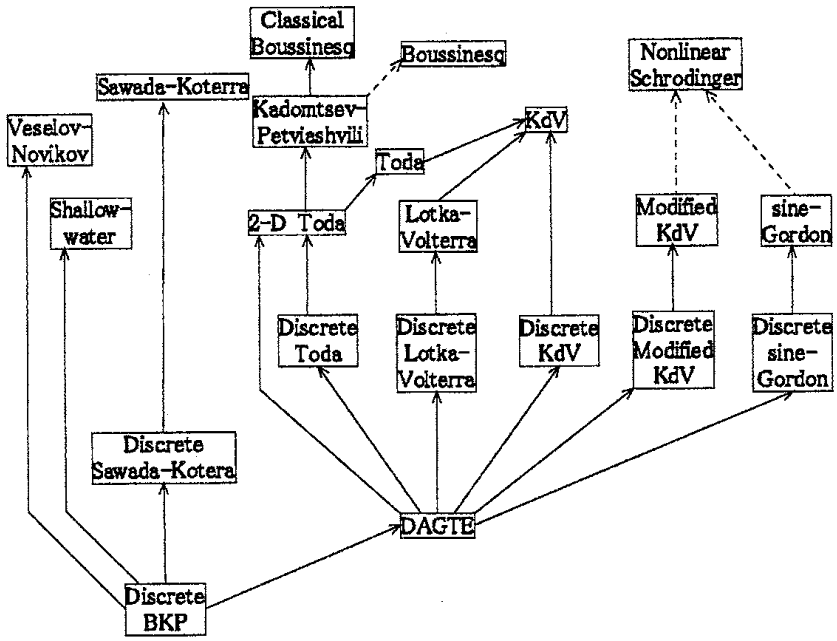
数理解析研究所講究録 1473 巻 2006 年 79-101

離散2D戸田方程式,Lax pair,保存量,非自励系

早稲田大学名誉教授 広田良吾
Ryogo Hirota
Professor Emeritus, Waseda University

Aug.23, 2005, 数理解析研



ソリトン方程式の系統図

ここでDAGTEはDiscrete Analogue of a Generalized Toda Equation の略で、次の簡単な双線形方程式である (Hirota 1981)[1]。

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f\cdot f=0$$

ただし$z_j(j=1,2,3)$は条件 $z_1+z_2+z_3=0$を満たす定数で、$D_j(j=1,2,3)$はD-operatorsで、D_m, D_n, D_tなどの線形結合である。

戸田方程式の復習

戸田方程式は双線形形式で

$$D_t^2 f_n \cdot f_n = 2[f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2]$$

と表される方程式である。

この方程式は離散化すると (δ を時間間隔として)

$$[\exp(D_t) - 1]f_n^t \cdot f_n^t = \delta^2[\exp(D_n) - 1]f_n^t \cdot f_n^t.$$

または

$$f_n^{t+1}f_n^{t-1} - (f_n^t)^2 = \delta^2[f_{n+1}^t f_{n-1}^t - (f_n^t)^2].$$

と表現される。

離散戸田方程式の２次元化はいろいろあるが、ここでは次の形の方程式を考える。

$$[\exp(D_t) - \delta^2\exp(D_m) - (1-\delta^2)\exp(D_n)]f_{m,n}^t \cdot f_{m,n}^t = 0.$$

この双線形方程式は従属変数変換

$$u_{m,n}^t = \frac{f_{m,n+1}^{t-1}f_{m-1,n-1}^t}{f_{m,n}^t f_{m-1,n}^{t-1}}, \quad v_{m,n}^t = \frac{f_{m+1,n}^{t-1}f_{m-1,n-1}^t}{f_{m,n}^t f_{m,n-1}^{t-1}}.$$

によって次の非線形差分方程式に変換される。

$$\begin{aligned}
&(1-\delta^2)(u_{m,n}^{t+1} - u_{m,n-1}^t) + \delta^2(v_{m,n}^{t+1} - v_{m-1,n}^t) = 0,\\
&u_{m,n}^{t+1}v_{m,n+1}^t = u_{m+1,n}^t v_{m,n}^{t+1}.
\end{aligned}$$

この式は次の mapping に等しい。

$$\begin{aligned}
v_{m,n}^{t+1} &= \frac{u_{m,n-1}^t + \hat{\delta}^2 v_{m-1,n}^t}{\frac{u_{m+1,n}^t}{v_{m,n+1}^t} + \hat{\delta}^2},\\
u_{m,n}^{t+1} &= v_{m,n}^{t+1}\frac{u_{m+1,n}^t}{v_{m,n+1}^t}, \quad \hat{\delta}^2 = \frac{\delta^2}{1-\delta^2}.
\end{aligned}$$

主要結果１、この方程式の双線形形式の Bäcklund transformation より Lax-pair を求め**保存量**の行列式表示を得た。

KP 方程式の復習

KP(Kadomtsev-Petviashvili) 方程式は双線形形式で

$$(D_x^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau \cdot \tau = 0.$$

と表される方程式である。2 ソリトン解は

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2),\\
\eta_j &= (p_j - q_j)x_1 + (p_j^2 - q_j^2)x_2 + (p_j^3 - q_j^3)x_3 + const, \quad j = 1,2,\\
a_{12} &= \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}.
\end{aligned}$$

と表現される。

Miwa(1982)[2] は、DAGTE の特別の場合 (a, b, c を定数として)

$$\begin{aligned}
&a(b-c)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1) + b(c-a)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\
&+c(a-b)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) = 0
\end{aligned}$$

が AKP(KP eq.of type A) 方程式であることを示し N-ソリトン解を求めた。

2 ソリトン解は

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2),\\
\eta_j &= [(1+p_ja)/(1+q_ja)]^l[(1+p_jb)/(1+q_jb)]^m[(1+p_jc)/(1+q_jc)]^n + const, j = 1,2,\\
a_{12} &= \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}.
\end{aligned}$$

