

普遍指標と q -パンルヴェ方程式

津田 照久 (TSUDA, Teruhisa)

神戸大学大学院自然科学研究科
Department of Mathematics, Kobe University

概要

普遍指標とは分割 (ヤング図形) の組に対応するシューア多項式の一般化である。本稿では、普遍指標を解に持つような 2 次元格子上的可積分な q -差分方程式系 (格子 q -UC 階層) を導入する。その相似簡約として、 $A_{2g+1}^{(1)}$ ($g \geq 1$), $D_5^{(1)}$, $E_6^{(1)}$ 型の q -パンルヴェ方程式が得られることを示す。その帰結として、 q -パンルヴェ方程式の普遍指標による代数的な解が直ちに従う。ここでは特に $E_6^{(1)}$ の場合の具体的な相似簡約の過程を、有理曲面の代数幾何に基づいたタウ函数の枠組みを経由しながら、説明する。

1 はじめに

普遍指標 (universal character) とは小池和彦によるシューア多項式の一般化である。シューア多項式 S_λ が一般線形群の分割 λ に対応した既約多項式表現の指標であるのに対して、普遍指標 $S_{[\lambda, \mu]}$ は、その分割の組 λ, μ に対応した既約有理表現の指標を与える ([10] 参照)。

無限可積分系の理論と一般線形群の表現論は密接に関係している。事実、佐藤幹夫らが示したように (ソリトン型の非線形偏微分方程式の最も重要な系列である) KP 階層はシューア多項式が特徴付ける無限可積分系と看做される ([12, 16] 等参照)。一方、筆者は論文 [18, 25] において、普遍指標に付随する KP 階層の一つの拡張を提案した。これを universal character の頭文字をとって UC 階層と呼ぶ。UC 階層の解空間は、佐藤グラスマン多様体 (\approx {KP 階層の解}) の直積を成しており、特に同次多項式解は普遍指標全体の集合に一致する。

$$\begin{array}{ccc} \text{指標多項式} & & \text{無限可積分系} \\ \text{シューア多項式 } S_\lambda & \rightarrow & \text{KP 階層} \\ \cap & & \cap \\ \text{普遍指標 } S_{[\lambda, \mu]} & \rightarrow & \text{UC 階層} \end{array}$$

本稿では、始めに普遍指標が満たす 2 次元格子上的 q -差分方程式系 (格子 q -UC 階層) を導入する。これは q -KP, q -UC 階層 (KP, UC 階層の q -類似, [9, 20] 各々参照) の両方を特別な場合として含んだ新しい可積分系である。次に格子 q -UC 階層に、適当な周期条件と相似条件を課した簡約化 (similarity reduction) を考えて、それが q -パンルヴェ方程式に等しいことを示す。以下、各々の q -パンルヴェ方程式を対応するアフィン・ルート系のデインキン図形で表すことにする。例えば、神保-坂井 [5] の q - P_{VI} は $D_5^{(1)}$ 型である。

定理 1.1. $A_{2g+1}^{(1)}$ ($g \geq 1$), $D_5^{(1)}$, $E_6^{(1)}$ 型の q -パンルヴェ方程式はそれぞれ $(g+1, g+1)$ -, $(2, 2)$ -, $(3, 3)$ -周期的な格子 q -UC 階層の相似簡約である。

格子 q -UC 階層の同次多項式解である普遍指標は, 相似簡約で生き残り, 従って q -パンルヴェ方程式の解を与える。

系 1.2. $A_{2g+1}^{(1)}$ ($g \geq 1$), $D_5^{(1)}$, $E_6^{(1)}$ 型の q -パンルヴェ方程式はそれぞれ $(g+1)$ -, 2 -, 3 -コアの分割の組に付随する普遍指標による代数関数解を許す。

さて, $A_{N-1}^{(1)}$ 型 (高階) q -パンルヴェ方程式 ($N = 3, 4$ の場合が各々 q - P_{IV} と q - P_V) が元来, N -周期的な q -KP 階層の相似簡約に由来することを思い出そう (梶原-野海-山田 [9] 参照. この論文ではシューア多項式による解が構成されている). また q - P_{III} もやはり 2-周期的な q -KP 階層の相似簡約として得られる ([22] 参照). 以上を踏まえて q -パンルヴェ方程式と q -差分可積分階層の相似簡約との対応を, 課すべき周期条件に注目して表にまとめる。

q -パンルヴェ方程式	q - P_{III}	$A_{2g}^{(1)}$ ($g = 1: q$ - P_{IV})	$A_{2g+1}^{(1)}$ ($g = 1: q$ - P_V)	$D_5^{(1)}$ (q - P_{VI})	$E_6^{(1)}$
q -KP 階層	2	$2g+1$	$2g+2$	-	-
格子 q -UC 階層	-	-	$(g+1, g+1)$	$(2, 2)$	$(3, 3)$

注 1.3. $A_{2g+1}^{(1)}$, $D_5^{(1)}$ 型の q -パンルヴェ方程式は既に q -UC 階層の相似簡約としても得られている ([20, 27] 各々参照). しかし $E_6^{(1)}$ の場合には, 可積分階層の相似簡約として捉える為には, 後で見るように格子 q -UC 階層まで対象を広げることが必要不可欠である. また $E_7^{(1)}$, $E_8^{(1)}$ 型の q -パンルヴェ方程式を何らかの可積分階層 (KP, UC, 或はそれらを超える対象?) の簡約化として理解することは, 尚興味ある未解決問題である。

次節では普遍指標の定義の復習から始めて, それを解に持つ新しい可積分系である格子 q -UC 階層を導入する. 本稿の主題は格子 q -UC 階層の相似簡約と q -パンルヴェ方程式の対応にあるが, そのときに威力を発揮するのが所謂タウ函数の満たす双線形方程式である. その準備として第 3 節では (q -パンルヴェ方程式からやや話を広げて), ワイル群のトロピカル表現に対する, 平面上の特別な点配置を用いた代数幾何的アプローチを紹介する ([23] 参照). タウ函数の概念はその中に自然と現れる. 第 4 節では $E_6^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式 (q - $P(E_6)$) をアフィン・ワイル群の平行移動部分を用いて定義する. 第 5 節ではタウ函数の双線形方程式を経由することで, 格子 q -UC 階層の相似簡約と q - $P(E_6)$ の等価性を示す. 特に q -パンルヴェ方程式の普遍指標による代数関数解は直ちに従う. 第 6 節では $D_5^{(1)}$ の場合の結果について簡単にまとめておく。

記号 q -階乗関数 (q -shifted factorial) を

$$(a; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i), \quad (a; p, q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - ap^i q^j)$$

等と表す. また $(a_1, \dots, a_r; q)_\infty = (a_1; q)_\infty \cdots (a_r; q)_\infty$ のような略記を用いる。

