

## 結合片持ち梁における相空間の大域構造と空間局在モードの移動

京都大学工学研究科 電気工学専攻

木村 真之 (Masayuki KIMURA)<sup>1</sup>, 引原 隆士 (Takashi HIKIHARA)<sup>2</sup>

Department of Electrical Engineering,  
Kyoto University

### 1 はじめに

半導体製造技術を応用した MEMS 技術 (Micro Electro Mechanical System Technology) は、ナノテクノロジーの根幹をなす技術として、様々に研究・開発が行われている<sup>1)</sup>。MEMS 技術を用いることでセンサ、アクチュエータを小型化することができ、それらを組み合わせることでマイクロ・ナノメートルオーダーの物体の操作が可能となる<sup>1)</sup>。このような微小領域での物体操作は、ボトムアップのナノテクノロジーとして重要視されている。

近年、M.Sato, A.J.Sievers らによって、MEMS 技術によって作製された小型の結合片持ち梁上に Intrinsic Localized Mode(ILM) と呼ばれる空間局在モードが存在することが実験的に示された<sup>2, 3)</sup>。ILM とは非線形な結合振動子系における、振幅分布が空間的に局在した周期振動のことで、1988 年に A.J.Sievers, S.Takeno らによって、その存在が理論的に示された<sup>4)</sup>。Siervers, Takeno らによって発見された ILM は振幅分布が奇対称であり、Siervers-Takeno モード (ST モード) と呼ばれている<sup>6, 7)</sup>(図 1(a))。また、1990 年には Siervers, Takeno らが発見した ILM と空間的な対称性の異なる ILM が J.B.Page により理論的に発見された<sup>5)</sup>。この ILM は振幅分布が偶対称であり、Page モード (P モード) と呼ばれている<sup>6, 7)</sup>(図 1(b))。

結合片持ち梁上に ILM が存在する状態は、空間局所的に数本の梁のみが大振幅で振動し、その他の梁はほとんど振動しない状態である。つまり、空間的広がりを持つ結合片持ち梁のごく一部が振動している状態である。したがって、結合片持ち梁上の ILM を用いて、それに対峙する空間局所的に存在する対象に対して物理的に何らかの相互作用を与えることができると考えられる。さらに、ILM が存在する位置を制御することができれば、例えば微小な結合片持ち梁を用いてマイクロメートルオーダーの物体を搬送・操作できる可能性もある。

結合片持ち梁上を動く移動型の ILM は、系に共存して定在している ILM 間を遷移することで移動すると予想される。これは結合振動子系における解の移動現象について、磁気弾性結合系における波の伝搬に関してなされた結果に基づくものである<sup>8, 9)</sup>。磁気弾性結合系における波の移動は、系の相空間の大域構造、特に共存する不安定な定在波間を結ぶヘテロクリニック交錯が深く関与していることが明らかにされている<sup>10)</sup>。したがって、ILM の移動も結合片持ち梁系の相空間の大域構造に依存すると考えられる。

本報告では、まず結合片持ち梁に多数の ILM が共存することを数値計算に基づいて示し、エネルギーによる ILM の変化を検討する。また、不安定な ILM の持つ不変多様体の構造と、不安定多様体に沿った軌道のエネルギーに対する変化を詳細に検討することで、結合片持ち梁における移動型の ILM が不安定な ILM の持つ不変多様体の構造に支配されることを示す。

<sup>1</sup>kimura@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

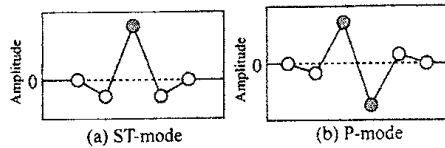


図 1: Siervers-Takeno Mode(a) と Page Mode(b).

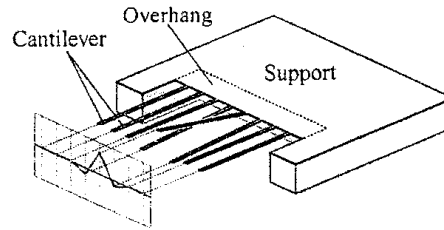


図 2: 解析対象の結合片持ち梁

## 2 結合片持ち梁と数式モデル

本研究では, M.Sato らによって製作された結合片持ち梁をもとに, 図 2 のように 8 本の片持ち梁を配置した, 両端を固定したモデルを検討の対象とする<sup>2, 3)</sup>.

