平洋高気圧の壁に沿った正の渦度をもつ渦がたどるコースを通って、低緯度地方から日本へやってくる。また固定境界の場合は単一符号の渦度の渦だけであってもポアソン方程式が解けるので、大気中に低気圧だけがいくつかある場合を想定しやすいという利点がある。周期境界で同じ状況を再現するには高気圧に相当する負の渦度の小さい渦糸を万遍に配置するということも考えたが、これは初期配置の誤差が蓄積してしまうことから非現実的である。

このため固定境界のシミュレーションを試し、渦の挙動の解析を行っているが、境界付近での微分精度がどうしても悪くなってしまい、境界である固定端に近づいた渦が過度に減衰してしまう。合体ではなく境界近傍に近づくことで消えてしまう渦がみられる。境界付近の計算方法はかなりの工夫を要さなければいけない課題である。境界の高次精度微分の画一された手法はまだ無いようなのでいろいろ試してみなければならない。渦を境界から離すというというのはひとつの対策となる。しかしこのシミュレーションではステップ数が多いため、境界に近づいていく渦が出現する可能性が高いことに注意しなければならない。

粘性としては、レイノルズ粘性をまだ導入しておらず、定量的に粘性の影響を扱うには不完全である。これは単にナビエストークス方程式の粘性項を入れればいいので、すぐに解決できる問題である。スキームが確立し定量的な解析が行えると判断でき次第改良したい。だがこの時に数値粘性をどのような扱いにすればいいのか、非常に難しい問題になり得る。これは差分法には必ず付きまとう問題であり、格子間隔を変更して、定性的に影響があまりない場合に、数値粘性の影響が少ない、というような示し方をしなければならないようであ

る。

現状ではひとつの初期配置からの数値計算に 1CPU で丸一日くらいかかっている。これはひとつの状態をみるにはそれほど長い時間ではないが、系統的な解析をするには長いと思われる。計算時間は主にポアソン方程式の反復にかかっているようなので、この部分を並列化すればいくらか計算時間の短縮が期待できる。

非圧縮性の条件を課すことは、大規模な流体の計算においては計算負荷がかかるため厄介であり、マッハ数が小さい場合でも、連続の式の代わりに、エネルギー保存の式を入れて式を閉じる、圧縮性流体のスキームとして解いた方が計算負荷は小さくなる。流体のシミュレーションはこちらの方が多いようなのでこのようなスキームを採用することも考えている。

そして、実際の現象である台風について応用する場合について述べておく。当然のことだが、台風は粘性によって減衰するだけではなく、海水からエネルギーを水蒸気をして潜熱として受け取り、上昇気流に乗った水蒸気が上空で凝結し、この時潜熱が大気の運動エネルギーとなり、台風は発達していく。この効果を取り入れたりすれば、実際の現象と対応がつきそうである。総観規模での上昇流、下降流の速さは 0.01m/s から 0.1m/s なので 2 次元系で十分近似できそうだが、個々の積乱雲の内部では 10m/s 程度になることもあるので、3 次元で表現して、雲で出来るというような状況も再現してみたい。

参考文献

[1] L.Onsager *Nuovo Cimento Suppl.* **6**, 279 (1949)

[2] Y.Yatsuyanagi, Y.Kiwamoto, H.Tomita, M.M.Sano, T.Yoshida, and T.Ebisuzaki *Phys.Rev.Lett.* **94**, 054502 (2005)

[3] A.C.Ting, H.H.Chen, and Y.C.Lee *Physica* **26D**, 37 (1987)

[4] D.Montgonery, X.Shan, and W.H.Matthaeus *Phys.Fluids* A **5**(9), 2207 (1993)