と表現される。

a, b, c を差分間隔とすると

$$\lim_{a\to 0}(1+pa)^{(x/a)} = \exp(px)$$

であるので差分方程式の解はそれほど不自然ではない。

BKP 方程式の復習

BKP 方程式は双線形形式で

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5)\tau \cdot \tau = 0.$$

と表される方程式である。2 ソリトン解は

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + b_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2), \\
\eta_j &= (p_j + q_j)x_1 + (p_j^3 + q_j^3)x_3 + (p_j^5 + q_j^5)x_5 + const, \quad j = 1, 2, \\
b_{12} &= \frac{(p_1 - p_2)(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 + p_2)(p_1 + q_2)(q_1 + p_2)(q_1 + q_2)}.
\end{aligned}$$

と表現される。

Miwa によって発見された Discrete BKP (KP eq.of type B) 方程式 [2] は双線形方程式で

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a+c)(b-c)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1) \\
&+(b+c)(b+a)(c-a)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1) \\
&+(c+a)(c+b)(a-b)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) \\
&+(a-b)(b-c)(c-a)\tau(l,m,n)\tau(l+1,m+1,n+1) = 0
\end{aligned}$$

と表されている。

2 ソリトン解は

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + b_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2), \\
\eta_j &= C_j [\frac{(1-p_j a)(1-q_j a)}{(1+p_j a)(1+q_j a)}]^l \\
&\quad [\frac{(1-p_j b)(1-q_j b)}{(1+p_j b)(1+q_j b)}]^m \\
&\quad [\frac{(1-p_j c)(1-q_j c)}{(1+p_j c)(1+q_j c)}]^n, \quad j = 1, 2, \\
b_{12} &= \frac{(p_1 - p_2)(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 + p_2)(p_1 + q_2)(q_1 + p_2)(q_1 + q_2)}.
\end{aligned}$$

と表現される。

Discreter BKP 方程式は一般化可能で

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4)] f \cdot f = 0$$

と簡明に表現される。ただし $D_j(j=1,2,3,4)$ は 同じようなD-operators で、条件式

$$D_1+D_2+D_3+D_4=0$$

を満たし、$z_j(j=1,2,3,4)$ は定数で条件式

$$z_1+z_2+z_3+z4=0$$

を満たしている。
この方程式を Generalized discrete BKP(GDBKP) 方程式 と呼ぶ。

主要結果 2 GDBKP 方程式の N ソリトン解は Discret BKP の解から
座標とパラメータの変換によって構成できることを示す。

非自励 (nonautonomous) ソリトン方程式の復習

最も一般的な非自励ソリトン方程式として次の形の KP 方程式がよく知られている。
(i)

$$\begin{aligned}&a_l(b_m-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+b_m(c_n-a_l)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\&\quad c_n(a_l-b_m)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)=0,\end{aligned}$$

(ii) [5]

$$\begin{aligned}&(b_m-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+(c_n-a_l)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\&\quad(a_l-b_m)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)=0.\end{aligned}$$

主要結果 3 Discrete KP equation の Bäcklund 変換より, 非自励系になるための
条件を求め、次の形の KP 方程式も非自励ソリトン方程式であることを示した。

$$\begin{aligned}&a_m(b_l-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+b_l(c_n-a_m)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\&\quad+c_n(a_m-b_l)\tau(l+1,m+1,n+1)\tau(l,m,n)=0,\end{aligned}$$

Discrete BKP equation の Bäcklund 変換はすでに求められているが、この結果を利用して、
主要結果 4 次の形の BKP 方程式も非自励ソリトン方程式であることを示した。

$$\begin{aligned}&(a_l+b_m)(a_l+c_n)(b_m-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)\\&+(b_m+c_n)(b_m+a_l)(c_n-a_l)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\&+(c_n+a_l)(c_n+b_m)(a_l-b_m)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)\\&+(a_l-b_m)(b_m-c_n)(c_n-a_l)\tau(l,m,n)\tau(l+1,m+1,n+1)=0.\end{aligned}$$

Bäcklund 変換の復習

双線形形式 (DAGTE)[1]

$$\{z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)\}f\cdot f=0, \tag{1}$$

の Bäcklund 変換は論文 [1] で次のように求められている。
天下りに次の式 P を考える。

$$P\equiv\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f'\cdot f'\}\cdot\{\exp(D_3)f\cdot f\}$$
$$-\{\exp(D_3)f'\cdot f'\}\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f\cdot f\}.$$

$P=0$ のとき, f が Eq.(1) の解であれば、 f' も Eq.(1) の解になり、
その逆も成り立つ。 $P=0$ となるような f' と f の関係式をもとめる.

$$P=z_1\{(\exp(D_1)f'\cdot f')(\exp(D_3)f\cdot f)-(\exp(D_3)f'\cdot f')(\exp(D_1)f\cdot f)\}$$
$$+z_2\{(\exp(D_2)f'\cdot f')(\exp(D_3)f\cdot f)-(\exp(D_3)f'\cdot f')(\exp(D_2)f\cdot f)\}.$$

であるので、交換公式 (exchange formula)

$$\{\exp(D_1)f_1\cdot f_1\}\{\exp(D_3)f_2\cdot f_2\}$$
$$=\exp[(\sigma_1D_1-\sigma_3D_3)/2]\{\exp[(\sigma_1D_1+\sigma_3D_3)/2]f_1\cdot f_2\}\cdot\{\exp[(\sigma_1D_1+\sigma_3D_3)/2]f_2\cdot f_1\},$$
$$\sigma_1=\pm1,\sigma_3=\pm1.$$

を使う。
$\sigma_1=1,\sigma_3=-1$ として交換公式を使うと P は変換されて

$$\begin{aligned}P=z_1\{&\exp[(D_1+D_3)/2]\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot f'\}\\&-\exp[-(D_1+D_3)/2]\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot f'\}\}\\&+z_2\{\exp[(D_2+D_3)/2]\{\exp[(D_2-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot f'\}\\&-\exp[-(D_2+D_3)/2]\{\exp[(D_2-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot f'\}\}.\end{aligned} \tag{2}$$