2 普遍指標と格子 q -UC 階層

普遍指標は次のような捻れたヤコビートウルーディ型の行列式で定義される。

定義 2.1 (小池 [10]). 分割の組 λ, μ に対して, 以下の多項式 $S_{[\lambda, \mu]}(x, y)$ を普遍指標と呼ぶ。

$$S_{[\lambda, \mu]}(x, y) = \det \left(\begin{array}{cc} p_{\mu_{l-i+1}+i-j}(y), & 1 \leq i \leq l \\ p_{\lambda_{i-l}+i-j}(x), & l+1 \leq i \leq l+l' \end{array} \right)_{1 \leq i, j \leq l+l'}$$

ここで $\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(x) k^n = e^{\xi(x, k)}$, $\xi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$ とおいた。

$\mu = \emptyset$ の場合は $S_{[\lambda, \emptyset]}(x, y) = \det(p_{\lambda_{i-j}}(x)) = S_{\lambda}(x)$ となり, これはシューア多項式に等しい。また変数の重みを

$$\deg x_n = n, \quad \deg y_n = -n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と数えると $S_{[\lambda, \mu]}$ は次数 $|\lambda| - |\mu|$ の重み付き同次多項式になる。例えば $\lambda = (2, 1), \mu = (1)$ の場合は,

$$S_{[(2,1),(1)]}(x, y) = \begin{vmatrix} p_1(y) & p_0(y) & p_{-1}(y) \\ p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) \\ p_{-1}(x) & p_0(x) & p_1(x) \end{vmatrix} = \left(\frac{x_1^3}{3} - x_3 \right) y_1 - x_1^2$$

であり, 確かに重み $|\lambda| - |\mu| = (2+1) - 1 = 2$ の同次多項式を与える。

有限部分集合 $I \subset \mathbb{Z}_{>0}, J \subset \mathbb{Z}_{<0}$ とする。独立変数 $t_i (i \in I \cup J)$ についての q -差分作用素

$$T_{i,q}(t_i) = \begin{cases} qt_i & (i \in I) \\ q^{-1}t_i & (i \in J) \end{cases}$$

$$T_{i,q}(t_j) = t_j \quad (i \neq j)$$

を考える。簡単のため $T_{i_1, i_2, \dots, i_n; q} = T_{i_1; q} T_{i_2; q} \cdots T_{i_n; q}$ と表記する。

定義 2.2. 未知関数 $\sigma_{m,n}(t) (m, n \in \mathbb{Z})$ に対する以下の q -差分方程式系

$$(1) \quad t_i T_i(\sigma_{m,n+1}) T_j(\sigma_{m+1,n}) - t_j T_j(\sigma_{m,n+1}) T_i(\sigma_{m+1,n}) = (t_i - t_j) T_{ij}(\sigma_{m,n}) \sigma_{m+1,n+1}$$

を格子 q -UC 階層と呼ぶ。但し $i, j \in I \cup J$ 。

さて, 変数変換

$$x_n = \frac{\sum_{i \in I} t_i^n - q^n \sum_{j \in J} t_j^n}{n(1 - q^n)}, \quad y_n = \frac{\sum_{i \in I} t_i^{-n} - q^{-n} \sum_{j \in J} t_j^{-n}}{n(1 - q^{-n})}$$

の下で, $s_{[\lambda, \mu]}(t) = S_{[\lambda, \mu]}(x, y)$ とおく。便利の為, 普遍指標を分割とは限らない任意の整数列 λ, μ の組に対しても考えよう。以下のような意味で, 普遍指標は格子 q -UC 階層を満たす。

命題 2.3. 任意の整数 k, k' と整数列 λ, μ に対して

$$t_i T_i(s_{[\lambda, (k', \mu)]}) T_j(s_{[(k, \lambda), \mu]}) - t_j T_j(s_{[\lambda, (k', \mu)]}) T_i(s_{[(k, \lambda), \mu]}) = (t_i - t_j) T_{ij}(s_{[\lambda, \mu]}) s_{[(k, \lambda), (k', \mu)]}$$

が成り立つ。

注 2.4. (i) 格子 q -UC 階層 (1) から直ちに双線形方程式

$$(t_i - t_j)T_{ij}(\sigma_{m,n})T_k(\sigma_{m+1,n}) + (t_j - t_k)T_{jk}(\sigma_{m,n})T_i(\sigma_{m+1,n}) \\ + (t_k - t_i)T_{ik}(\sigma_{m,n})T_j(\sigma_{m+1,n}) = 0$$

が導かれる。これは q -UC 階層 ([20] 参照) に他ならない。

(ii) 関数 $\sigma_{m,n}(t)$ が n に依らない場合, (1) は q -KP 階層 ([9] 参照):

$$t_i T_i(\rho_m) T_j(\rho_{m+1}) - t_j T_j(\rho_m) T_i(\rho_{m+1}) = (t_i - t_j) T_{ij}(\rho_m) \rho_{m+1}$$

に退化する。但し $\rho_m := \sigma_{m,n}$ とした。

3 点配置, ワイル群のトロピカル表現, タウ函数

点集合とワイル群の関係は古典的に良く知られている。射影空間 \mathbb{P}^{m-1} の一般の位置にある n 点の配置空間 $X_{m,n}$ には, デインキン図形 $T_{2,m,n-m}$ (図 1 参照) に付随するワイル群 $W(T_{2,m,n-m})$ が双有理的に作用する。実際, それらは n 点の置換と各 m 点についての標準クレモナ変換で生成される ([1, 2] 参照)。 $(m, n) = (3, 9)$ の場合には, アフィン・ワイル群 $W(E_8^{(1)})$ が現れるが, その平行移動部分が坂井秀隆による楕円差分パンルヴェ方程式に他ならない。他の全ての離散パンルヴェ方程式は 9 点配置の退化に従って順々に得られる ([15] 参照)。今, 我々の注目は q -差分の場合にあるが, 興味深いことに, 全ての q -パンルヴェ方程式はトロピカルな (=全正值双有理写像による) 表示を持つことが指摘されている (山田泰彦 [29], cf. [4])。

この節では, ワイル群のトロピカル表現に対する平面上の特別な点配置を用いた代数幾何的アプローチを紹介する ([23] 参照)。考えるのは以下のような点集合である。

(i) \mathbb{P}^2 の 3 本の直線上の $p + q + r$ 点

(ii) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (x, y)$ の座標軸 $\{x = 0\}, \{x = \infty\}, \{y = 0\}, \{y = \infty\}$ 上の $p + q + r + s$ 点

結果として, それぞれの場合からデインキン図形 $T_{p,q,r}$ と $H_{p,q,r,s}$ に付随するワイル群のトロピカルな実現が得られる。この構成はアフィンの場合として, $E_8^{(1)} = T_{6,3,2} = H_{6,3,1,1}$, $E_7^{(1)} = T_{4,4,2} = H_{4,4,1,1}$, $E_6^{(1)} = T_{3,3,3} = H_{3,3,2,1}$, $D_5^{(1)} = H_{2,2,2,2}$ を含んでおり, これらは q -パンルヴェ方程式に丁度対応している。

