数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 60-66

ある関数とクオーク分解に関して

東京大学・数理科学研究科　澤野嘉宏（Yoshihiro Sawano）
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo
大阪教育大学・教育学部　米田剛（Tsuyoshi Yoneda）
Department of Mathematics,
Osaka Kyoiku University

1　関数微分方程式 $f'(x) = f(x-1)$.

今回の研究の目的はこの微分方程式を解くことにある．関数微分方程式 $f'(x) = f(x-1)$ は物理学，生物学において重要な役割を果たす方程式である．

次の事実は比較的容易に示すことが出来る．

定理 1. $g(x)$ を $[0,1]$ 上で定義された関数とする．このとき，$f'(x) = f(x-1), x \geq 1$ の解は一意的に決まる．

帰納的に，解作用素

$$\begin{aligned} T_n : f|_{[n-1,n]} \to f(x) &:= f(n) + \int_n^x f'(t)\,dt \\ &= f(n) + \int_n^x f(t-1)\,dt, x \in [n, n+1] \end{aligned}$$

で解を定めればよいからである．

初めに簡単な例を見てみることにする．

$$g(x) = x^2 + 2 \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad & f(1) &&= 3 \\ \longrightarrow \quad & f_{[1,2)} &&= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{2}{3} \\ \longrightarrow \quad & f(2) &&= \frac{16}{3} \\ \longrightarrow \quad & f|_{[2,3)} &&= \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{11}{3}x + \frac{32}{3} \\ \longrightarrow \quad & \cdots \end{aligned}$$

2　特殊微分方程式 $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$

講演者は次の結果を得ることが出来た.

定理 2. $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ かつ $f(0) = 1$ とする．f が微分可能で

$$f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$$

を満たしているとき，f は次の性質を有する．

1. $f \in C^\infty(\mathbf{R})$
2. $\mathrm{supp}\,(f) = [-1, 1]$
3. $\displaystyle\int f(x)\,dx = 1$
4. $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x-j) \equiv 1$

以後，この f をY-関数と呼ぶことにする．米田はさらに一般の方程式を

$$f^{(n)}(x) = \lambda^{n+1} \sum_{j=1}^{\infty} c_j {\beta_j}^n \sum_{l=0}^{n} {}_nC_l f\left(\lambda x - \frac{l - n/2 + nk_j}{\beta_j}\right)$$

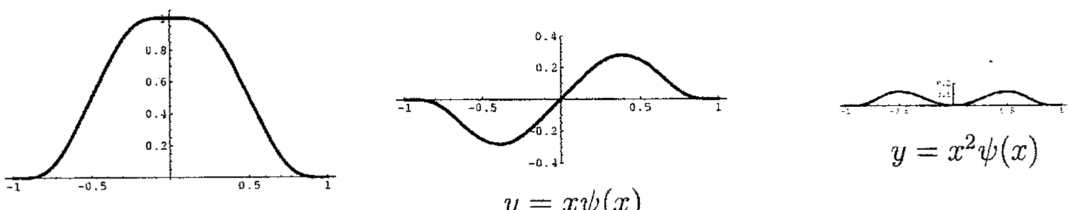
考えた．ここで，$\lambda > 1$．詳しい計算は [Yoneda1]–[Yoneda4] でされているので一般的な理論はそちらを参照されたい．これらの根幹を成している研究としてさらに一般の関数方程式 $f'(x) = f(g(x))$ が [Kato] や [Kato-McLeod] などであげられる．

Y-関数特有な性質を見るうえで，役に立つ等式をあげておく．

$$\lim_{m\to\infty} v_1 * v_2 * \ldots * v_m(x) = u(x),\ in\, L^1(\mathbf{R}), uniformly$$

ここで，$v := \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ としてdilationを $v_j(x) := 2^j v(2^j x)$，$j \in \mathbf{N}$ とおいた．

Y-関数の利点は一般の方程式 $f'(x) = f(g(x))$ とは違いグラフを簡単に描画できることである．



$y = \psi(x)$　　$y = x\psi(x)$　　$y = x^2\psi(x)$

図 1:

3 クオーク分解

3.1 記号

Triebel の記号にしたがって関数空間を定義する．この分野の重要な教科書として [Triebel-β]–[Triebel-ϵ] をあげておく．

1. $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots, \}$

2. $\psi^\beta(x) = x^\beta \psi(x)$　ここで，$\beta \in \mathbf{N}_0$

3. $(\beta qu)_{\nu,m}(x) = 2^{-\nu(s-n/p)}\psi(2^\nu x - m)$ ここで，$\nu \in \mathbf{N}_0$ かつ $s \in \mathbf{R}$, $0 < p \le \infty$

4. $0 < p \le \infty$ のとき，$\chi^{(p)}_{\nu,m}(x) := 2^{\frac{\nu}{p}}\chi_{[m-2^{-\nu}, m+2^\nu]}$