となる。
ここで f' と f の関係式として次式を仮定する。

$$\{\alpha_1\exp[(D_1-D_3)/2]-\exp[-(D_1-D_3)/2]-\beta_1\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]\}f'\cdot f=0, \tag{3}$$
$$\{\alpha_2\exp[(D_2-D_3)/2]-\exp[-(D_2-D_3)/2]-\beta_2\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]\}f'\cdot f=0, \tag{4}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ は 後で定まる定数である。 上の二式は書き直すと

$$\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot f'=\{\alpha_1\exp[(D_1-D_3)/2]-\beta_1\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]\}f'\cdot f, \tag{5}$$
$$\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot f'=\{\alpha_2\exp[(D_2-D_3)/2]-\beta_2\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]\}f'\cdot f. \tag{6}$$

となる。式 (5) と (6) を方程式 (2) に代入すると

$$
\begin{aligned}
P = & -z_1\{\exp[(D_1+D_3)/2]-\exp[-(D_1+D_3)/2]\} \\
& \qquad \{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\beta_1\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\} \\
& -z_2\{\exp[(D_2+D_3)/2]-\exp[-(D_2+D_3)/2]\} \\
& \qquad \{\exp[(D_2-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\beta_2\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]f'\cdot f\}.
\end{aligned}
$$

となる。ここで次の恒等式を使う。

$$
\begin{aligned}
& \exp[(D_1+D_3)/2]\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\} \\
& = \exp[(D_2+D_3)/2]\{\exp[(D_2-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]f'\cdot f\}, \quad (7)
\end{aligned}
$$

注釈　上式 (7) の左辺は書き直すと

$$
\begin{aligned}
l.h.s \;=\; & \exp[(D_1+D_3)/2]f'(x_1+1/2,x_2,x_3-1/2)f(x_1-1/2,x_2,x_3+1/2) \\
& \qquad \cdot f'(x_1+1/2,x_2+1,x_3+1/2)f(x_1-1/2,x_2-1,x_3-1/2) \\
=\; & f'(x_1+1,x_2,x_3)f(x_1,x_2,x_3+1)f'(x_1,x_2+1,x_3)f(x_1-1,x_2-1,x_3-1),
\end{aligned}
$$

となるがこの式は x_1 と x_2 を入れ換えても不変であるしたがって右辺に等しく恒等式は成立している。どうようにして恒等式

$$
\begin{aligned}
& \exp[-(D_1+D_3)/2]\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\} \\
& = \exp[-(D_2+D_3)/2]\{\exp[(D_2-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]f'\cdot f\}.(8)
\end{aligned}
$$

も成り立つ。
これらの恒等式を使うと P は最終的に次式になる。

$$
\begin{aligned}
P = & -[z_1\beta_1+z_2\beta_2]\exp[(D_1+D_3)/2] \\
& \qquad \times\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\} \\
& +[z_1\beta_1+z_2\beta_2]\exp[-(D_1+D_3)/2] \\
& \qquad \times\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\}, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

したがって定数 β_1, β_2 が関係式

$$z_1\beta_1+z_2\beta_2=0$$

を満たすとき $P=0$ である. したがって 方程式 (3) と (4) が Bäcklund 変換式になる。ただし 式 (3) と (4) は両立条件を満たす必要がある。

Lax Pair の復習

双線形方程式

$$\{z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)\}f\cdot f=0, \tag{10}$$

の Bäcklund 変換式

$$\begin{aligned}&\{\alpha_1\exp[(D_1-D_3)/2]-\exp[(-D_1+D_3)/2]-\beta_1\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]\}f'\cdot f=0,\\&\{\alpha_2\exp[(D_2-D_3)/2]-\exp[(-D_2+D_3)/2]-\beta_2\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]\}f'\cdot f=0,\\&\qquad\beta_1z_1+\beta_2z_2=0.\end{aligned}$$

は変換

$$f'=\phi f$$

によって Lax Pair

$$\{\alpha_1\exp[(\partial_1-\partial_3)/2]-\exp[(-\partial_1+\partial_3)/2]-\beta_1\hat{u}\exp[(\partial_1+2\partial_2+\partial_3)/2]\}\phi=0, \tag{11}$$
$$\{\alpha_2\exp[(\partial_2-\partial_3)/2]-\exp[(-\partial_2+\partial_3)/2]+\beta_2\hat{v}\exp[(\partial_2+2\partial_1+\partial_3)/2]\}\phi=0, \tag{12}$$

に変換される [3]。ただし $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, for $i=1,2,3$ であり、従属変数 $\hat{u},\hat{v}$ は次式で与えられる。

$$\hat{u}=\frac{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f\cdot f}{\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot f},$$
$$\hat{v}=\frac{\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]f\cdot f}{\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot f}.$$

方程式 (11),(12) にシフト演算子 $\exp[(-\partial_1+\partial_3)/2]$ と $\exp[(-\partial_2+\partial_3)/2]$ それぞれ演算し、整理すると次の形式の Lax-pair が得られる。

$$\{e^{-\partial_1+\partial_3}+\beta_1ue^{\partial_2+\partial_3}\}\phi=\alpha_1\phi, \tag{13}$$
$$\{e^{-\partial_2+\partial_3}+\beta_2ve^{\partial_1+\partial_3}\}\phi=\alpha_2\phi, \tag{14}$$

ここで

$$u=\frac{(e^{\partial_2+\partial_3}f)(e^{-\partial_1-\partial_2}f)}{f(e^{-\partial_1+\partial_3}f)}, \tag{15}$$
$$v=\frac{(e^{\partial_1+\partial_3}f)(e^{-\partial_1-\partial_2}f)}{f(e^{-\partial_2+\partial_3}f)}, \tag{16}$$

である。

両立条件 (Compatibility Condition) の復習

まず方程式 (13) と (14) の両立条件から u と v にたいする方程式

$$\begin{aligned}
&\beta_1 u(x_1,x_2,x_3)-\beta_1 u(x_1,x_2-1,x_3+1)\\
&\quad=\beta_2 v(x_1,x_2,x_3)-\beta_2 v(x_1-1,x_2,x_3+1), \qquad (17)\\
&u(x_1,x_2,x_3)v(x_1,x_2+1,x_3+1)=u(x_1+1,x_2,x_3+1)v(x_1,x_2,x_3), \qquad (18)
\end{aligned}$$