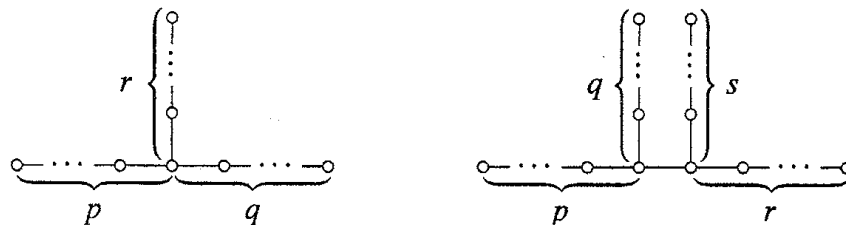


図 1: デインキン図形 $T_{p,q,r}$ と $H_{p,q,r,s}$

ここでは (i) の場合について詳しく説明する。

有理曲面とルート系 射影平面 \mathbb{P}^2 の斉次座標を $[x:y:z]$ と表す. 3本の直線上に制限された $l_1 + l_2 + l_3$ 点 ($l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq 1$) は一般性を失わずに次のようにパラメータ付けられる:

$$P_i^1 = [0 : -1 : b_i^1] \quad (1 \leq i \leq l_1)$$

$$P_i^2 = [b_i^2 : 0 : -1] \quad (1 \leq i \leq l_2)$$

$$P_i^3 = [-1 : b_i^3 : 0] \quad (1 \leq i \leq l_3).$$

但し $c_m = \prod_{i=1}^{l_m-1} (a_i^m)^{1-\frac{1}{l_m}}$, および $b_1^m = c_1 c_2 c_3 a_0 / c_m^3$, $b_i^m = b_1^m \prod_{j=1}^{i-1} (a_j^m)^3$ ($2 \leq i \leq l_m$) とおいた. さて $l_1 + l_2 + l_3$ 個の点 P_i^m を中心としたブローアップにより得られる有理曲面を X とする. そのピカル群は

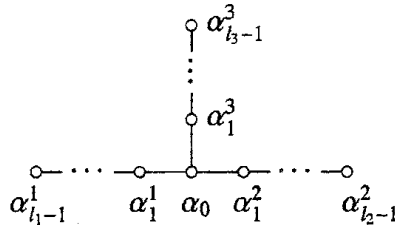
$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &= \text{Div}(X) / \sim \quad (\sim \text{ は線形同値}) \\ &= \mathbb{Z}h \oplus \bigoplus_{\substack{i=1, \dots, l_m; \\ m=1, 2, 3}} \mathbb{Z}e_i^m \end{aligned}$$

なる自由アーベル群で, その交叉形式は

$$(h|h) = 1, \quad (e_i^m | e_j^n) = -\delta_{i,j} \delta_{m,n}, \quad (h | e_i^m) = 0$$

で定まる. ここで \mathbb{P}^2 の超平面の因子類を h , ブローアップによる例外曲線の類を e_i^m と表した. 今, 3直線の狭義引き戻し $D_m = h - \sum_{i=1}^{l_m} e_i^m$ ($m = 1, 2, 3$) と直交するような $\text{Pic}(X)$ の部分格子 Q を考える. (X の反標準類 $-K_X = D_1 + D_2 + D_3$ に注意.)

補題 3.1. Q は (-2) -ベクトル $\alpha_{ij}^m = e_i^m - e_j^m$, $\alpha_{ijk} = h - e_i^1 - e_j^2 - e_k^3$ で生成されるルート格子を成す. 基底として $B = \{\alpha_0 = \alpha_{111}, \alpha_i^m = \alpha_{i,i+1}^m \ (1 \leq i \leq l_m - 1, m = 1, 2, 3)\}$ を選ぶことができ, 対応するデインキン図形は T_{l_1, l_2, l_3} になる.



ルート $\alpha \in Q$ に付随する鏡映の $v \in \text{Pic}(X)$ への作用を $R_\alpha(v) = v + (v|\alpha)\alpha$ とおく. また簡単のため, 記号 $s_0 = R_{\alpha_0}$, $s_i^m = R_{\alpha_i^m}$ を用意する. 実際に, $W = W(Q) = \langle s_0, s_i^m \rangle$ がワイル群の基本関係式を満たすことは容易であろう. W は (定義から) $\text{Pic}(X)$ の等長変換として作用することに注意しておく. 平行して, 乗法的ルート変数 a_0, a_i^m ($1 \leq i \leq l_m - 1, m = 1, 2, 3$) に対する鏡映の作用を

$$\begin{aligned} s_0(a_0) &= 1/a_0, & s_0(a_1^m) &= a_0 a_1^m \\ s_i^m(a_i^m) &= 1/a_i^m, & s_i^m(a_{i\pm 1}^m) &= a_i^m a_{i\pm 1}^m \end{aligned}$$

と定義する. 但し $a_0^m = a_0$ と略記した.

注 3.2. $C = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}$ とおく. 良く知られているように, デインキン図形 T_{l_1, l_2, l_3} はそれぞれ, $C > 1$ の場合は有限型, $C = 1$ はアフィン型, $C < 1$ は不定形型となる ([6] 参照). 例えば $(l_1, l_2, l_3) = (3, 3, 3), (4, 4, 2), (6, 3, 2)$ の時は, それぞれアフィン型の $E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ である.

タウ函数とワイル群の双有理作用 上で見たワイル群 $W = W(Q)$ の線形作用を双有理変換のレベルに持ち上げたい。始めに $\text{Pic}(X)$ の部分格子

$$M = \cup_{i=1,2,3} M_i$$

$$M_i = \{v \in \text{Pic}(X) \mid (v|v) = -(v|D_i) = -1, (v|D_j) = 0 (j \neq i)\}$$

を考える。 M の各元には、それを代表する X 上の第 1 種例外曲線 ($\sim \mathbb{P}^1$) が丁度 1 本ずつ対応する。実は、ワイル群 W はこれら第 1 種例外曲線が互いに移り合う様子を記述しているが、このような描像は、古典的な話題「3 次曲面上の 27 本の直線と E_6 型 (有限) ワイル群」以来お馴染みのものである。

今から導入するタウ函数とは本質的に、 X 上の第 1 種例外曲線の定義多項式に他ならない。このようなタウ函数の幾何的解釈は、梶原-増田-野海-太田-山田 [7] による楕円差分パルヴェ方程式の研究において既に見られる ([8] に詳しい日本語の解説もある)。さて $l_1 + l_2 + l_3$ 個の不定元 τ_i^m ($1 \leq i \leq l_m, m = 1, 2, 3$) の有理関数体 $L = K(\tau_i^m)$ を用意しよう。但し、係数体は $K = \mathbb{C}(a_0^{1/N}, (a_i^m)^{1/N})$ とする。また N は (l_1, l_2, l_3) による自然数である。

定義 3.3 (cf. [7]). 次の条件を満たす関数 $\tau: M \rightarrow L$ をタウ函数と呼ぶ。

- (i) $\forall v \in M, \forall w \in W$ に対して、 $\tau(w.v) = w.\tau(v)$;
- (ii) $\tau(e_i^m) = \tau_i^m$.