5. $0 < p, q \le \infty$ のとき，$\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}_0}$ に対して，

$$\|f_\nu \,:\, L^p(l^q)\| := \left(\int \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} |f_\nu(x)|^q\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

6. $0 < p, q \le \infty$ のとき，$\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}_0}$ に対して，

$$\|f_\nu \,:\, l^q(L^p)\| := \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \left(\int |f_\nu(x)|^p\, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

7. $0 < p, q \le \infty$ のとき，$\lambda := \{\lambda_{\nu,m}\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$ に対して，

$$\|\lambda \,:\, f_{pq}\| := \left\|\sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu,m}\chi^{(p)}_{\nu,m} \,:\, L^p(l^q)\right\|$$

8. $0 < p, q \le \infty$ のとき，$\lambda := \{\lambda_{\nu,m}\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$ に対して，

$$\|\lambda \,:\, f_{pq}\| := \left\|\sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu,m}\chi^{(p)}_{\nu,m} \,:\, l^q(L^p)\right\|$$

9. $0 < p, q \le \infty, \rho > 0$ のとき，$\lambda := \{\lambda^\beta\}_{\beta \in \mathbf{N}_0} := \{\lambda^\beta_{\nu,m}\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}, \beta \in \mathbf{N}_0}$ に対して，

$$\begin{aligned}\|\lambda \,:\, f_{pq}\|_\rho &:= \sup_{\beta \in \mathbf{N}_0} 2^{\rho\beta}\|\lambda^\beta \,:\, f_{pq}\|\\ \|\lambda \,:\, b_{pq}\|_\rho &:= \sup_{\beta \in \mathbf{N}_0} 2^{\rho\beta}\|\lambda^\beta \,:\, b_{pq}\|\end{aligned}$$

3.2 関数空間の定義

先ほどの記号のもと

1. $0 < p, q \leq \infty, s > (1/\min(1,p) - 1)$ とする．このとき，$B^s_{pq}(\mathbf{R})$ を $f \in \mathbf{S}'(\mathbf{R})$ で

$$f = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda^{\beta}_{\nu,m} (\beta q u)_{\nu,m}(x)$$

と分解されるものとする．ノルムは

$$\|f \,:\, B^s_{pq}(\mathbf{R})\| := \inf \|\lambda \,:\, b_{pq}(\mathbf{R})\|_{\rho}$$

で与えられるものとする．ここで，inf は先ほどの表現の

$$\lambda := \{\lambda^{\beta}_{\nu,m}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

で等式を実現させるものの全体からとっているとする．

2. $0 < p, q \leq \infty, s > (1/\min(1,p,q) - 1)$ とする．このとき，$F^s_{pq}(\mathbf{R})$ を $f \in \mathbf{S}'(\mathbf{R})$ で

$$f = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda^{\beta}_{\nu,m} (\beta q u)_{\nu,m}(x)$$

と分解されるものとする．ノルムは

$$\|f \,:\, F^s_{pq}(\mathbf{R})\| := \inf \|\lambda \,:\, f_{pq}(\mathbf{R})\|_{\rho}$$

で与えられるものとする．ここで，inf は先ほどの表現の

$$\lambda := \{\lambda^{\beta}_{\nu,m}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

で等式を実現させるものの全体からとっているとする．

4 応用

われわれは次の問題をクオークの言葉で表現した．

Problem 3. $f'(x) = f(x-1), x \geq 1$ を初期条件 $f(x) = g(x), x \in [0,1]$ のもと解け．ここで，

$$g(x) := \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda^{\beta}_{\nu,m} (\beta q u)_{\nu,m}(x) \in F^s_{pq}(\mathbf{R}) \cup B^s_{pq}(\mathbf{R})$$

$s > 0, p, q > 1$ となっているとする．

われわれは元の特殊関数方程式

$$f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$$

から，先ほどの問題を解作用素を用いて

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \mu^{\beta}_{\nu,m} (\beta q u)_{\nu,m}(x) \in F^s_{pq}(\mathbf{R}) \cup B^s_{pq}(\mathbf{R})$$

と $x \in [1,2]$ で表現することが出来た．ここで，

$$\lambda := \{\lambda^{\beta}_{\nu,m}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}} \mapsto \mu := \{\mu^{\beta}_{\nu,m}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

は線形である．

5　積分作用素

5.1　モーメント計算

補題 4. $\beta \in \mathrm{N}_0$ とする．β-次モーメントを $c_\beta := \int_{\mathbf{R}} x^\beta \phi(x)\, dx$ で定義する．

(1) $|c_\beta| \leq \dfrac{2}{\beta+1}\, c_0 = 1$ である．β が奇数のときは $c_\beta = 0$ となる．

(2) 偶数次モーメント $c_{2\beta}$ は次の式を満たす．

$$c_{2\beta} = \frac{1}{(2\beta+1)(4^\beta - 1)} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} {}_{2\beta+1}C_{2\gamma} \cdot c_{2\gamma} \text{ 特に } c_2 = \frac{1}{9}.$$