が生成される。

演算子 L_1, L_2 を導入して方程式 (13), (14) を次式のように表す。

$$L_1\phi=\alpha_1\phi,\quad L_2\phi=\alpha_2\phi,$$

ここで

$$L_1=e^{-\partial_1+\partial_3}+\beta_1 u e^{\partial_2+\partial_3},\quad L_2=e^{-\partial_2+\partial_3}+\beta_2 v e^{\partial_1+\partial_3}.$$

である。両立条件は演算子 L_1, L_2 の交換関係から求められる。

$$[L_1,L_2]\equiv L_1L_2-L_2L_1=0.$$

計算の結果

$$\begin{aligned}
&[L_1,L_2]\\
&=[e^{-\partial_1+\partial_3},\beta_2 v e^{\partial_1+\partial_3}]+[\beta_1 u e^{\partial_2+\partial_3},e^{-\partial_2+\partial_3}]+[\beta_1 u e^{\partial_2+\partial_3},\beta_2 v e^{\partial_1+\partial_3}]\\
&=\beta_2 v(x_1-1,x_2,x_3+1)e^{2\partial_3}-\beta_2 v(x_1,x_2,x_3)e^{2\partial_3}\\
&\quad+\beta_1 u(x_1,x_2,x_3)e^{2\partial_3}-\beta_1 u(x_1,x_2-1,x_3+1)e^{2\partial_3}\\
&\quad+\beta_1 u(x_1,x_2,x_3)\beta_2 v(x_1,x_2+1,x_3+1)e^{\partial_1+\partial_2+2\partial_3}\\
&\quad-\beta_2 v(x_1,x_2,x_3)\beta_1 u(x_1+1,x_2,x_3+1)e^{\partial_1+\partial_2+2\partial_3}.
\end{aligned}$$

この結果より、方程式 (17),(18) の成立が Lax-pair(13),(14) の両立条件となる。

以上の結果を離散 2 次元戸田方程式

$$[\exp(D_t)-\delta^2\exp(D_m)-(1-\delta^2)\exp(D_n)]f^t_{m,n}\cdot f^t_{m,n}=0.$$

に適用する。座標 $x_1=m,x_2=n,x_3=-t.$ を選ぶと、対応する定数は $z_1=-\delta^2,z_2=-(1-\delta^2),z_3=1$ となる。このとき Lax-pair(13),(14) は

$$\begin{aligned}
L_1&=\exp(-\partial_m-\partial_t)+\beta_1 u\exp(\partial_n-\partial_t),\\
L_2&=\exp(-\partial_n-\partial_t)+\beta_2 v\exp(\partial_m-\partial_t),
\end{aligned}$$

となり、方程式 (17),(18) は

$$\beta_1(u^t_{m,n} - u^{t-1}_{m,n-1}) = \beta_2(v^t_{m,n} - v^{t-1}_{m-1,n}),$$
$$u^t_{m,n}v^{t-1}_{m,n+1} = u^{t-1}_{m+1.n}v^t_{m,n}.$$

と表される。この式で t を $t+1$ にシフトし、関係式 $z_1\beta_1 + z_2\beta_2 = 0$ を使うと次の非線形差分方程式になる。

$$(1-\delta^2)(u^{t+1}_{m,n} - u^t_{m,n-1}) + \delta^2(v^{t+1}_{m,n} - v^t_{m-1,n}) = 0,$$
$$u^{t+1}_{m,n}v^t_{m,n+1} = u^t_{m+1,n}v^{t+1}_{m,n}.$$

この式は初めに考慮した離散的２次元戸田方程式である。

次にこの方程式の保存量を求める。

離散的２次元戸田方程式の 保存量

離散的２次元戸田方程式の Lax-pair を次式のように表す。

$$A(t)\phi(t-1) = \alpha_1\phi(t),$$
$$B(t)\phi(t-1) = \alpha_2\phi(t),$$

ここで

$$A(t) = \exp(-\partial_m) + \beta_1 u\exp(\partial_n),$$
$$B(t) = \exp(-\partial_n) + \beta_2 v\exp(\partial_m).$$

従属変数 $u^t_{m,n}, v^t_{m,n}$ に周期的境界条件を設定する：

$$u^t_{m+M.n+N} = u^t_{m,n}, \quad v^t_{m+M.n+N} = v^t_{m,n}.$$

このとき $\phi(t)$ は $M\times N$ 次元の縦ベクトルになり $A(t)$, $B(t)$ は $M\times N$ 次元の マトリックスになる。
Lax-pair より

$$A(t+1)B(t)\phi(t-1) = A(t+1)\alpha_2\phi(t) = \alpha_1\alpha_2\phi(t+1),$$
$$B(t+1)A(t)\phi(t-1) = B(t+1)\alpha_1\phi(t) = \alpha_1\alpha_2\phi(t+1).$$

となるので等式

$$A(t+1)B(t) = B(t+1)A(t),$$

が成り立つ。したがって

$$A(t)B(t)^{-1}=B(t+1)^{-1}A(t+1).$$

である。この結果、任意の自然数kにたいして等式

$$\mathrm{Tr}[A(t)B(t)^{-1}]^k=\mathrm{Tr}[A(t+1)B(t+1)^{-1}]^k,\quad \text{for } k=1,2,3,\cdots,$$

が成り立つ。この等式は $\mathrm{Tr}[A(t)B(t)^{-1}]^k$ for $k=1,2,3,\cdots$, が保存量（tに依存しない量）であることを意味している.