タウ函数(とそれへのワイル群作用)を具体的に構成する。各元 $\Lambda = dh - \sum m_i^j e_i^j \in M$ には、点 P_i^j で重複度 m_i^j を持つ d 次曲線が対応する (X の第 1 種例外曲線)。この曲線の規格化された定義多項式 $F_\Lambda(x, y, z) = \sum A_{ijk} x^i y^j z^k \in K[x, y, z]$ を点配置に付随する条件

$$\prod_{i,j,k} A_{ijk}^{(1/l_1)^i (1/l_2)^j (1/l_3)^k} = 1$$

を満たすように選ぶ。例えば $\Lambda = h - e_1^2 - e_1^3$ は 2 点 P_1^2, P_1^3 を通る直線に対応し、その規格化された定義多項式は

$$F_{h-e_1^2-e_1^3}(x, y, z) = (b_1^2)^{-1/l_3} (b_1^3)^{1/l_2} (x + (b_1^3)^{-1} y + b_1^2 z)$$

である。各 $\Lambda = dh - \sum m_i^j e_i^j \in M$ に対して、次の式を要請する。

$$(2) \quad F_\Lambda(x, y, z) = \tau(\Lambda) \prod_{i,j} \tau(e_i^j)^{m_i^j}$$

$$(3) \quad (x, y, z) = \left(\prod_{i=1}^{l_1} \tau_i^1, \prod_{i=1}^{l_2} \tau_i^2, \prod_{i=1}^{l_3} \tau_i^3 \right).$$

この要請からワイル群の L への双有理作用は得られて、実際にそれがタウ函数の性質 (i) と整合的であることが分かる。例えば、鏡映 $R_{\alpha_{ijk}}$ の $\tau_i^1 = \tau(e_i^1)$ への作用は $R_{\alpha_{ijk}}(e_i^1) = h - e_j^2 - e_k^3$ に注意すれば (2), (3) から求まる。また $R_{\alpha_{ij}^m}$ の作用は単に τ_i^m と τ_j^m の互換である。

定理 3.4. 以下の双有理変換 s_0, s_i^m ($1 \leq i \leq l_m - 1, m = 1, 2, 3$) はワイル群 $W(T_{l_1, l_2, l_3})$ の有理関数体 $L = K(\tau_i^m)$ 上の実現を与える.

$$s_i^m(\tau_{[i, i+1]}^m) = \tau_{[i+1, i]}^m$$

$$s_0(\tau_1^1) = (b_1^2)^{-\frac{1}{c_3}} (b_1^3)^{\frac{1}{c_2}} \left(\prod_{i=1}^{l_1} \tau_i^1 + (b_1^3)^{-1} \prod_{i=1}^{l_2} \tau_i^2 + b_1^2 \prod_{i=1}^{l_3} \tau_i^3 \right) / (\tau_1^2 \tau_1^3)$$

$$s_0(\tau_1^2) = (b_1^3)^{-\frac{1}{c_1}} (b_1^1)^{\frac{1}{c_3}} \left(b_1^3 \prod_{i=1}^{l_1} \tau_i^1 + \prod_{i=1}^{l_2} \tau_i^2 + (b_1^1)^{-1} \prod_{i=1}^{l_3} \tau_i^3 \right) / (\tau_1^3 \tau_1^1)$$

$$s_0(\tau_1^3) = (b_1^1)^{-\frac{1}{c_2}} (b_1^2)^{\frac{1}{c_1}} \left((b_1^2)^{-1} \prod_{i=1}^{l_1} \tau_i^1 + b_1^1 \prod_{i=1}^{l_2} \tau_i^2 + \prod_{i=1}^{l_3} \tau_i^3 \right) / (\tau_1^1 \tau_1^2).$$

但し $C = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}$ とした.

上のワイル群の表現は明らかにトロピカルである. 故に超離散極限 ([17] 参照):

$$a \times b \rightarrow a + b, \quad a/b \rightarrow a - b, \quad a + b \rightarrow \max(a, b)$$

を経由して, 区分線形写像による組み合わせ論的な対応物をも許す. また非斉次座標

$$[f : g : 1] = [x : y : z] = \left[\prod_{i=1}^{l_1} \tau_i^1 : \prod_{i=1}^{l_2} \tau_i^2 : \prod_{i=1}^{l_3} \tau_i^3 \right]$$

を取れば, 定理 3.4 から $W(T_{l_1, l_2, l_3})$ の \mathbb{P}^2 のクレモナ変換による実現は直ちに得られる.

注 3.5. 要請 (3) の解釈. タウ函数の定義域を因子類 $D_m = h - \sum_{i=1}^{l_m} e_i^m$ ($m = 1, 2, 3$) にも拡げて考えよう. すると D_m に対応するのは点配置を制限した 3 直線なので,

$$\tau(D_1) \prod_{i=1}^{l_1} \tau(e_i^1) = x, \quad \tau(D_2) \prod_{i=1}^{l_2} \tau(e_i^2) = y, \quad \tau(D_3) \prod_{i=1}^{l_3} \tau(e_i^3) = z.$$

ワイル群 $W(Q)$ は, 元々のルート系の構成を思い出せば, D_m を動かさない. そこで $\tau(D_m) \equiv 1$ とおけば (3) 式が従う.

4 $E_6^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式

さて, パンルヴェ方程式に話を戻そう. ルート系が $E_6^{(1)} = T_{3,3,3}$ の場合を考える. 乗法的ルート変数 $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_6)$ への拡大アフィン・ワイル群 $\tilde{W}(E_6^{(1)}) = \langle s_0, \dots, s_6, \iota_1, \iota_2 \rangle$ の作用を $s_i(a_j) = a_j a_i^{-C_{ij}}$, $\iota_1(a_{[0,1,2,3,4,5,6]}) = a_{[5,1,2,3,6,0,4]}^{-1}$, $\iota_2(a_{[0,1,2,3,4,5,6]}) = a_{[1,0,6,3,4,5,2]}^{-1}$ とおく (C_{ij} はカル

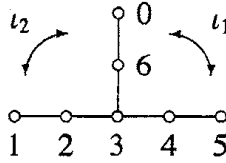


図2: デインキン図形 $E_6^{(1)}$

タン行列). 定理3.4から次のような $\mathcal{L} = \mathbb{C}(a^{1/3})(\tau_1, \dots, \tau_9)$ 上の双有理変換を得る.

