数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 154-161

Oscillation problem for half-linear differential equations with periodic damping

島根大学 総合理工学研究科　松村浩平 (Kouhei Matsumura)
島根大学 総合理工学研究科　山岡直人 (Naoto Yamaoka)
島根大学 総合理工学部　杉江実郎 (Jitsuro Sugie)
Department of Mathematics
Shimane University

1 序文

本稿では，半分線形微分方程式

$$(\phi_p(y'))' + a(t)\phi_p(y') + b(t)\phi_p(y) = 0, \qquad ' = \frac{d}{dt} \tag{1.1}$$

を考える。ただし，$p > 1, \phi_p(z) = |z|^{p-2}z$ であり，関数 $a(t), b(t)$ は連続関数である。このとき，方程式 (1.1) の初期値に関する解の一意性とすべての解の時間大域的存在性は，Elbert [3] によって証明されている。そのため，方程式 (1.1) の解が発散する無限個の零点をもつか否かが一つの問題となる。

Definition 1. 方程式 (1.1) の非自明解 $y(t)$ が振動するとは，任意の $t_0 > 0$ に対して，$t_1 > t_0$ が存在して $y(t_1) = 0$ が成り立つことである。逆に，$y(t)$ が振動しないとは，ある $t_2 > 0$ が存在して $t > t_2$ に対して $y(t) \neq 0$ が成り立つことである。

$p = 2$ のとき，方程式 (1.1) は線形微分方程式

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{1.2}$$

になる。線形微分方程式の解が振動するか否かは，係数項 $a(t), b(t)$ によって完全に決定されるため，古くから係数項に関して，より適用範囲の広い振動条件や非振動条件を求めようとする努力が払われてきた。その努力によって係数項が定符号である場合だけでなく，不定符号の場合にも，解の振動や非振動を判定する基準が設けられてきた。例えば，係数項が不定符号の方程式の代表的な例として，Hill 方程式

$$y'' + c(t)y = 0$$

が挙げられる。ただし，

$$c(t) = -\beta + \gamma\cos 2t, \quad \gamma \neq 0$$

である (詳しくは [1, 6] を見よ)。このとき，関数 $c(t)$ は周期 π の周期関数である。また

$$\int_0^{\pi} c(t)dt = 0$$

であるための必要十分条件は $\beta = 0$ である。一般には，このような一周期分の定積分に着目し，次のように定義される。

Definition 2. 周期 T の周期関数 $c(t)$ が

$$\int_0^{T} c(t)dt = 0 \quad \text{and} \quad c(t) \not\equiv 0$$

を満たすとき，周期関数 $c(t)$ は mean value zero をもつという。

最近では，Kwong and Wong [6] が係数項 $a(t)$ と $b(t)$ が mean value zero をもつ周期関数の場合において，線形微分方程式 (1.2) の振動問題を考え，次の振動定理と非振動定理を与えた。

Theorem A. 関数 $B(t)$ は $b(t)$ のある不定積分とし，$b(t)$ は *mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。このとき，

$$(a(t) - B(t))B(t) \geq 0 \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.3}$$

を満たすならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない。

Theorem B. 関数 $B(t)$ は $b(t)$ のある不定積分とし，$a(t)$, $b(t)$, $B(t)$ は *mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。このとき，

$$(a(t) - B(t))B(t) \leq 0 \qquad (0 \leq t \leq T)$$

かつ

$$\text{measure}\{t \in [0, T] : (a(t) - B(t))B(t) < 0\} > 0$$

を満たすならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動する。

彼らはこれらの定理の証明に Riccati technique を用いた。具体的には，Riccati 微分不等式

$$r' \geq r^2 - a(t)r + b(t)$$

を満たす関数 $r(t)$ が十分大きな t において定義されるならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない事実を利用した。この関係は，方程式 (1.1) とそれに付随する Riccati 不等式

$$r' \geq (p-1)|r|^{p^*} - a(t)r + b(t)$$

でも同様に成り立つ ([2, 4, 5, 10] を参照)。

本研究では，方程式 (1.1) に対応するこの Riccati 不等式を利用することにより，方程式 (1.1) のすべての解が振動しないための十分条件を与える。

Theorem 1. 関数 $B(t)$ は $b(t)$ のある不定積分とし，$b(t)$ は *mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。このとき，