マトリックス A,B の表示

表示を簡単にするために$x=\beta_1 u, y=\beta_2 v$と置き、時間tも省略して、

$$A=\exp(-\partial_m)+x_{mn}\exp(\partial_n),$$
$$B=\exp(-\partial_n)+y_{mn}\exp(\partial_m),$$

と表す。具体的に周期が$M=3, N=4$の場合に結果だけを記す。方程式

$$[\exp(-\partial_m)+x_{mn}\exp(\partial_n)]\phi_{mn}=\alpha_1\phi_{mn},$$
$$[\exp(-\partial_n)+y_{mn}\exp(\partial_m)]\phi_{mn}=\alpha_2\phi_{mn},\quad m=1,2,3,\ n=1,2,3,4.$$

はマトリックス形式で

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & E \\ E & X_2 & 0 \\ 0 & E & X_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} S & Y_1 & 0 \\ 0 & S & Y_2 \\ Y_3 & 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}=\alpha_2\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix},$$

となる。ただし$X_j, Y_j\ (j=1,2,3)$とE, Sは4×4行列であり、$\Phi_j\ (j=1,2,3)$は4次の縦ベクトルである。これらは次のように定義されている。

$$X_j=\begin{pmatrix} 0 & x_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{j3} \\ x_{j4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Y_j=\begin{pmatrix} y_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{j2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{j3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{j4} \end{pmatrix},$$
$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \Phi_j=\begin{pmatrix} \phi_{j1} \\ \phi_{j2} \\ \phi_{j3} \\ \phi_{j4} \end{pmatrix}.$$

これらの表示を使うと保存量 $\mathrm{Tr}[A(t)B(t)^{-1}]^k$ $k=1,2,3,\cdots$ の具体的な形が計算できる。

座標変換とパラメータの変換

(A) 座標変換

dKP 方程式:

$$[a(b-c)\exp((D_l-D_m-D_n)/2)+b(c-a)\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+c(a-b)\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0.$$

や dBKP 方程式:

$$[(a+b)(a+c)(b-c)\exp((D_l-D_m-D_n)/2)$$
$$+(b+c)(b+a)(c-a)\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+(c+a)(c+b)(a-b)\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)$$
$$+(a-b)(b-c)(c-a)\exp((D_l+D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0.$$

の N ソリトン解はよく知られている。ここではこれらの方程式の座標を一般化した方程式、
dgKP 方程式:

$$[a(b-c)\exp(D_1)+b(c-a)\exp(D_2)+c(a-b)\exp(D_3)]f\cdot f=0.$$

や dgBKP 方程式:

$$[(a+b)(a+c)(b-c)\exp(D_1)+(b+c)(b+a)(c-a)\exp(D_2)$$
$$+(c+a)(c+b)(a-b)\exp(D_3)+(a-b)(b-c)(c-a)\exp(D_4)]f\cdot f=0,$$
$$D_1+D_2+D_3+D_4=0.$$

のソリトン解を考える。

ソリトン解は元の方程式の解から**座標変換**によって簡単に求まることを示す。
座標変換は双線形差分演算子の変換

$$D_1=(D_l-D_m-D_n)/2,\quad D_2=(-D_l+D_m-D_n)/2,\quad D_3=(-D_l-D_m+D_n)/2.$$

より、

$$l=(x_1-x_2-x_3)/2,\quad m=(-x_1+x_2-x_3)/2,\quad n=(-x_1-x_2+x_3)/2.$$

を得る。この l,m,n を元の方程式のソリトン解に代入したものが新しい方程式のソリトン解になる。
たとえば dgKP 方程式の 2 ソリトン解は

$$f(x_1,x_2,x_3)=1+\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2)+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2),$$
$$\eta_j=C_j[(1+p_ja)/(1+q_ja)]^{(x_1-x_2-x_3)/2}[(1+p_jb)/(1+q_jb)]^{(-x_1+x_2-x_3)/2}$$
$$[(1+p_jc)/(1+q_jc)]^{(-x_1-x_2+x_3)/2},\quad j=1,2,$$
$$a_{12}=\frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}.$$

で与えられる。

dgBKP 方程式のソリトン解も全く同じ**座標変換**で与えられる。

(A) パラメータの変換

それでは dKP 方程式や dBKP 方程式に現れるパラメータを次のように一般化すると解はどうなるだろうか？
dgKP 方程式:

$$[z_1\exp((D_l-D_m-D_n)/2)+z_2\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+z_3\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0.$$

dBKP 方程式:

$$[z_1\exp((D_l-D_m-D_n)/2)+z_2\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+z_3\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)+z_4\exp((D_l+D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0.$$
$$z_1+z_2+z_3+z_4=0.$$

この場合は dKP 方程式や dBKP 方程式を定数 (dKP では abc、dBKP では $(a+b)(b+c)(c+a)$) で割った方程式を考える。
すなわち dKP 方程式では

$$[(b^{-1}-c^{-1})\exp((D_l-D_m-D_n)/2)+(c^{-1}-a^{-1})\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+(a^{-1}-b^{-1})\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0. \tag{19}$$

を、dBKP 方程式では

$$[\frac{(b-c)}{(b+c)}\exp((D_l-D_m-D_n)/2)$$
$$+\frac{(c-a)}{(c+a)}\exp((-D_l+D_m-D_n)/2)$$
$$+\frac{(a-b)}{(a+b)}\exp((-D_l-D_m+D_n)/2)$$
$$+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\exp((D_l+D_m+D_n)/2)]f\cdot f=0. \tag{20}$$

を考える。定数で割っても双線形方程式の解は不変である。

dKP 方程式の場合

方程式 (19) と dKP 方程式を比較して

$$z_1 = b^{-1} - c^{-1},$$
$$z_2 = c^{-1} - a^{-1},$$
$$z_3 = a^{-1} - b^{-1}.$$

である。この方程式の初めの 2 式を解いて

$$a^{-1} = c^{-1} - z_2,$$
$$b^{-1} = c^{-1} + z_1.$$

c^{-1} は任意に選べるので、

$$c^{-1} = z_3.$$

を選ぶ。したがって

$$a^{-1} = z_3 - z_2, \quad b^{-1} = z_3 + z_1, \quad c^{-1} = z_3.$$

となる。

dKP 方程式のソリトン解に現れるパラメータ a, b, c にこの関係式を代入したものが方程式 (19) の解になる。

一般的な KP 方程式 (DAGTE)

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3)] f \cdot f = 0, \quad (z_1 + z_2 + z_3 = 0)$$

のソリトン解は**座標変換とパラメータの変換**を組み合わせて dKP 方程式のソリトン解より構成される。

dBKP 方程式の場合

方程式 (20) と dbKP 方程式を比較して

$$z_1 = \frac{(b-c)}{(b+c)},$$
$$z_2 = \frac{(c-a)}{(c+a)},$$
$$z_3 = \frac{(a-b)}{(a+b)},$$