$$(4) \quad \begin{aligned} s_1(\tau_{\{5,6\}}) &= \tau_{\{6,5\}}, & s_2(\tau_{\{4,5\}}) &= \tau_{\{5,4\}}, & s_4(\tau_{\{7,8\}}) &= \tau_{\{8,7\}}, & s_5(\tau_{\{8,9\}}) &= \tau_{\{9,8\}} \\ s_6(\tau_{\{1,2\}}) &= \tau_{\{2,1\}}, & s_0(\tau_{\{2,3\}}) &= \tau_{\{3,2\}}, & l_1(\tau_{\{1,2,3\}}) &= \tau_{\{7,8,9\}}, & l_2(\tau_{\{1,2,3\}}) &= \tau_{\{4,5,6\}} \\ s_3(\tau_1) &= \left(c_x \tau_1 \tau_2 \tau_3 + a_3^{-1} c_y \tau_4 \tau_5 \tau_6 + a_3 c_z \tau_7 \tau_8 \tau_9 \right) / (\tau_4 \tau_7) \\ s_3(\tau_4) &= \left(a_3 c_x \tau_1 \tau_2 \tau_3 + c_y \tau_4 \tau_5 \tau_6 + a_3^{-1} c_z \tau_7 \tau_8 \tau_9 \right) / (\tau_1 \tau_7) \\ s_3(\tau_7) &= \left(a_3^{-1} c_x \tau_1 \tau_2 \tau_3 + a_3 c_y \tau_4 \tau_5 \tau_6 + c_z \tau_7 \tau_8 \tau_9 \right) / (\tau_1 \tau_4). \end{aligned}$$

但し $c_x = a_1^{\frac{1}{3}} a_2^{\frac{2}{3}} a_4^{-\frac{2}{3}} a_5^{-\frac{1}{3}}$, $c_y = a_5^{\frac{1}{3}} a_4^{\frac{2}{3}} a_6^{-\frac{2}{3}} a_0^{-\frac{1}{3}}$, $c_z = a_0^{\frac{1}{3}} a_6^{\frac{2}{3}} a_2^{-\frac{2}{3}} a_1^{-\frac{1}{3}}$ とした. 非斉次座標を

$$[f : g : 1] = [\tau_1 \tau_2 \tau_3 : \tau_4 \tau_5 \tau_6 : \tau_7 \tau_8 \tau_9]$$

とおくと, $\tilde{W}(E_6^{(1)})$ の (f, g) への作用が直ちに得られる (これは坂井 [15] と一致する):

$$\begin{aligned} s_3(f) &= f \frac{c_x f + a_3^{-1} c_y g + a_3 c_z}{a_3^{-1} c_x f + a_3 c_y g + c_z}, & s_3(g) &= g \frac{a_3 c_x f + c_y g + a_3^{-1} c_z}{a_3^{-1} c_x f + a_3 c_y g + c_z} \\ l_1(f) &= \frac{1}{f}, & l_1(g) &= \frac{g}{f}, & l_2(f) &= g, & l_2(g) &= f. \end{aligned}$$

平行移動 $\ell = (s_2 s_4 s_6 s_0 s_1 s_5 s_3 s_2 s_4 s_6 s_3)^2 \in W(E_6^{(1)})$ の双有理作用が離散パウルヴェ方程式の時間発展に他ならない. パラメータへの作用は $\bar{a} = \ell(\mathbf{a}) = (a_0, a_1, q^{-1} a_2, q^2 a_3, q^{-1} a_4, a_5, q^{-1} a_6)$ である. 但し $a_0 a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^2 a_5 a_6^2 = q$ とおいた. 今, 有理関数 $\ell(f) = F(\mathbf{a}; f, g)$, $\ell(g) = G(\mathbf{a}; f, g) \in \mathbb{C}(a^{1/3}; f, g)$ を考える.

定義 4.1. 未知関数 $f = f(\mathbf{a})$, $g = g(\mathbf{a})$ に対する以下の関数方程式系

$$(5) \quad f(\bar{\mathbf{a}}) = F(\mathbf{a}; f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})), \quad g(\bar{\mathbf{a}}) = G(\mathbf{a}; f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a}))$$

を $E_6^{(1)}$ 型 q -差分パウルヴェ方程式 q - $P(E_6)$ と呼ぶ.

5 格子 q -UC 階層から q - $P(E_6)$ への相似簡約

この節では q -パウルヴェ方程式 q - $P(E_6)$ が格子 q -UC 階層の相似簡約に等しいことを示す. その際に有効なのが, 第3節で論じたタウ函数の枠組みである. 我々は始めに q - $P(E_6)$ を等価な(タウ函数の満たす)双線形方程式系に書き直した後, それを格子 q -UC 階層の相似簡約と同定する.

q - $P(E_6)$ の双線形形式 平行移動 $\ell_1 = \ell = r_{258}r_{369}r_{258}r_{147}$ と合わせて, $\ell_2 = r_{369}r_{147}r_{369}r_{258}$, $\ell_3 = r_{147}r_{258}r_{147}r_{369}$ を導入する. これらの乗法的ルート変数への作用は以下の通りである.

$$\begin{aligned}\ell_1(\mathbf{a}) &= (a_0, a_1, q^{-1}a_2, q^2a_3, q^{-1}a_4, a_5, q^{-1}a_6) \\ \ell_2(\mathbf{a}) &= (q^{-1}a_0, q^{-1}a_1, qa_2, q^{-1}a_3, qa_4, q^{-1}a_5, qa_6) \\ \ell_3(\mathbf{a}) &= (qa_0, qa_1, a_2, q^{-1}a_3, a_4, qa_5, a_6).\end{aligned}$$

また補助変数 $(a, b) = ((a_0a_1a_5)^{1/3}, (a_2a_4a_6q)^{1/3})$ への作用は

$$\ell_1(a, b) = (a, q^{-1}b), \quad \ell_2(a, b) = (q^{-1}a, qb), \quad \ell_3(a, b) = (qa, b)$$

となる. 変数 (a, b) は q - $P(E_6)$ の時間変数の役割を果たすことに注意する.

アフィン・ワイル群のタウ函数への双有理作用 (4) を用いて q - $P(E_6)$ の双線形形式は得られる. 詳細は論文 [24] に譲ることにして, ここでは結果のみを与えよう. タウ函数を次のように規格化する.

$$U_{\{1,2,3\}} = \frac{\tau_{\{1,4,7\}}}{N(a, b)}, \quad V_{\{1,2,3\}} = \frac{\tau_{\{2,5,8\}}}{N(q^{1/3}a, q^{-2/3}b)}, \quad W_{\{1,2,3\}} = \frac{\tau_{\{3,6,9\}}}{N(q^{-1/3}a, q^{-1/3}b)}.$$

但し規格化因子を

$$N(a, b) = \frac{\left(-\frac{aq}{b}, -ab^2q, -\frac{q}{a^2b}; q, q\right)_\infty \left(\frac{b^3q^3}{a^3}, \frac{q^3}{a^3b^6}, a^6b^3q^3; q^3, q^3\right)_\infty}{\left(\frac{b^2q^2}{a^2}, \frac{q^2}{a^2b^4}, a^4b^2q^2; q^2, q^2\right)_\infty}$$

とした.