$$\{a(t)-(p-1)\phi_{p^*}(B(t))\}B(t)\geq 0 \qquad (0\leq t\leq T) \tag{1.4}$$

を満たすならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない。ただし，p^* は

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$$

を満たす値である。

Remark 1. $p=2$ のとき，条件 (1.4) は条件 (1.3) になる。故に，Theorem 1 は Theorem A を完全に含んでいる。

2 主定理の証明

主定理の証明をするために，方程式 (1.1) とそれに対応する Riccati 不等式

$$r'\geq (p-1)|r|^{p^*}-a(t)r+b(t) \tag{2.1}$$

の関係を述べる。

Lemma 1. 方程式 (1.1) が振動しないための必要十分条件は，ある正の t_0 が存在し，任意の $t\geq t_0$ に対して，不等式 (2.1) を満たす C^1 級の関数 $r(t)$ が存在することである。

Remark 2. Lemma 1 は不等式 (2.1) の係数項 $a(t), b(t)$ が周期関数でなくても成立する。

Proof of Lemma 1. まず，十分性を示す。方程式 (1.1) が振動しない解 $y(t)$ をもつと仮定する。このとき，ある $t_0>0$ が存在し，任意の $t\geq t_0$ に対して，$y(t)>0$ としても一般性は失わない。ここで，任意の $t\geq t_0$ に対して

$$r(t)=-\frac{\phi_p(y'(t))}{\phi_p(y(t))} \tag{2.2}$$

とおく。このとき，

$$\begin{aligned}
r'(t)&=-\frac{(\phi_p(y'(t)))'\phi_p(y(t))-\phi_p(y'(t))(\phi_p(y))'}{\phi_p(y(t))^2}\\
&=-\frac{(\phi_p(y'(t)))'}{\phi_p(y(t))}+\frac{\phi_p(y'(t))(\phi_p(y))'}{\phi_p(y(t))^2}\\
&=-a(t)r(t)+b(t)+(p-1)\frac{\phi_p(y'(t))}{\phi_p(y(t))}\frac{y'(t)}{y(t)}\\
&=-a(t)r(t)+b(t)+(p-1)(-r(t))(-\phi_{p^*}(r(t)))\\
&=(p-1)|r(t)|^{p^*}-a(t)r(t)+b(t)
\end{aligned}$$

なので，$r(t)$ は Riccati 不等式 (2.1) を満たす。

次に，必要性を示す。任意の $t \geq t_0$ に対して，関数 $\xi(t)$ を

$$\xi(t) = u(t)r(t)$$

とおく。ただし，

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

である。このとき，

$$r'(t) = \frac{\xi'(t)}{u(t)} - \frac{a(t)\xi(t)}{u(t)}$$

なので，不等式 (2.1) より，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$\frac{\xi'(t)}{u(t)} - \frac{a(t)\xi(t)}{u(t)} \geq (p-1)\left|\frac{\xi(t)}{u(t)}\right|^{p^*} - \frac{a(t)\xi(t)}{u(t)} + b(t)$$

となる。ゆえに，

$$\xi'(t) - (p-1)u(t)\left|\frac{\xi(t)}{u(t)}\right|^{p^*} \geq b(t)u(t) \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここで，

$$C(t) \equiv \xi'(t) - (p-1)u(t)\left|\frac{\xi(t)}{u(t)}\right|^{p^*} \tag{2.4}$$

とおくと，方程式

$$(u(t)\phi_p(y'))' + C(t)\phi_p(y) = 0$$

は振動しない解

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \phi_{p^*}\left(\frac{\xi(s)}{u(s)}\right) ds\right)$$

をもつ。関係式 (2.3) と (2.4) から，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$C(t) \geq b(t)u(t)$$

となるので，半分線形微分方程式における Sturm の比較定理を用いると，方程式

$$(u(t)\phi_p(y'))' + b(t)u(t)\phi_p(y) = 0$$

のすべての非自明解は振動しないことがわかる ([3, 7, 9] を参照)。この方程式は方程式 (1.1) に同値変換できるので，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない。 □

この Lemma 1 を使って Theorem 1 の証明をする。

Proof of Theorem 1. 関数 $b(t)$ は mean value zero をもつ周期 T の関数だから, $B(t)$ も周期 T の関数となる。なぜならば,

$$\begin{aligned} B(t+T)-B(t) &= \int_t^{t+T} b(s)ds = \int_0^{t+T} b(s)ds - \int_0^t b(s)ds \\ &= \int_0^T b(s)ds + \int_T^{t+T} b(s)ds - \int_0^t b(s)ds \\ &= \int_0^t b(u+T)du - \int_0^t b(s+T)ds = 0 \end{aligned}$$

