数理解析研究所講究録 1475 巻 2006 年 149-154

On a shadow system to the Gierer-Meinhart System with a non-local term

龍谷大学　理工学部　　四ツ谷 晶二
Ryukoku University　Shoji Yotsutani

この研究は，高市 英明 氏（兵庫大学)，および，高木 泉 氏（東北大学）との共同研究である． Gierer-Meinhart system ([1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t}=\varepsilon^2\Delta A-A+\dfrac{A^p}{H^q}+\sigma & x\in\Omega,\quad t>0,\\ \tau\dfrac{\partial H}{\partial t}=D\Delta H-H+\dfrac{A^r}{H^s} & x\in\Omega,\quad t>0,\\ \dfrac{\partial A}{\partial \nu}=\dfrac{\partial H}{\partial \nu}=0 \quad on\ \partial\Omega, & t>0. \end{cases}$$

の Shadow System の典型例としてあらわれる，非局所非線形境界値問題

$$\begin{cases} du''-u+u^2+\sigma\int_0^1 u^2dx=0 \quad x\in(0,1),\\ u'(0)=0,\quad u'(1)=0,\\ u'(x)>0 \quad x\in(0,1). \end{cases} \qquad (S)$$

を考える．ただし，$u(x)$は未知関数，d,σは正値パラメータである．

この境界値問題の解の大域的構造は，$\sigma=0$の場合はよく知られているが，$\sigma>0$の場合は高木[3]の中に予想は与えられていたが，事実は未確認であった．

本講演では，Lou-Ni-Yotsutani[2]のアイデアを応用し，方程式(S)のすべての解を楕円関数を用いてあらわし，それに基づき解の大域的構造を報告する．

【定理 1】方程式(S)のすべての解は，

$$\left\{(u(x;d,k),\sigma(d,k));\quad 0<d<\frac{1}{4K(k)^2\sqrt{k^4-k^2+1}},\quad 0<k<1\right\}$$

であらわされる．ただし，

$$u(x;d,k):=\frac{\{1-4dK(k)^2(2k^2-1)\}-\{1+4dK(k)^2(k^2-2)\}k^2sn^2(K(k)x,k)}{2(1-k^2sn^2(K(k)x,k))},$$

$$\sigma(d,k):=\frac{1-16d^2K(k)^4(k^4-k^2+1)}{1+16d^2K(k)^4(k^4-k^2+1)+8dK(k)^2(k^2-2)+24dK(k)E(k)}.$$

なお，$K(k)$は第 1 種完全楕円積分，$E(k)$は第 2 種完全楕円積分，$sn(\cdot;k)$は母数kのヤコビの楕円関数である．すなわち，

$$K(k):=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}},\quad E(k):=\int_0^1\sqrt{\frac{1-kt^2}{1-t^2}}dt,\quad sn^{-1}(w,k):=\int_0^w\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}}.$$

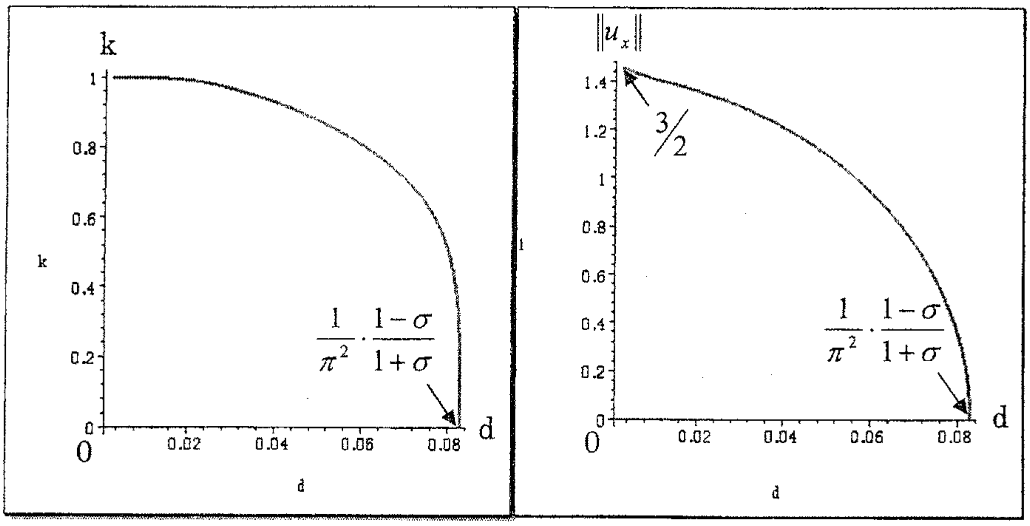
前定理より，σを固定したときの方程式(S)の解の大域的分岐構造は，$\sigma(d,k)=\sigma$となる等高線よりわかる．なお，解の分岐の様子を見るため，大域的分岐図を$d-\|u_x\|$平面に描いたものも並べて示す．ただし，$\|u_x\|:=u(1)-u(0)$である．