命題 5.1. 9つの関数 U_i, V_i, W_i ($i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) は以下の双線形方程式系

$$(6a) \quad abU_i\ell_1(U_{i+1}) - \frac{q}{b}\ell_1(U_i)U_{i+1} = \gamma_i \left(ab - \frac{q}{b}\right) V_{i+2}W_{i+2}$$

$$(6b) \quad \frac{1}{b}V_i\ell_2(V_{i+1}) - \frac{1}{a}\ell_2(V_i)V_{i+1} = \delta_i \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) W_{i+2}U_{i+2}$$

$$(6c) \quad \frac{1}{a}W_i\ell_3(W_{i+1}) - ab\ell_3(W_i)W_{i+1} = \epsilon_i \left(\frac{1}{a} - ab\right) U_{i+2}V_{i+2}$$

を満たす. 但しパラメータの対応は

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left(\frac{a_0a_6^2}{a_1a_2^2}\right)^{1/3}, & \gamma_2 &= \left(\frac{a_1a_2^2}{a_4^2a_5}\right)^{1/3}, & \gamma_3 &= \left(\frac{a_4^2a_5}{a_0a_6^2}\right)^{1/3} \\ \delta_1 &= \left(\frac{a_0a_2}{a_1a_6}\right)^{1/3}, & \delta_2 &= \left(\frac{a_1a_4}{a_2a_5}\right)^{1/3}, & \delta_3 &= \left(\frac{a_5a_6}{a_0a_4}\right)^{1/3} \\ \epsilon_1 &= \left(\frac{a_1^2a_2}{a_0^2a_6}\right)^{1/3}, & \epsilon_2 &= \left(\frac{a_4a_5^2}{a_1^2a_2}\right)^{1/3}, & \epsilon_3 &= \left(\frac{a_0^2a_6}{a_4a_5^2}\right)^{1/3}.\end{aligned}$$

逆に, 関数の組 $f = \frac{U_1V_1W_1}{U_3V_3W_3}, g = \frac{U_2V_2W_2}{U_3V_3W_3}$ は $E_6^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式 (5) の解である.

格子 q -UC 階層の相似簡約 $I = \{1, 2, 3\}, J = \emptyset$ とおく. 格子 q -UC 階層:

$$(7) \quad t_i T_i(\sigma_{m,n+1}) T_j(\sigma_{m+1,n}) - t_j T_j(\sigma_{m,n+1}) T_i(\sigma_{m+1,n}) = (t_i - t_j) T_{ij}(\sigma_{m,n}) \sigma_{m+1,n+1}$$

に対して, (3,3)-周期条件:

$$(8) \quad \sigma_{m,n} = \sigma_{m+3,n} = \sigma_{m,n+3}$$

および自己相似条件:

$$(9) \quad \sigma_{m,n}(ct_1, ct_2, ct_3) = c^{d_{m,n}} \sigma_{m,n}(t_1, t_2, t_3), \quad \forall c \in \mathbb{C}^\times$$

を課す. 但し重み $d_{m,n}$ は平衡条件 $d_{m,n} + d_{m+1,n+1} = d_{m+1,n} + d_{m,n+1}$ を満たすものとする.

変数の代入 $(t_1, t_2, t_3) = (a^{-1}, b^{-1}, ab)$ の下, 関数 $\tilde{\sigma}_{m,n}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{m,n}(t_1, t_2, t_3)$ を考える.

補題 5.2. 関数

$$U_i(a, b) = \tilde{\sigma}_{i,-i}(a, b)$$

$$V_i(a, b) = \tilde{\sigma}_{i+1,-i+1}(q^{1/3}a, q^{-2/3}b)$$

$$W_i(a, b) = \tilde{\sigma}_{i+2,-i+2}(q^{-1/3}a, q^{-1/3}b)$$

($i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) は q - $P(E_6)$ の双線形形式 (6) を満たす. 但しパラメータの対応は

$$\gamma_i = q^{(d_{i,-i+2}-d_{i+1,-i})/3}, \quad \delta_i = q^{(d_{i+1,-i}-d_{i+2,-i+1})/3}, \quad \epsilon_i = q^{(d_{i+2,-i+1}-d_{i,-i+2})/3}$$

とした.

(証明) 簡約化の条件 (8), (9) の下で, q - $P(E_6)$ の双線形形式 (6) が格子 q -UC 階層 (7) から自然に導かれることを示す. 例えば $(m, n) = (r+1, -r), (i, j) = (1, 2)$ の場合:

$$\begin{aligned} & t_1 \sigma_{r+1,-r+1}(qt_1, t_2, t_3) \sigma_{r+2,-r}(t_1, qt_2, t_3) - t_2 \sigma_{r+1,-r+1}(t_1, qt_2, t_3) \sigma_{r+2,-r}(qt_1, t_2, t_3) \\ &= (t_1 - t_2) \sigma_{r+1,-r}(qt_1, qt_2, t_3) \sigma_{r+2,-r+1}(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}$$

から始めよう. 同次性 (9) を用いると,

$$\begin{aligned} & q^{(d_{r+1,-r+1}+d_{r+2,-r})/3} t_1 \sigma_{r+1,-r+1}(q^{2/3}t_1, q^{-1/3}t_2, q^{-1/3}t_3) \sigma_{r+2,-r}(q^{-1/3}t_1, q^{2/3}t_2, q^{-1/3}t_3) \\ & - q^{(d_{r+1,-r+1}+d_{r+2,-r})/3} t_2 \sigma_{r+1,-r+1}(q^{-1/3}t_1, q^{2/3}t_2, q^{-1/3}t_3) \sigma_{r+2,-r}(q^{2/3}t_1, q^{-1/3}t_2, q^{-1/3}t_3) \\ &= q^{2d_{r+1,-r}/3} (t_1 - t_2) \sigma_{r+1,-r}(q^{1/3}t_1, q^{1/3}t_2, q^{-2/3}t_3) \sigma_{r+2,-r+1}(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}$$

を得る. ここで代入 $(t_1, t_2, t_3) = (a^{-1}, b^{-1}, ab)$ を行くと,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \tilde{\sigma}_{r+1,-r+1}(q^{-2/3}a, q^{1/3}b) \tilde{\sigma}_{r+2,-r}(q^{1/3}a, q^{-2/3}b) \\ & - \frac{1}{b} \tilde{\sigma}_{r+1,-r+1}(q^{1/3}a, q^{-2/3}b) \tilde{\sigma}_{r+2,-r}(q^{-2/3}a, q^{1/3}b) \\ &= q^{(d_{r+1,-r}-d_{r+2,-r+1})/3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \tilde{\sigma}_{r+1,-r}(q^{-1/3}a, q^{-1/3}b) \tilde{\sigma}_{r+2,-r+1}(a, b) \end{aligned}$$

が従うが, これは (6b) 式に他ならない (t_2 の作用に注意). 同様に残りの (6a), (6c) 式も (7) 式から得られる. ■

q - $P(E_6)$ の代数関数解 先程示したように, $E_6^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式は (3,3)-周期的な格子 q -UC 階層の相似簡約に等価である. 一方, 普遍指標が格子 q -UC 階層の同次多項式解であることを我々は既に知っている (命題 2.3). その帰結として q -パンルヴェ方程式の普遍指標による代数関数解が直ちに得られる.