となるからである。条件 (1.4) と関数 $a(t), b(t), B(t)$ が周期 T の関数であることから，任意の $t \geq 0$ に対して

$$0 \geq (p-1)|B(t)|^{p^*} - a(t)B(t)$$

となる。$B'(t) = b(t)$ なので，任意の $t \geq 0$ に対して，$B(t)$ は不等式 (2.1) を満たす。したがって，Lemma 1 より方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない。 □

3 例題と予想

この節では，Theorem 1 が適用できる例題をいくつか挙げ，Theorem B から推測される予想を紹介する。

Example 1. 方程式 (1.1) において

$$a(t) = \alpha \sin t, \quad b(t) = \frac{\cos t}{(p-1)^{p-2}} |\sin t|^{p-2}, \quad T = 2\pi$$

とした半分線形微分方程式

$$(\phi_p(y'))' + (\alpha \sin t)\phi_p(y') + \frac{\cos t}{(p-1)^{p-2}} |\sin t|^{p-2} \phi_p(y) = 0 \tag{3.1}$$

を考える。ただし，$\alpha > 1$, $p > 2$ とする。このとき,

$$\int_0^{2\pi} b(t)dt = \left[\frac{1}{(p-1)^{p-1}} |\sin t|^{p-1} \right]_0^{2\pi} = 0$$

となるので，$b(t)$ は mean value zero をもつ周期関数である。また

$$B(t) = \frac{1}{(p-1)^{p-1}} |\sin t|^{p-1}$$

とおくと，関数 $B(t)$ は $b(t)$ の不定積分であり，$0 \leq t \leq 2\pi$ に対して

$$\left\{ a(t) - (p-1)\phi_{p^*}(B(t)) \right\} B(t) = \frac{\alpha - 1}{(p-1)^{p-1}} |\sin t|^p$$

となる。したがって，Theorem 1 により方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない。

Remark 3. 方程式 (3.1) については，$1 < p < 2$ のとき，関数 $b(t)$ は $t = k\pi$ (k : 整数) で連続ではない。

次の例では，$a(t)$ も $b(t)$ も任意の t で連続である。

Example 2. 方程式 (1.1) において

$$a(t) = \phi_{p^*}(\sin t), \quad b(t) = \frac{1}{(p-1)^{p-1}}(\cos t), \quad T = 2\pi$$

とした半分線形微分方程式

$$(\phi_p(y'))' + \phi_{p^*}(\sin t)\phi_p(y') + \frac{1}{(p-1)^{p-1}}(\cos t)\phi_p(y) = 0 \tag{3.2}$$

を考える。このとき，$b(t)$ は周期 2π の mean value zero をもつ周期関数である。ここで

$$B(t) = \frac{1}{(p-1)^{p-1}} \sin t$$

とおけば，$0 \leq t \leq 2\pi$ に対して

$$\left\{a(t) - (p-1)\phi_{p^*}(B(t))\right\}B(t) = 0$$

となるので，Theorem 1.1 の条件を満たす。したがって，方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない。

最後に，方程式 (3.1) のパラメータ α と p を具体的に選び，その方程式の解の挙動を考察する。それによって，方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動するための十分条件を予想する。

まず，半分線形微分方程式

$$((y')^3)' + (\sin t)(y')^3 + \left(\frac{1}{9}\cos t \sin^2 t\right) y^3 = 0 \tag{3.3}$$

を考える。この方程式は，方程式 (3.1) の $\alpha = 1, p = 4$ としたものである。方程式 (3.3) の解軌道を描くと下図のようになる。図 1 で示した解軌道の初期時刻は $t = 0$ で, 初期値は $y(0) = 0, y'(0) = 0$ である。