と置くと解は0となる。少し工夫して任意パラメータδを導入して

$$\begin{aligned} \delta z_1 &= \frac{(b-c)}{(b+c)}, \\ \delta z_2 &= \frac{(c-a)}{(c+a)}, \\ \delta z_3 &= \frac{(a-b)}{(a+b)}, \end{aligned} \tag{21}$$

と置く。関係式

$$\delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta^3 z_1 z_2 z_3 = 0$$

が成り立つので、この式を解いて

$$\delta^2 = -\frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 z_2 z_3}$$

を得る。方程式(21)の初めの2式を解いて

$$b = c\frac{1+\delta z_1}{1-\delta z_1}, \quad a = c\frac{1-\delta z_2}{1+\delta z_2}.$$

cは任意に選べるので、$c = z_3$. を選ぶ。したがって

$$a = z_3\frac{1-\delta z_2}{1+\delta z_2}. \quad b = z_3\frac{1+\delta z_1}{1-\delta z_1}, \quad c = z_3.$$

でなる。

dBKP方程式のソリトン解に現れるパラメータa, b, cにこの関係式を代入したものが方程式(20)の解になる。

一般的なBKP方程式

$$\begin{gathered} [z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4)] f \cdot f = 0, \\ z_1 + z_2 + z_3 + z4 = 0, \quad D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 0. \end{gathered}$$

のソリトン解は**座標変換とパラメータの変換**を組み合わせてdBKP方程式のソリトン解より構成される。

一般的BKP方程式のBäcklund 変換の復習

一般的BKP方程式

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f=0,$$
$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,\quad D_1+D_2+D_3+D_4=0.$$

のBäcklund 変換は[4]で議論されているが、Nonautonomous BKP equationの導出に役立つように書き直す。一般的BKP方程式のBäcklund 変換はKP方程式のときと全く同じ手順で以下のように求められる、
天下りに次の式Pを考える。

$$P\equiv\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f'\cdot f'\}\cdot\{\exp(D_4)f\cdot f\}$$
$$-\{\exp(D_4)f'\cdot f'\}\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}.$$

$P=0$となるようなf'とfの関係式を求める。
交換公式

$$\{\exp(D_j)f_1\cdot f_1\}\{\exp(D_4)f_2\cdot f_2\}$$
$$=\exp[(\sigma_jD_j-\sigma_4D_4)/2]\{\exp[(\sigma_jD_j+\sigma_4D_4)/2]f_1\cdot f_2\}\cdot\{\exp[(\sigma_jD_j+\sigma_4D_4)/2]f_2\cdot f_1\},$$
$$\sigma_j=\pm1,\sigma_4=\pm1.$$

で$\sigma_j=1,\sigma_4=-1$とするとPは変換されて

$$P=\sum_{j=1}^{3}2z_j\sinh[(D_j+D_4)/2]\{\exp[(D_j-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_j-D_4)/2]f\cdot f'\}.\tag{22}$$

となる。ここでf'とfの関係式として次式を仮定する。

$$\{\alpha_j\exp[(D_j-D_4)/2]-\exp[-(D_j-D_4)/2]-\beta_j\exp[(D_j+2D_{j+1}+D_4)/2]$$
$$-\gamma_j\exp[(D_j+2D_{j-1}+D_4)/2]\}f'\cdot f=0,\quad j=1,2,3.\tag{23}$$

ただし$j=1$のとき$D_{j-1}=D_3$とし$j=3$のとき$D_{j+1}=D_1$とする。ここでα_j,β_j, $(j=1,2,3)$ は 後で定まる定数である。上式は書き直すと

$$\exp[(D_j-D_4)/2]f\cdot f'=\{\alpha_j\exp[(D_j-D_4)/2]$$
$$-\beta_j\exp[(D_j+2D_{j+1}+D_4)/2]-\gamma_j\exp[(D_j+2D_{j-1}+D_4)/2]\}f'\cdot f.\tag{24}$$

となる。
式(24)を方程式(22)に代入すると

$$P=\sum_{j=1}^{3}2z_j\sinh[(D_j+D_4)/2]\ \{\exp[(D_1-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot$$
$$\{\ \alpha_j\exp[(D_j-D_4)/2]f'\cdot f-\beta_j\exp[(D_j+2D_{j+1}+D_4)/2]f'\cdot f$$
$$-\gamma_j\exp[(D_j+2D_{j-1}+D_4)/2]f'\cdot f\ \}.$$

となる。ここで次の恒等式を使う。

$$\sinh[(D_j+D_4)/2]\{\exp[(D_j-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_j+2D_{j+2}+D_4)/2]f'\cdot f\}$$
$$=\sinh[(D_{j+1}+D_4)/2]\{\exp[(D_{j+1}-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_{j+1}+2D_j+D_4)/2]f'\cdot f\},$$
$$j=1,2,3. \tag{25}$$

これらの恒等式を使うと P は最終的に次式になる。

$$=-[z_1\beta_1+z_2\gamma_2]2\sinh[(D_1+D_4)/2]\{\exp[(D_1-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_4)/2]f'\cdot f\}$$
$$-[z_2\beta_2+z_2\gamma_2]2\sinh[(D_2+D_4)/2]\{\exp[(D_2-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_2+2D_3+D_4)/2]f'\cdot f\}$$
$$-[z_3\beta_3+z_3\gamma_3]2\sinh[(D_3+D_4)/2]\{\exp[(D_3-D_4)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_3+2D_1+D_4)/2]f'\cdot f\}.$$

したがって定数 $\beta_j,\gamma_j,\ j=1,2,3$ が関係式

$$z_1\beta_1+z_2\gamma_2=0,\quad z_2\beta_2+z_3\gamma_3=0,\quad z_3\beta_3+z_1\gamma_1=0,$$

を満たすとき $P=0$ である．したがって 方程式 (23) が Bäcklund 変換式の候補になる。
論文 [4] で議論されて方法を使うと定数 $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\ j=1,2,3$ が更なる関係式

$$z_1\gamma_1/\alpha_1+z_2\beta_2/\alpha_2=0,\quad z_2\gamma_2/\alpha_2+z_3\beta_3/\alpha_3=0,\quad z_3\gamma_3/\alpha_3+z_1\beta_1/\alpha_1=0.$$