結果を正確に述べるために用語の準備をしよう ([12, 13] 等参照). 部分集合 $M \subset \mathbb{Z}$ が $m \in M$ ($m \ll 0$) かつ $m \notin M$ ($m \gg 0$) を満たすときマヤ図形と呼ぶ. 各マヤ図形 $M = \{\dots, m_3, m_2, m_1\}$ には, $m_i - m_{i+1} = \lambda_i - \lambda_{i+1} + 1$ によって, 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ が一意に対応する. さて整数列 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して, マヤ図形 $M(\mathbf{n}) = \bigcup_{i=1}^N (N\mathbb{Z}_{<n_i} + i)$ を考え, その対応する分割を $\lambda(\mathbf{n})$ とおく. この形の分割を N -コアであると呼ぶ. 良く知られるように, N -コアの分割はフックの長さに N の倍数が現れないものとして特徴付けられる.

N -コアの分割に付随する普遍指標には周期的な鎖が存在する ([19] 参照):

補題 5.3. 任意の整数列 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$ と分割 μ について

$$S_{[(k_i, \lambda(n(i-1))), \mu]} = \pm S_{[\lambda(n(i)), \mu]}.$$

但し, 記号 $n(i) = \mathbf{n} + (\overbrace{1, \dots, 1}^i, \overbrace{0, \dots, 0}^{N-i})$, $k_i = Nn_i - |\mathbf{n}|$ および $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ を用いた.

変数の代入

$$x_n = \frac{a^{-n} + b^{-n} + (ab)^n}{n(1 - q^n)}, \quad y_n = \frac{a^n + b^n + (ab)^{-n}}{n(1 - q^{-n})}$$

或は $(t_1, t_2, t_3) = (a^{-1}, b^{-1}, ab)$ の下で, 有理関数 $R_{[\lambda, \mu]}(a, b) = S_{[\lambda, \mu]}(x, y) = s_{[\lambda, \mu]}(t)$ を導入する. 命題 2.3, 5.1 と補題 5.2, 5.3 を合わせれば, 次の定理が得られる.

定理 5.4. 任意の $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3), \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ について, 関数

$$U_i(a, b) = R_{[\lambda(\mathbf{m}(i)), \lambda(\mathbf{n}(-i))]}(a, b)$$

$$V_i(a, b) = R_{[\lambda(\mathbf{m}(i+1)), \lambda(\mathbf{n}(-i+1))]}(q^{1/3}a, q^{-2/3}b)$$

$$W_i(a, b) = R_{[\lambda(\mathbf{m}(i+2)), \lambda(\mathbf{n}(-i+2))]}(q^{-1/3}a, q^{-1/3}b)$$

($i = 1, 2, 3$) はパラメータ $\gamma_i = q^{n-i-m_i+1+\frac{m_i-n_i}{3}}$, $\delta_i = q^{n-i+1-m_{i+2}+\frac{m_i-n_i}{3}}$, $\epsilon_i = q^{n-i+2-m_i+\frac{m_i-n_i}{3}}$ に於ける q - $P(E_6)$ の双線形形式 (6) を満たす. 従って $f = \frac{U_1 V_1 W_1}{U_3 V_3 W_3}$, $g = \frac{U_2 V_2 W_2}{U_3 V_3 W_3}$ はパラメータ

$$\begin{aligned} a_1 &= aq^{\frac{m_1+n_1}{3}-m_1-n_3}, & a_5 &= aq^{\frac{m_1+n_1}{3}-m_2-n_2}, & a_0 &= aq^{\frac{m_1+n_1}{3}-m_3-n_1} \\ a_2 &= bq^{\frac{m_2+n_2}{3}-m_3-n_2}, & a_4 &= bq^{\frac{m_2+n_2}{3}-m_1-n_1}, & a_6 &= bq^{\frac{m_2+n_2}{3}-m_2-n_3} \end{aligned}$$

に於ける q - $P(E_6)$ (5) の代数関数解を与える.

例 5.5. 上の定理の代数関数解に現れる特殊多項式

$$P_{[\lambda, \mu]}(a, b; q) = (ab)^{|\lambda|+|\mu|} q^{-|\lambda|} \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - q^{h(i,j)}) \prod_{(k,l) \in \mu} (q^{h(k,l)} - 1) R_{[\lambda, \mu]}(a, b)$$

を考える. 但し $h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ は分割 (ヤング図形) λ のフックの長さである. また整数列 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ を $\nu_i = \max\{0, \mu'_i - \lambda_i\}$ によって定めた. 多項式 $P_{[\lambda, \mu]}(a, b; q)$ の全ての係数が正整数であることは興味深い. 例をいくつか挙げておこう.

λ	μ	$P_{[\lambda, \mu]}(a, b; q)$
\emptyset	\emptyset	1
(1)	\emptyset	$a + b + a^2 b^2$
(2)	\emptyset	$a^2 + b^2 + a^4 b^4 + (1 + q)ab(1 + a^2 b + ab^2)$
(1, 1)	\emptyset	$q(a^2 + b^2 + a^4 b^4) + (1 + q)ab(1 + a^2 b + ab^2)$
\emptyset	(1)	$1 + a^2 b + ab^2$
\emptyset	(2)	$q(1 + a^4 b^2 + a^2 b^4) + (1 + q)ab(a + b + a^2 b^2)$
(1)	(1)	$(1 + q + q^2)a^2 b^2 + qab(a^2 + b^2) + q(a + b)(1 + a^3 b^3)$
(1)	(2)	$(1 + q + 2q^2 + q^3)a^2 b^2(1 + a^2 b + ab^2) + q(1 + q)ab(a^2 + b^2 + a^4 b^4) + q^2(a + b + a^2 b^2(a^3 + b^3) + a^4 b^4(a^2 + b^2))$

これらは (古典的な) パンルヴェ微分方程式の代数関数解から生じる, 所謂, 梅村多項式 ([11, 14, 28] 等参照) の q -類似拡張と看做せる.

6 q - P_{VI} への相似簡約

この節では, 格子 q -UC 階層から q - P_{VI} ($D_5^{(1)}$ 型) への相似簡約について簡単にまとめる. 尚 q -UC 階層からの簡約化については, 津田-増田 [27] を参照されたい.