それらの各片持ち梁の振動による先端部の変位を  $u_i$  ( $i \in \{0, \dots, 9\}$ ) とし, 図 2 左下のようなグラフで表す. 片持ち梁間の相互作用力は, 隣り合う片持ち梁の変位の差に応じた“オーバーハング”部分のねじれによって生じる. 文献<sup>3)</sup>における結合片持ち梁は SiN 製で, 長さ  $50\mu\text{m}$ , 幅  $10\mu\text{m}$ , 厚さ  $300\text{nm}$ , 片持ち梁間隔  $110\mu\text{m}$  である. また, オーバーハング部分は  $30\mu\text{m}$  である. 以上の物理系において各片持ち梁の振動を表す偏微分方程式に関して, 一次振動モードのみに着目して無次元化すると次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= v_i \\ \frac{dv_i}{dt} &= -\alpha_1 u_i - \beta_1 u_i^3 \\ &\quad -\alpha_2 (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) \\ &\quad -\beta_2 (u_i - u_{i-1})^3 - \beta_2 (u_i - u_{i+1})^3 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, 式のパラメータは文献<sup>3)</sup>の値を用いて,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 10^{-2}$ ,  $\beta_2 = 10^{-3}$  とする. 結合片持ち梁系の両端は固定されているため, 境界条件は  $u_0 = v_0 = u_9 = v_9 = 0$  と与えることができる.

## 3 ILM の探索手法と安定性判別

周期解である ILM は局在していても次元が高く, 時間の連続波形で把握することは難しい. そこで, 以下の式で定義される断面  $\Sigma_4$  を用いて, ポアンカレ点を得る.

$$\Sigma_4 = \{(u_1, \dots, u_8, v_1, \dots, v_8) \in \mathbf{R}^{16} \mid u_4 > 0, v_4 = 0\} \quad (2)$$

以後は軌道と  $\Sigma_4$  との交点を考察の対象とする. これより ILM は  $\Sigma_4$  上で不動点として表される. 写像  $\mathcal{F}$  を

$$\mathcal{F}: \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 \quad (3)$$

とする。ここで  $\Sigma_4$  上の点  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{15}$ ,  $k \in \mathbf{N}$  は,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_k) \quad (4)$$

に従う。 $\Sigma_4$  上の不動点の探索には Newton 法を用いる。また、写像  $\mathcal{F}$  の計算には 6 次の Symplectic 数値積分法<sup>11)</sup>を用いた。

得られた不動点を  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^{15}$  とすると、不動点  $\mathbf{x}^*$  の近傍のベクトル場に付随する線形系は、

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)\delta \mathbf{x}_k \quad (5)$$

と表すことができる。本報告では、式 (5) における行列  $D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$  を数値的に求め、固有値を計算することで ILM の安定性を判別している。

#### 4 結合片持ち梁に共存する ILM とエネルギーに対する依存性

ここでは、数値計算により得られた空間的位置の異なる ILM について述べる。ILM の周期  $T = 4.0, 4.5, 5.0, 5.16, 5.2$  毎に得られた ILM の振幅分布を図 3, 4, 5, 6, 7 に示す。図 2 の結合片持ち梁には、ST1~ST8, P1-2~P7-8 の ILM が存在しているが、本報告では、端の影響を無視できる ST3, P3-4, ST4, P4-5, ST5 のみを検討対象とする。それぞれの図は横軸は片持ち梁の添え字  $i \in \{0, \dots, 9\}$ , 縦軸は片持ち梁先端の変位  $u_i$  である。前述したように、ILM には P モードと ST モードの振幅の空間分布の対称性が異なるモードが存在する<sup>7)</sup>。結合片持ち梁においては、ST モードは振幅の空間分布の中心が片持ち梁上であるのに対し、P モードは片持ち梁間である。したがって、図 4, 5, 6 における、“ST3” は“3 番目の片持ち梁上に振幅分布の中心を持つ ST モード”を表し、“P3-4” は“3 番目の片持ち梁と 4 番目の片持ち梁の間に振幅分布の中心を持つ P モード”を表す。

安定性解析より、P4-5, P3-4 は不安定、ST3, ST4, ST5 は安定という結果が得られた。すなわち、P モードは不安定、ST モードは安定であり、それらは図 2 の結合片持ち梁上に交互に存在している。