を満たすとき"Symmetric Bäcklund 変換方程式" が導かれる。
Symmetric Bäcklund 変換方程式は (8 × 8 次の行列)×(8 成分ベクトル)=0 の形に表現され、Bäcklund 変換の Compatibility condition はこの行列の行列式が 0 になる：

$$\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f'\cdot f'\}^4=0,$$

という形式で与えられる。

非自励系の条件

ソリトン方程式のパラメータが独立変数に依存する場合を 非自励ソリトン方程式と呼ぶ。非自励ソリトン方程式の Bäcklund 変換を調べ、パラメータが独立変数のどのような関数のとき Bäcklund 変換が成立するか、そのための条件（必要条件）を求める。

まず次の非自励一般化 KP 方程式

$$[z_1(x_1,x_2,x_3)\exp(D_1)+z_2(x_1,x_2,x_3)\exp(D_2)+z_3(x_1,x_2,x_3)\exp(D_3)]f\cdot f=0,$$

の Bäcklund 変換を調べる。

Bäcklund 変換の要点は次の量 P

$$\begin{aligned}P\equiv&\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f'\cdot f'\}\cdot\{\exp(D_3)f\cdot f\}\\&-\{\exp(D_3)f'\cdot f'\}\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f\cdot f\}.\end{aligned}\tag{26}$$

を、仮定した Bäcklund 変換式（の候補）

$$\{\alpha_1\exp[(D_1-D_3)/2]-\exp[-(D_1-D_3)/2]-\beta_1\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]\}f'\cdot f=0,$$
$$\{\alpha_2\exp[(D_2-D_3)/2]-\exp[-(D_2-D_3)/2]-\beta_2\exp[(D_2+2D_1+D_3)/2]\}f'\cdot f=0,$$

を使って、次のように変換することである。

$$\begin{aligned}P=&-[z_1\beta_1+z_2\beta_2]\exp[(D_1+D_3)/2]\\&\quad\times\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\}\\&+[z_1\beta_1+z_2\beta_2]\exp[-(D_1+D_3)/2]\\&\quad\times\{\exp[(D_1-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+2D_2+D_3)/2]f'\cdot f\}\end{aligned}\tag{27}$$

この結果パラメータが条件

$$z_1\beta_1+z_2\beta_2=0\tag{28}$$

を満たすとき $P=0$ となる。
式 (26) を式 (27) に変換する途中で次の変換式 ($j=1,2$ にたいして)

$$\begin{aligned}&z_j\exp[\pm(D_j+D_3)/2]\{\exp[(D_j-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\\&\quad\{(\alpha_j\exp[(D_j-D_3)/2]-\beta_j\exp[(D_j+2D_{j+1}+D_3)/2])f'\cdot f\}\\&=-z_j\beta_j\exp[\pm(D_j+D_3)/2]\{\exp[(D_j-D_3)/2]f'\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_j+2D_{j+1}+D_3)/2]f'\cdot f\},\end{aligned}$$

を使っている。ここで $j=2$ のとき $D_{j+1}=D_1$ とする。

非自励一般化 KP 方程式でこの変換式が成立する、すなわちパラメータ α_j, β_j が演算子 $\exp[\pm(D_j + D_3)/2]$ と可換である、ためには条件式

$$(\frac{\partial}{\partial_j} + \frac{\partial}{\partial_3})\alpha_j = 0, \quad (\frac{\partial}{\partial_j} + \frac{\partial}{\partial_3})\beta_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

が必要である。

同じようにして非自励一般化 BKP 方程式

$$\begin{aligned}&[z_1(x_1, x_2, x_3)\exp(D_1) + z_2(x_1, x_2, x_3)\exp(D_2)\\&\quad + z_3(x_1, x_2, x_3)\exp(D_3) + z_4(x_1, x_2, x_3)\exp(D_4)] f \cdot f = 0,\end{aligned}$$

の Bäcklund 変換では条件式

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_4})\alpha_j = 0, \quad (\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_4})\beta_j = 0, \quad (\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_4})\gamma_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{29}$$

が必要となる。

KP 方程式の場合

非自励 KP 方程式では

$$D_1 = \frac{1}{2}(D_l - D_m - D_n), \quad D_2 = \frac{1}{2}(-D_l + D_m - D_n), \quad D_3 = \frac{1}{2}(-D_l - D_m + D_n).$$

であるので、$D_1 + D_3 = -D_m$, $D_2 + D_3 = -D_l$ となる。条件式 (29) は

$$\frac{\partial}{\partial m}\alpha_1 = 0, \ \frac{\partial}{\partial m}\beta_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial l}\alpha_2 = 0, \ \frac{\partial}{\partial l}\beta_2 = 0,$$

となる。この条件と式 (28)

$$z_1\beta_1 + z_2\beta_2 = 0.$$

より z_1, z_2 に対する条件

$$\frac{\partial}{\partial l}z_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial m}z_2 = 0$$

が得られる。したがって

(i) $z_1 = b_m^{-1} - c_n^{-1}$, $z_2 = c_n^{-1} - a_l^{-1}$, $z_3 = -z_1 - z_2 = a_l^{-1} - b_m^{-1}$.

または

(ii) $z_1 = b_m - c_n$, $z_2 = c_n - a_l$, $z_3 = -z_1 - z_2 = a_l - b_m$.