5.2　繰り返し積分

Y-関数は次の繰り返し積分の公式を持つ．

補題 5. $I_\beta(\phi)$ を帰納的に定義していく．：

$$I_0(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du,\ I_\beta(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} I_{\beta-1}(\phi)(u)\, du. \ (\beta = 1, 2, \ldots)$$

すると具体的に $I_\beta(\phi)(x) = \displaystyle\sum_{j_{\beta+1}=0}^{\infty} \sum_{j_\beta=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{\frac{\beta(\beta+1)}{2}} \phi\left(\frac{x - 2^{\beta+1} + 1}{2^{\beta+1}} - \sum_{\gamma=1}^{\beta+1} \frac{j_\gamma}{2^{\gamma-1}} \right)$ とかける．特に $I_0(\phi)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du = \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x-1-2j}{2} \right)$.

5.3 モーメント関数の不定積分

定義 6. Let $\beta \in \mathbf{N}_0$.

1. 補助的なクオークの元となる関数を
$$\Psi^\beta(x) := \int_{-\infty}^{x} u^\beta \phi(u)\,du - c_\beta \sum_{l=2}^{\infty} (0qu)_{\nu,l}(x)$$
で定義する．定義よりコンパクト台を持つとわかる．

2. 積分作用素に対応するクオークを次のように定義する．
$$(\beta qu)^*_{\nu,m} := 2^{-\nu\left(s-\frac{1}{p}\right)} \Psi^\beta(2^\nu x - m).$$

部分積分の多用で次の公式がわかる．

補題 7. $\Psi^\beta(x) = \left(\sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma {}_\beta P_\gamma x^{\beta-\gamma} I_\gamma(\phi(x))\right) - c_\beta \sum_{l=2}^{\infty} (0qu)_{\nu,l}(x)$

5.4 方程式へのアプローチ

以上の準備の下次の公式を得ることが出来た．
始めに $h \in A^s_{pq}(\mathbf{R})$ は $s > 0, p, q > 1$ の条件のもと

$$h = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} < h, \Phi^\beta_{\nu,m} > (\beta qu)_{\nu,m}(x)$$

と表せることに注意しておく．この関数 $\Phi^\beta_{\nu,m} \in \mathbf{S}$ を用いて具体的に解を構成する．
初期条件となる関数を

$$g(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda^\beta_{\nu,m} (\beta qu)_{\nu,m}$$

とクオーク分解する．
補助的クオークを $\theta^\beta_{\nu,m} = c_\beta \left\langle \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m=0}^{2^\nu} 2^{-\nu} \lambda^\beta_{\nu,m} (\beta qu)^*_{\nu,m}(\cdot - 1), \Psi^\beta_{\nu,m} \right\rangle$ にしたがって表せば，解作用素は以下のように表せる．

$$\sum_{\beta,\nu,m} \lambda^\beta_{\nu,m} (\beta qu)_{\nu,m}$$
$$\mapsto \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0{}^n} \left(c_\beta \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m=2}^{2^\nu} \sum_{l=0}^{m-2} \lambda^\beta_{\nu,l} 2^{-\nu} (0qu)_{\nu,m+2^\nu}(x) + \sum_{m \in \mathbf{Z}} \theta^\beta_{\nu,m+2^\nu} (\beta qu)_{\nu,m}(x) \right)$$

参考文献

[Fredrickson1] P. O. Frederickson, *Global solutions to certain nonlinear functional differential equations.* J. Math. Anal. Appl. 33 (1971), 355–358.

[Frederickson2] P. O. Frederickson, *Dirichlet series solutions for certain functional differential equations.* Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations (Kyoto, 1971), 249–254. Lecture Notes in Math., Vol. 243, Springer, Berlin, 1971.

[Kato] T. Kato, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), Academic Press, New York, 1972, 197–217.

[Kato-McLeod] T. Kato and J. B. McLeod, *The functional-differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 891–937.

[Frazier-Jawerth] F. Michael and J. Björn, A discrete transform and decompositions of distribution spaces. J. Funct. Anal. 93 (1990), no. 1, 34–170.

[Triebel-β] H. Triebel, Theory of function spaces I, Birkhäuser, 1983.

[Triebel-δ] H. Triebel, Fractal and Spectra, Birkhäuser, 1997.

[Triebel-ϵ] H. Triebel, The structure of functions, Birkhäuser,2001.

[Yoneda1] T. Yoneda, *Spline functions and n-periodic points*, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, 15 (2005), 245–252.

[Yoneda2] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(2x)$ *with* $f(0) = 0$, to appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[Yoneda3] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(\lambda x)$, $\lambda > 1$ *with* $f(0) = 0$, preprint.

[Yoneda4] T. Yoneda, *On Functional differential equations with infinite series*, preprint.