また、ILM の周期が  $T = 5.16$  (図 6) においては、ST3, P3-4 が存在せず、 $T = 5.2$  (図 7) では、ST4, ST5 も存在しない。さらに、周期  $T$  の増加にしたがって、ILM の振幅は小さくなり、その空間分布は広くなる傾向がある。このような ILM の周期  $T$  に対する変化を詳細に検討するために、周期  $T$  を少しずつ変化させながら ILM の探索を繰り返し行った。まず、以下の式 6 で定義される結合片持ち梁系の全エネルギー  $E$  と ILM の周期  $T$  の関係を図 8, 9 に示す。続いて、それらの ILM の変化を図 11, 12 に示す。

$$E = \sum_{i=0}^9 \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 + \frac{\alpha_1}{2} u_i^2 + \frac{\beta_1}{4} u_i^4 + \frac{\alpha_2}{2} (u_i - u_{i-1})^2 + \frac{\beta_2}{4} (u_i - u_{i-1})^4 \right\} \quad (6)$$

図 8, 9 より、ILM の周期  $T$  の増加に伴い、エネルギー  $E$  が単調減少することが分かる。すなわち、 $E$  と  $T$  は一対一の関係にあり、周期  $T$  の変化はエネルギーの変化と見なすことができる。しかしながら、図 9 の分岐点近傍では (図 10)、周期  $T$  とエネルギー  $E$  の一対一の関係が成り立たない。安定性はエネルギーの極小点を境に変化することから、厳密には ILM はエネルギーに依存して変化すると考えられ、ILM はあるエネルギー閾値以下では存

在しない。以降では、図10のような分岐点近傍ではなく、周期  $T$  とエネルギー  $E$  の一対一の関係が成立する領域を検討の対象とする。したがって、エネルギー  $E$  の増加は周期  $T$  の減少を意味する。

エネルギー  $E$  に対する ILM の変化は図11, 12に示す通りである。図11は  $\Sigma_4$  上の点を  $u_4$  を横軸,  $u_5$  を縦軸にとった平面へ射影したものであり、図12は  $u_3$  を横軸,  $u_4$  を縦軸にとった平面へ射影したものである。また、図中の矢印は、エネルギーを増加(周期を減少)させたときの点の移動方向を表している。図11において、エネルギーが低い場合 ( $E < E_{b1} = 14.4$  ( $T > 5.175$ )) は、安定な周期解が存在し、エネルギーが  $E > E_{b1}$  ( $T < 5.175$ ) となると、P4-5, ST4, ST5が発生する。また、図12においては  $E > E_{b2} = 19.1$  でP3-4とST3が発生するが、 $E < E_{b2}$  ( $T > 5.108$ ) では、図11のような安定な周期解は存在しない。図中の●, ◆, ○, □と△はそれぞれ図3, 図4, 図5, 図6と図7のILMに対応する。これより、エネルギーを増加(周期を減少)させると、ILMは空間的により狭い範囲に振幅分布が局在するようになることが分かる。

## 5 ILMの不変多様体と移動型のILM

前節ではエネルギーの増加に伴うILMの変化を検討した。ここでは、エネルギー  $E$  に対する不安定なPモードの持つ不変多様体の構造変化と、移動するILMの挙動について数値的に検討する。

### Pモードの特性乗数と不変多様体

図13, 14に  $T = 4.5$  におけるP3-4, P4-5の特性乗数を複素平面上にプロットしたものをそれぞれ示す。図から明らかなように、P3-4, P4-5は  $\lambda_u > 1.0$ ,  $\lambda_s < 1.0$  となるような実固有値を1つずつ持ち、他の固有値は全て単位円上に位置している。したがって、P3-4, P4-5は1次元の不安定多様体と1次元の安定多様体を持つ。続いて、P3-4, P4-5の持つ不変多様体であるが、式(2)は時間に対して対称であるため、不安定多様体と安定多様体も対称である。図15, 16に  $T = 4.5$  のときのP4-5の不安定多様体, 安定多様体をそれぞれ示す。不安定多様体と安定多様体の対称性は図から明らかである。よって、以後は不安定多様体のみを考察する。

P4-5の不安定多様体を、 $T = 4.5, 5.0, 5.16$ のそれぞれの場合について、図15, 17, 18に示す。図はP4-5の特性乗数  $\lambda_u, \lambda_s$  にそれぞれ対応する固有ベクトル  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s$  の張る平面へ不安定多様体を射影したものとなっている。図15, 17, 18において、P4-5からのびる不安定多様体は隣り合うST4, ST5を周回する構造が共通であるが、エネルギーが減少するにしたがって、P4-5の近傍へ再び回帰するようになる。