となる。

(i) は非自励 KP 方程式

$$a_l(b_m-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+b_m(c_n-a_l)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)$$
$$c_n(a_l-b_m)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)=0,$$

(ii) は非自励 KP 方程式

$$(b_m-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+(c_n-a_l)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)$$
$$(a_l-b_m)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)=0.$$

を与える。

新しい非自励 KP 方程式

次の双線形方程式を考える。

$\{z_1\exp[(D_l-D_m-D_n)/2]+z_2\exp[(-D_l+D_m-D_n)/2]+z_3\exp[(D_l+D_m+D_n)/2]\}f\cdot f=0.$

この場合は $D_1=(D_l-D_m-D_n)/2,\ D_2=(-D_l+D_m-D_n)/2,\ D_3=(D_l+D_m+D_n)/2$ より、$D_1+D_3=D_l,\ D_2+D_3=D_m$ である。したがって条件式は

$$\frac{\partial}{\partial l}\alpha_1=0,\ \frac{\partial}{\partial l}\beta_1=0,\quad \frac{\partial}{\partial m}\alpha_2=0,\ \frac{\partial}{\partial m}\beta_2=0,$$

となる。この条件と式 (28)

$$z_1\beta_1+z_2\beta_2=0.$$

より z_1,z_2 に対する条件

$$\frac{\partial}{\partial m}z_1=0,\quad \frac{\partial}{\partial l}z_2=0$$

が得られる。したがって

$z_1=b_l^{-1}-c_n^{-1},\ z_2=c_n^{-1}-a_m^{-1},\ z_3=-z_1-z_2=a_m^{-1}-b_l^{-1}.$

すなわち新しい非自励 KP 方程式

$$(b_l-c_n)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+(c_n-a_m)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)$$
$$(a_m-b_l)\tau(l+1,m+1,n+1)\tau(l,m,n)=0.$$

が得られた。

BKP 方程式の場合

非自励 BKP 方程式では

$$D_1 = \frac{1}{2}(D_l - D_m - D_n),\ D_2 = \frac{1}{2}(-D_l + D_m - D_n),$$
$$D_3 = \frac{1}{2}(-D_l - D_m + D_n),\ D_4 = \frac{1}{2}(D_l + D_m + D_n).$$

であるので、$D_1 + D_4 = D_l,\ D_2 + D_4 = D_m,\ D_3 + D_4 = D_n$ となる。
条件式 (29) は

$$\frac{\partial}{\partial l}\alpha_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial l}\beta_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial l}\gamma_1 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial m}\alpha_2 = 0,\ \frac{\partial}{\partial m}\beta_2 = 0,\ \frac{\partial}{\partial m}\gamma_2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\alpha_3 = 0,\ \frac{\partial}{\partial n}\beta_3 = 0,\ \frac{\partial}{\partial n}\gamma_3 = 0.$$

となる。この条件と式 (26)

$$z_1\beta_1 + z_2\gamma_2 = 0, \quad z_2\beta_2 + z_3\gamma_3 = 0, \quad z_3\beta_3 + z_1\gamma_1 = 0.$$

を組み合わせると,z_1, z_2, z_3 に対する条件

$$\frac{\partial}{\partial l}z_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial m}z_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}z_3 = 0$$

が得られる。したがって

$$z_1 = \frac{b_m - c_n}{b_m + c_n}, z_2 = \frac{c_n - a_l}{c_n + a_l}, z_3 = \frac{a_l - b_m}{a_l + b_m},$$

と選べば非自励の条件は満たされている。すなわち非自励 BKP 方程式は

$$\begin{aligned}
&(a_l + b_m)(a_l + c_n)(b_m - c_n)\tau(l+1, m, n)\tau(l, m+1, n+1)\\
&+(b_m + c_n)(b_m + a_l)(c_n - a_l)\tau(l, m+1, n)\tau(l+1, m, n+1)\\
&+(c_n + a_l)(c_n + b_m)(a_l - b_m)\tau(l, m, n+1)\tau(l+1, m+1, n)\\
&+(a_l - b_m)(b_m - c_n)(c_n - a_l)\tau(l, m, n)\tau(l+1, m+1, n+1) = 0.
\end{aligned}$$

となる。

非自励 BKP 方程式の 2 ソリトン解は BKP 方程式の 2 ソリトン解

$$\tau_2 = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + b_{12}\exp(\eta_1 + \eta_2),$$
$$\eta_j = C_j[\frac{(1 - p_j a)(1 - q_j a)}{(1 + p_j a)(1 + q_j a)}]^l$$

$$[\frac{(1-p_jb)(1-q_jb)}{(1+p_jb)(1+q_jb)}]^m$$
$$[\frac{(1-p_jc)(1-q_jc)}{(1+p_jc)(1+q_jc)}]^n, \quad j=1,2,$$
$$b_{12}=\frac{(p_1-p_2)(p_1-q_2)(q_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1+p_2)(p_1+q_2)(q_1+p_2)(q_1+q_2)}.$$

の表現で差分的指数関数, たとえば

$$[\frac{(1-p_ja)(1-q_ja)}{(1+p_ja)(1+q_ja)}]^l$$

を

$$\prod_k^{l-1}\frac{(1-p_ja_k)(1-q_ja_k)}{(1+p_ja_k)(1+q_ja_k)}$$

で置き換えたものになっている。ここで積の記号 $\prod_k^{l-1}F(k)$ は [5] の記号で

$$\prod_k^{l-1}F(k)\equiv\begin{cases}\prod_{k=0}^{l-1}F(k), & \text{for } l\geq 1,\\ 1, & \text{for } l=0,\\ \prod_{k=-l}^{-1}1/F(k), & \text{for } l\leq -1\end{cases}$$

と定義されている。

まとめ

主要結果 1 離散 2D 戸田方程式の Bäcklund transformation より Lax-pair を求め**保存量**の行列式表示を得た。

主要結果 2 一般化 KP,BKP 方程式の N ソリトン解は Discret KP,BKP の解から**座標とパラメータの変換**によって構成できることを示した。

主要結果 3 Discrete KP equation の Bäcklund 変換より, 非自励系になるための 条件を求め、新しい形の非自励 KP 方程式を求めた。

主要結果 4 Discrete BKP equation の Bäcklund 変換より, 非自励系になるための 条件を求め、非自励 BKP 方程式を求めた。

参考文献

[1] Ryogo Hirota: "Discrete Analogue of a Generalized Toda Equation", J.Phy.Soc.Jpn. **50**(1981) 3785-3791.

[2] T.Miwa: "On Hirota's difference equations", Proc.Jpn.Acad. **58**,Ser.A (1982) 9-12.

[3] Ryogo Hirota: *The Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge University Press,2004).

[4] 新澤信彦、広田良吾: "一般的双線形方程式の Bäcklund 変換方程式", 「数理解析研講究録」 **1280**(2002)71-75.

[5] R.Willox,T.Tokihiro,and J.Satsuma: "Darboux and binary Darboux transformations for the nonautonomous discrete KP equation",J.Math.Phys.**38(12)**(1997)6455-6469.