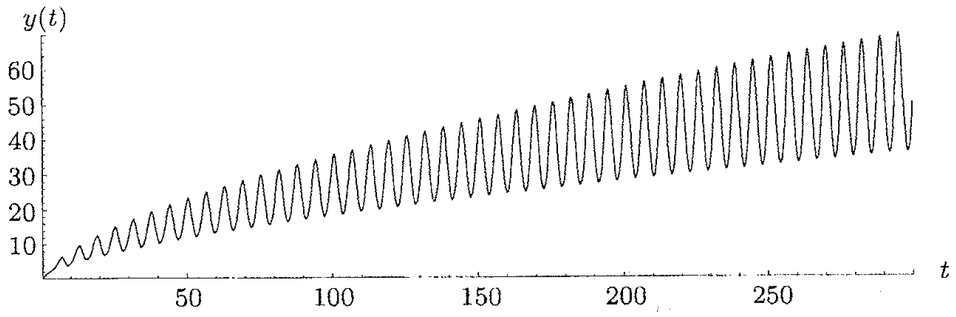

図 1

図 1 からも振動している様子がわかる。

次に，α の値だけを少し小さくして，$\alpha = 0.99$ とした方程式

$$((y')^3)' + (0.99\sin t)(y')^3 + \left(\frac{1}{9}\cos t \sin^2 t\right) y^3 = 0 \tag{3.4}$$

を考える。このとき，$0 \le t \le 2\pi$ に対して

$$\left\{a(t) - (p-1)\phi_{p^*}(B(t))\right\}B(t) = \frac{-0.01}{27}\sin^4 t \le 0$$

となり，条件 (1.4) を満たさない。したがって，方程式 (3.4) のすべての非自明解は振動しないとは言えない。実際，初期時刻 $t = 0$, 初期値 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ とした方程式 (3.4) の解軌道は図 2 のようになり，振動することがわかる。

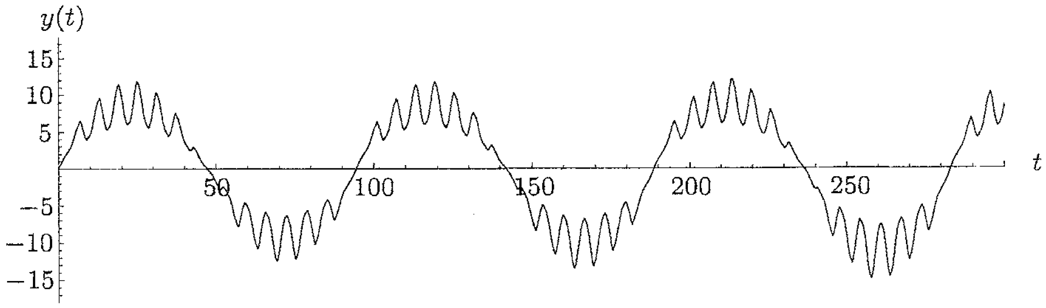

図 2

この考察から，条件 (1.4) 成り立たないならば，すべての解は振動することも起こり得ることがわかる。この事実と Theorem B を合せて考えると，次のことが成り立つと予想できる。

Conjecture. 関数 $B(t)$ は $b(t)$ のある不定積分とし，$a(t)$, $b(t)$, $B(t)$ は *mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。このとき，

$$\left\{a(t) - (p-1)\phi_{p^*}(B(t))\right\}B(t) \le 0 \qquad (0 \le t \le T)$$

かつ

$$\text{measure}\{t \in [0,T] : \left\{a(t) - (p-1)\phi_{p^*}(B(t))\right\}B(t) < 0\} > 0$$

を満たすならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動する。

参考文献

[1] G.J. Butler, Oscillation theorem for a nonlinear analogue of Hill's equation, Quart. J. Math. Oxford 27 (1976), 159-171.

[2] O. Došlý, Oscillation criteria for half-linear second order diffirential equations, Hiroshima Math. J. 28 (1998), 507-527.

[3] Á. Elbert, A half-linear second order differential equation, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 30 (1979), 153-180.

[4] Á. Elbert and A. Schneider, Perturbations of the half-linear Euler differential equation, Results Math. 37 (2000), 56-83.

[5] T. Kusano and Y. Naito, Oscillation and nonoscillation criteria for second order quasilinear differential equations, Acta Math. Hungar. 76 (1997), 81-99.

[6] M.K. Kwong and J.S.W. Wong, Oscillation and nonoscillation of Hill's equation with periodic damping, J. Math. Anal. Appl. 288 (2003), 15-19.

[7] H.-J. Li, C.-C. Yeh, Sturmian comparison theorem for half-linear second-order differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 125 (1995), 1193-1204.

[8] W. Magnus and S. Winkler, Hill's Equation, Wiley, New York, 1966.

[9] J.D. Mirzov, On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems, J. Math. Anal. Appl. 53 (1976), 418-425.

[10] J. Sugie and N. Yamaoka, Growth conditions for oscillation of nonlinear differential equations with p-Laplacian, J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), 18-34.