P3-4の不安定多様体は、 $T = 4.5, 5.0$ の場合を図19, 20に示し、 $T = 5.05$ の場合を図21に示す。図19, 20は、P3-4の特性乗数  $\lambda_u, \lambda_s$  にそれぞれ対応する固有ベクトル  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s$  の張る平面へ不安定多様体を射影したものであり、図21はP3-4でなくP4-5の固有ベクトル  $\mathbf{e}_u(\text{P4-5}), \mathbf{e}_s(\text{P4-5})$  の張る平面へ不安定多様体を射影したものである。 $T = 4.5, 5.0$ (図19, 20)の場合は、P4-5の場合と同様に、P3-4から伸びる不安定多様体が隣り合うST3, ST4の周りを周回する構造になっており、エネルギーの減少に伴いP3-4の近傍へ回帰する

傾向が強まる。また、 $T = 5.05$  (図 21) においては ST4 側へ伸びる多様体は ST5 まで伸びており、図 19, 20 とはかなり様相の異なる構造をしている。

### 解の時間発展

続いて、不動点 P3-4 の近傍に初期値を取り、解の時間発展を計算した。このとき、系のエネルギー分布関数  $E(i, t)$  を以下のように定義して、その時間変化を図 22, 23, 24 に示す。

$$E(i, t) = \frac{1}{2}v_i^2 + \frac{\alpha_1}{2}u_i^2 + \frac{\alpha_2}{4}u_i^4 \quad (7)$$

$$E(i - \frac{1}{2}, t) = \frac{\beta_1}{2}(u_i - u_{i-1})^2 + \frac{\beta_2}{4}(u_i - u_{i-1})^4 \quad (8)$$

$$i \in \{0, 1, \dots, 8\}$$

図 22~24 より、P3-4 の不安定多様体に沿った軌道は、エネルギーの空間分布の局在性を保ちつつ、その分布の中心が移動するような軌道であることがわかる。 $T = 4.5$  (図 22) の場合は、 $t = 100$  程度で 3~4 番目の片持ち梁にエネルギーの局在した状態から 4 番目の片持ち梁にエネルギーが局在した状態へ移る様子が確認できる。すなわち P3-4 から ST4 へと解が移動したと見なせる。また  $T = 5.0$  (図 23) の場合も同様に  $t = 350$  から  $t = 600$  にかけて解が P3-4 から ST4 へ移動し、再び P3-4 へ回帰する様子が分かる。 $T = 5.05$  (図 24) の場合においても、P3-4 から ST5 まで解が移動する様子が確認できる。

以上から、結合片持ち梁においてエネルギーの局在性を保ったまま ILM が移動することが可能であり、その移動範囲は、P モードの不安定多様体の構造に支配されると考えられる。

## 6 おわりに

本報告では、散逸や外部励振のない結合片持ち梁系に共存する ILM と移動する ILM について数値的に検討した結果を述べた。その結果、結合片持ち梁には安定な ST モードと不安定な P モードが交互に存在しており、それらの ILM はエネルギーがある閾値以上で生じることが明らかになった。また、移動型の ILM の挙動は定在する不安定な ILM の不変多様体の構造に支配されること、特に不安定な ILM の近傍から出発する移動型の ILM は、その移動範囲が不変多様体の構造に依存することを示した。

今後は、式 2 におけるパラメータ  $\alpha_2, \beta_2$  を変化させた場合について、ILM の安定性や不変多様体の構造の変化を検討していく。また、現実のモデルに則して散逸・外部励振を考慮したモデルについて、ILM の共存・移動を検討する予定である。

本研究において、M.Sato 助教授 (金沢大学) には結合片持ち梁のモデルに関して有益な助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 藤田 博之, “マイクロ・ナノマシン技術入門,” 工業調査会 (2003) pp47-75.
- 2) M.Sato, B.E.Hubbard, A.J.Sievers, *et al.*, “Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array,” *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 044102.
- 3) M.Sato, B.E.Hubbard, L.Q.English, A.J.Sievers, *et al.*, “Study of intrinsic localized vibrational modes in micromechanical oscillator arrays,” *Chaos.* **13** (2003) 702.
- 4) A. J. Sievers, S. Takeno, “Intrinsic localized modes in anharmonic crystals,” *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 970.
- 5) J. B. Page, “Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems,” *Phys. Rev. B*, **41** (1990) 7835.
- 6) S. Flach, C.R.Willis, “Discrete breathers,” *Physics Reports* **295** (1998) 181.
- 7) S. Flach, A. Gorbach, “Discrete breathers in Fermi-Pasta-Ulam lattices,” *Chaos*, **15** (2005) 15112.
- 8) T. Hikiyara, Y. Okamoto, Y. Ueda, “An experimental spatio-temporal state transition of coupled magneto-elastic system,” *Chaos* **7** (1997) 810.
- 9) T. Hikiyara, K. Torii, Y. Ueda, “Quasi-periodic wave and its bifurcation in coupled magneto-elastic beam system,” *Phys. Lett. A* **155** (2001) 155.
- 10) T. Hikiyara, K.Torii, Y.Ueda, “Wave and basin structure in spatially coupled magneto-elastic beam system – Transitions between coexisting wave solutions,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **11** (2001) 999.
- 11) M. Suzuki, “General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics,” *J. Math. Phys.*, **32** (1991) 400.