$I = \{1, 2\}, J = \{-1, -2\}$ とする. 格子 q -UC 階層 (1) の解 $\sigma_{m,n} = \sigma_{m,n}(t)$ に対して, (2, 2)-周期条件 $\sigma_{m,n} = \sigma_{m+2,n} = \sigma_{m,n+2}$ と自己相似条件 $\sigma_{m,n}(ct) = c^{d_{m,n}} \sigma_{m,n}(t)$ を課す. 但し変数の重みには平衡条件 $d_{m,n} + d_{m+1,n+1} = d_{m+1,n} + d_{m,n+1}$ をおく. この簡約条件の下で, 関数

$$\rho_{m,n}(\alpha, \beta; x) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{m,n}(t), \quad t = (t_1, t_2, t_{-1}, t_{-2}) = (\alpha, \alpha^{-1}, -q^{-1}\beta x, -q^{-1}\beta^{-1}x)$$

を考える. $E_6^{(1)}$ の場合と同様に, 格子 q -UC 階層 (1) から以下の双線形方程式系が得られる.

$$\begin{aligned} & \alpha^{\pm 1} q^{(d_{i,i} - d_{i,i+1})/2} \Phi_i^{(\pm)}(x) \Phi_{i+1}^{(\mp)}(x) + \beta^{\pm 1} x q^{(d_{i+1,i} - d_{i,i})/2} \Phi_i^{(\mp)}(x) \Phi_{i+1}^{(\pm)}(x) \\ & = (\alpha^{\pm 1} + \beta^{\pm 1} x) \Psi_i^{(\pm)}(q^{-1}x) \Psi_{i+1}^{(\mp)}(x) \\ (10) \quad & \alpha^{\pm 1} q^{(d_{i,i+1} - d_{i,i})/2} \Psi_i^{(\pm)}(x) \Psi_{i+1}^{(\mp)}(x) + (q^{1/2}\beta)^{\mp 1} (q^{1/2}x) q^{(d_{i+1,i} - d_{i,i})/2} \Psi_i^{(\mp)}(x) \Psi_{i+1}^{(\pm)}(x) \\ & = (\alpha^{\pm 1} + (q^{1/2}\beta)^{\mp 1} q^{1/2}x) \Phi_i^{(\pm)}(x) \Phi_{i+1}^{(\mp)}(qx) \end{aligned}$$

(添字 $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). 但し,

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(-)}(x) &= \rho_{i,i}(\alpha, \beta; x), & \Phi_i^{(+)}(x) &= \rho_{i,i}(q^{1/2}\alpha, q^{1/2}\beta; x) \\ \Psi_i^{(-)}(x) &= \rho_{i,i+1}(\alpha, q^{1/2}\beta; q^{1/2}x), & \Psi_i^{(+)}(x) &= \rho_{i,i+1}(q^{1/2}\alpha, \beta; q^{1/2}x) \end{aligned}$$

とした. パラメータを $\gamma = q^{(d_{1,1} - d_{1,2})/2}, \delta = q^{(d_{2,1} - d_{1,1})/2}$ とおく. 従属変数を

$$f(x) = \frac{\Phi_1^{(+)}(x) \Phi_2^{(-)}(x)}{\Phi_1^{(-)}(x) \Phi_2^{(+)}(x)}, \quad g(x) = \frac{\Psi_1^{(+)}(x) \Psi_2^{(-)}(x)}{\Psi_1^{(-)}(x) \Psi_2^{(+)}(x)}$$

と選べば, (10) より q -パンルヴェ VI 型方程式 (q - P_{VI} , [5] 参照) :

$$\bar{f}f = \frac{(g + \alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta x)(g + \alpha\beta\gamma^{-1}\delta^{-1}qx)}{(xg + \alpha\beta\gamma\delta)(qxg + \alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1})}$$

$$\underline{g}g = \frac{(f + \alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}\delta x)(f + \alpha\beta^{-1}\gamma\delta^{-1}x)}{(xf + \alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta)(xf + \alpha^{-1}\beta\gamma\delta^{-1})}$$

が得られる. 但し $\bar{f} = f(qx)$, $\underline{g} = g(q^{-1}x)$ とした.

参考文献

- [1] Coble, A. B.: *Algebraic geometry and theta functions*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1929
- [2] Dolgachev, I., Ortland, D.: Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque* **165** (1988)
- [3] Gasper, G., Rahman, M.: *Basic hypergeometric series*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **35**, Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- [4] Grammaticos, B., Ohta, Y., Ramani, A., Takahashi, D., Tamizhmani, K. M.: Cellular automata and ultra-discrete Painlevé equations. *Phys. Lett. A* **226**, 53–58 (1997)
- [5] Jimbo, M., Sakai, H.: A q -analog of the sixth Painlevé equation. *Lett. Math. Phys.* **38**, 145–154 (1996)
- [6] Kac, V. G.: *Infinite dimensional Lie algebras*. 3rd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- [7] Kajiwara, K., Masuda, T., Noumi, M., Ohta, Y., Yamada, Y.: ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, L263–L272 (2003)
- [8] 梶原健司, 増田哲, 野海正俊, 太田泰広, 山田泰彦: Cremona 変換と楕円差分 Painlevé 方程式 –高次元的な枠組みへの試論–. *数理解析研究所講究録* **1400**, 197–263 (2004)
- [9] Kajiwara, K., Noumi, M., Yamada, Y.: q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy. *Lett. Math. Phys.* **62**, 259–268 (2002)
- [10] Koike, K.: On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters. *Adv. Math.* **74**, 57–86 (1989)
- [11] Masuda, T.: On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade. *Funkcial. Ekvac.* **46**, 121–171 (2003)
- [12] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗: ソリトンの数理. 岩波書店, 1993 年
- [13] 野海正俊: パンルヴェ方程式–対称性からの入門–. 朝倉書店, 2000 年
- [14] Noumi, M., Okada, S., Okamoto, K., Umemura, H.: *Special polynomials associated with the Painlevé equations II*. In: *Integrable Systems and Algebraic Geometry*, eds. Saito, M.-H., Shimizu, Y. and Ueno, K., Singapore: World Scientific, 1998, pp. 349–372
- [15] Sakai, H.: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.* **220**, 165–229 (2001)

- [16] 佐藤幹夫述, 野海正俊記: ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体. 上智大学数学講究録 **18** (1984)
- [17] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J., Satsuma, J.: From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247–3250 (1996)
- [18] Tsuda, T.: Universal characters and an extension of the KP hierarchy. *Comm. Math. Phys.* **248**, 501–526 (2004)
- [19] Tsuda, T.: Universal characters, integrable chains and the Painlevé equations. *Adv. Math.* **197**, 587–606 (2005)
- [20] Tsuda, T.: Universal characters and q -Painlevé systems. *Comm. Math. Phys.* **260**, 59–73 (2005)
- [21] Tsuda, T.: Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system. *Adv. Math.*, in press
- [22] Tsuda, T.: Tau functions of q -Painlevé III and IV equations. *Lett. Math. Phys.*, in press
- [23] Tsuda, T.: Tropical Weyl group action via point configurations and τ -functions of the q -Painlevé equations. *Lett. Math. Phys.*, in press
- [24] Tsuda, T.: Universal character and q -difference Painlevé equations with affine Weyl groups. preprint: UTMS 2005–21
- [25] Tsuda, T.: Universal characters and integrable systems. Ph.D. thesis, The University of Tokyo, 2003
- [26] 津田照久: 普遍指標に付随する無限可積分系とパンルヴェ方程式. 九州大学応用力学研究所・研究集会報告 16 ME-S1, 128–136 (2005)
- [27] Tsuda, T., Masuda, T.: q -Painlevé VI equation arising from q -UC hierarchy. *Comm. Math. Phys.*, in press
- [28] 梅村浩: Painlevé 方程式の 100 年. *数学* **51**, 395–420 (1999)
- [29] Yamada, Y.: unpublished research announcement, 2004