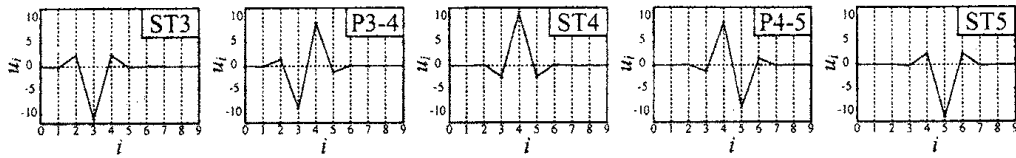


図 3: 周期  $T = 4.0$  の ILM

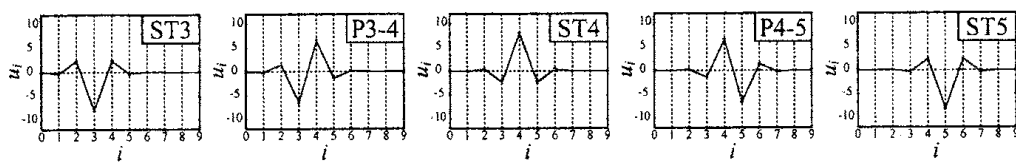


図 4: 周期  $T = 4.5$  の ILM

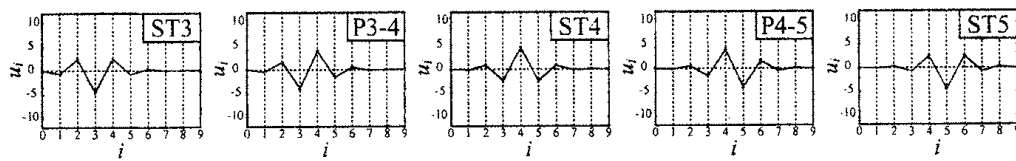


図 5: 周期  $T = 5.0$  の ILM

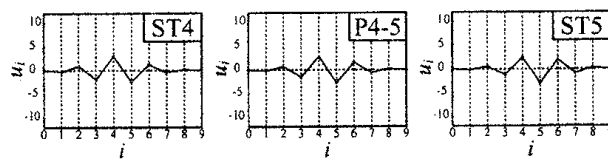


図 6: 周期  $T = 5.16$  の ILM. ST3, P3-4 は存在しない.

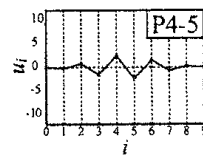


図 7: 周期  $T = 5.2$  では P4-5 のみ存在する.

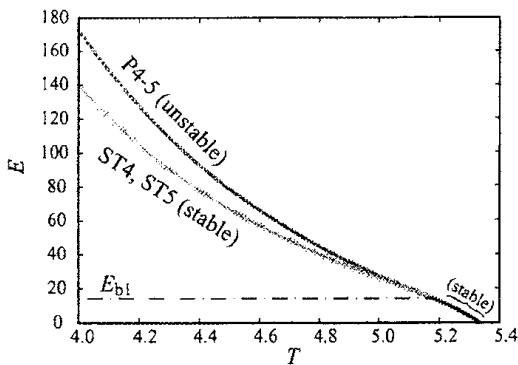


図 8: P4-5, ST4, ST5 の周期とエネルギーの関係.

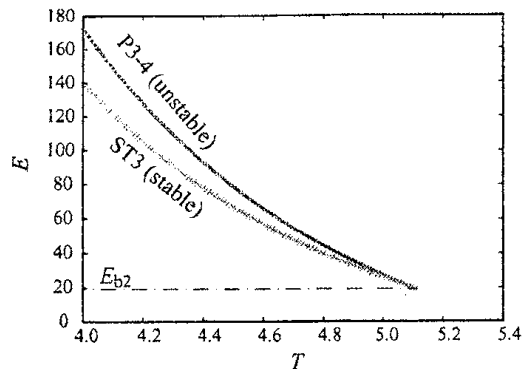


図 9: P3-4, ST3 の周期とエネルギーの関係.

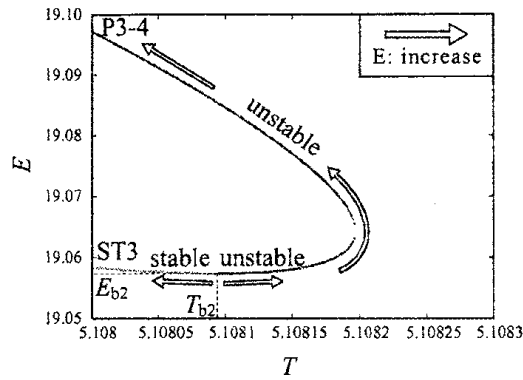


図 10: 図 11 の分岐点近傍を拡大した図.

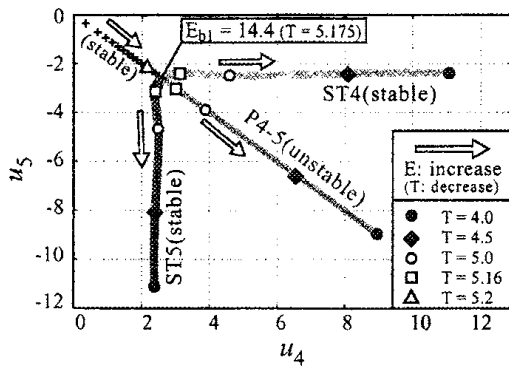


図 11: エネルギー  $E$  と ST4, P4-5, ST5 の関係. 矢印はエネルギーを増加 (周期を減少) させた場合の ILM の変化の方向を示している. ST4, P4-5, ST5 が存在するための閾値  $E_{b1}$  は 14.4 である.

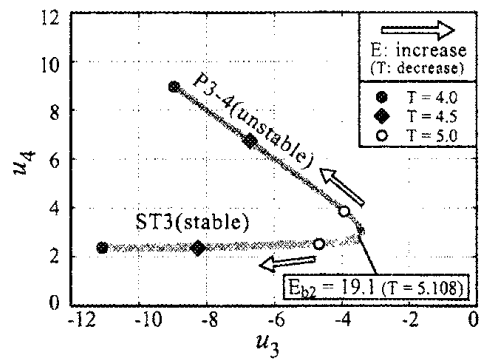


図 12: エネルギー  $E$  と ST3, P3-4 の関係. 矢印はエネルギーを増加 (周期を減少) させた場合の ILM の変化の方向を示している. ST3, P3-4 が存在するための閾値  $E_{b2}$  は 19.1 である.



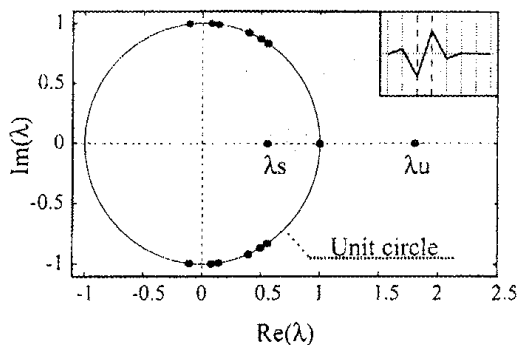


図 13:  $T = 4.5$  における P3-4 の特性乗数を複素平面上にプロットした図. 図中の折れ線グラフは P3-4 の振幅分布である.

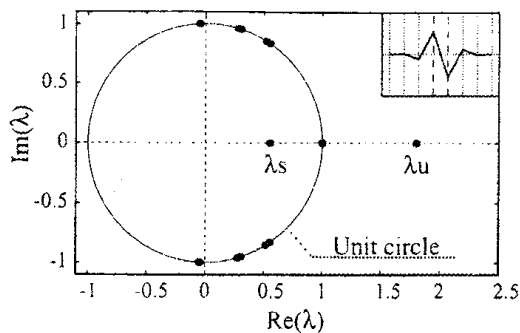


図 14:  $T = 4.5$  における P4-5 の特性乗数を複素平面上にプロットした図. 図中の折れ線グラフは P4-5 の振幅分布である.

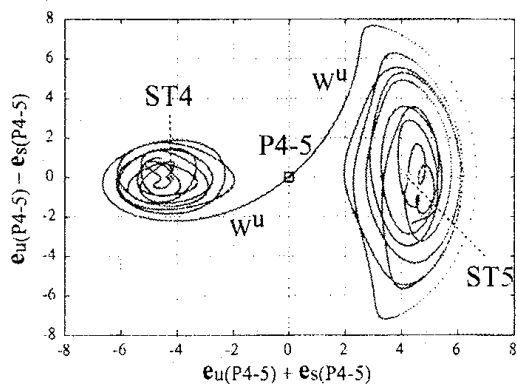


図 15:  $T = 4.5$  における P4-5 のもつ 1 次元不安定多様体の固有ベクトル  $e_{u(P4-5)}$ ,  $e_{s(P4-5)}$  の張る平面への射影.

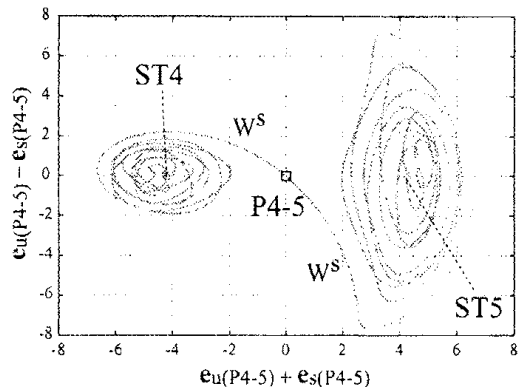


図 16:  $T = 4.5$  における P4-5 のもつ 1 次元安定多様体の固有ベクトル  $e_{u(P4-5)}$ ,  $e_{s(P4-5)}$  の張る平面への射影.

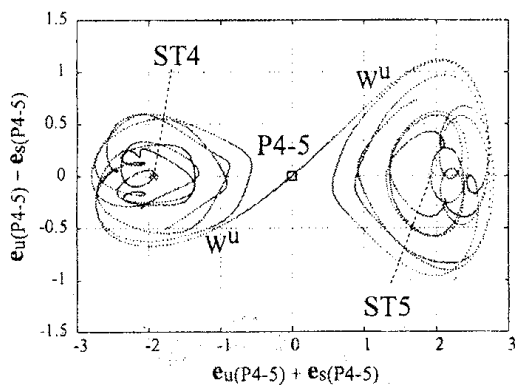


図 17:  $T = 5.0$  における P4-5 のもつ 1 次元不安定多様体の固有ベクトル  $e_{u(P4-5)}$ ,  $e_{s(P4-5)}$  の張る平面への射影.

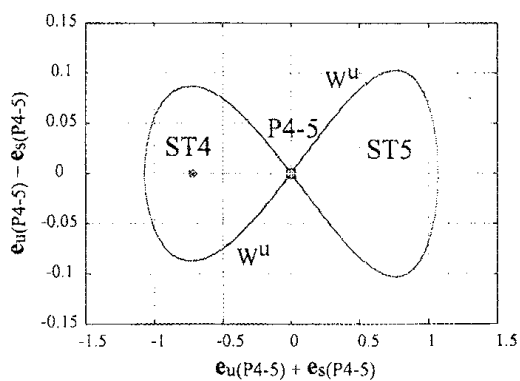


図 18:  $T = 5.16$  における P4-5 のもつ 1 次元不安定多様体の固有ベクトル  $e_{u(P4-5)}$ ,  $e_{s(P4-5)}$  の張る平面への射影.

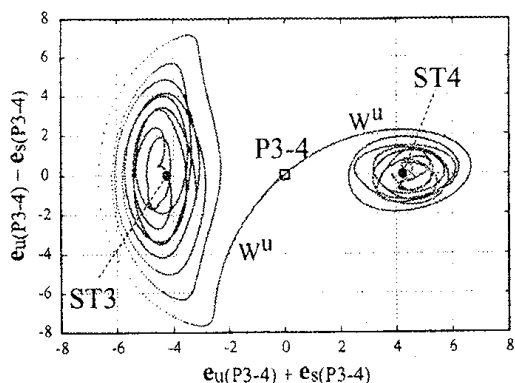


図 19:  $T = 4.5$  における P3-4 のもつ 1 次元不安定多様体の固有ベクトル  $e_u(P3-4)$ ,  $e_s(P3-4)$  の張る平面への射影.

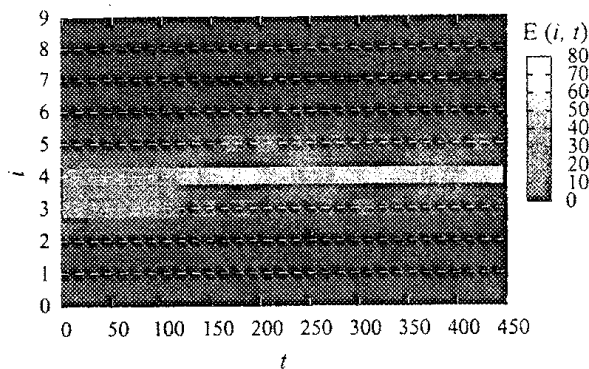


図 22:  $T = 4.5$  における P3-4 の近傍を初期値とした場合の, 系のエネルギー分布  $E(i, t)$  の時間変化.

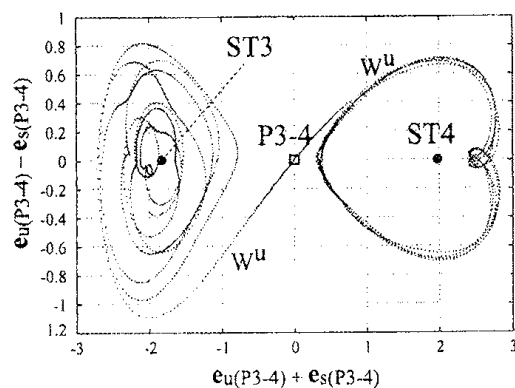


図 20:  $T = 5.0$  における P3-4 のもつ 1 次元不安定多様体の固有ベクトル  $e_u(P3-4)$ ,  $e_s(P3-4)$  の張る平面への射影.

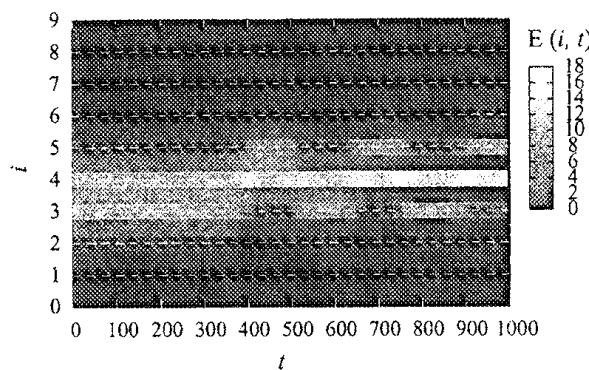


図 23:  $T = 5.0$  における P3-4 の近傍を初期値とした場合の, 系のエネルギー分布  $E(i, t)$  の時間変化.

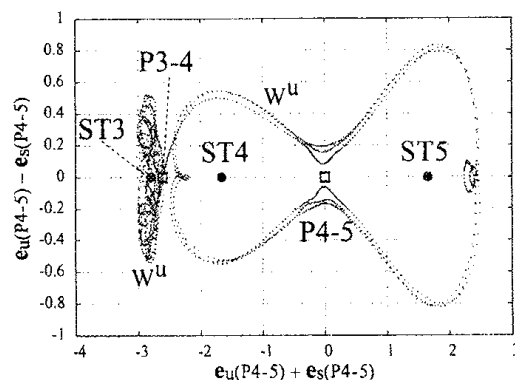


図 21:  $T = 5.05$  における P3-4 のもつ 1 次元不安定多様体の,  $T = 5.05$  における P4-5 の固有ベクトル  $e_u(P4-5)$ ,  $e_s(P4-5)$  の張る平面への射影.

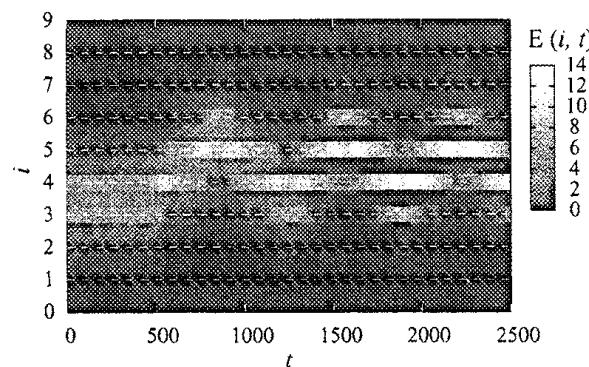


図 24:  $T = 5.05$  における P3-4 の近傍を初期値とした場合の, 系のエネルギー分布  $E(i, t)$  の時間変化.