【定理 2】 $\sigma(d,k)=\sigma$とする．

(1) $0<\sigma<5/6$の場合：

$d=d_+(k;\sigma)$ for $k\in(0,1)$．$d_+(0;\sigma)=\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}$,

$d_+(k;\sigma)$は単調減少，$d_+(k;\sigma)\to 0$ as $k\uparrow 1$．



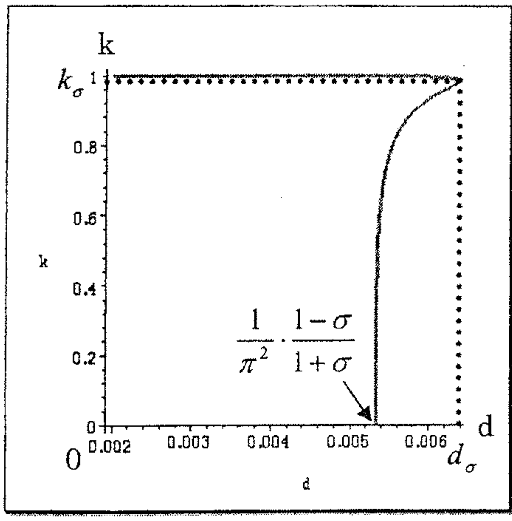
$d-k$平面　　　　$d-\|u_x\|$平面

(2) $5/6<\sigma<1$の場合：

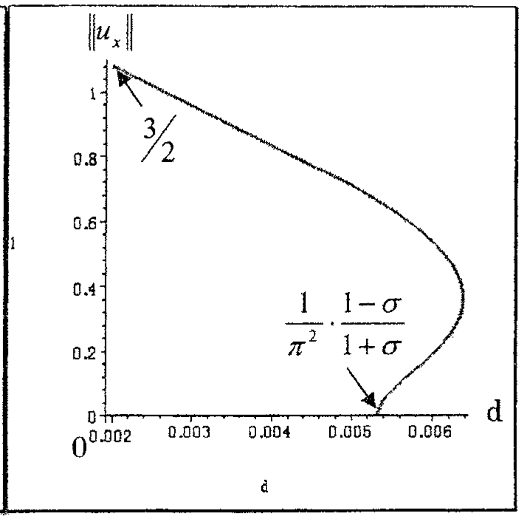
$d=d_+(k;\sigma)$ for $k\in(0,1)$．$d_+(0;\sigma)=\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}$,

$d_+(k;\sigma)$は，$0<k<k_\sigma$のとき単調増加，$k=k_\sigma$のとき最大値d_σ,

$k_\sigma < k < 1$のとき単調減少，$d_+(k;\sigma) \to 0$ *as* $k \uparrow 1$.



$d-k$平面



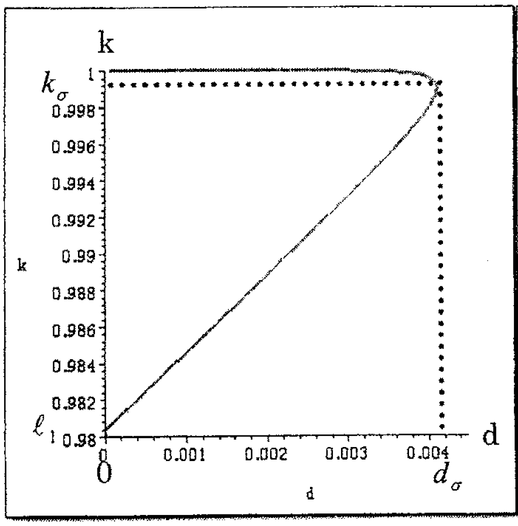
$d-\|u_x\|$平面

(3) $\sigma = 1$の場合：

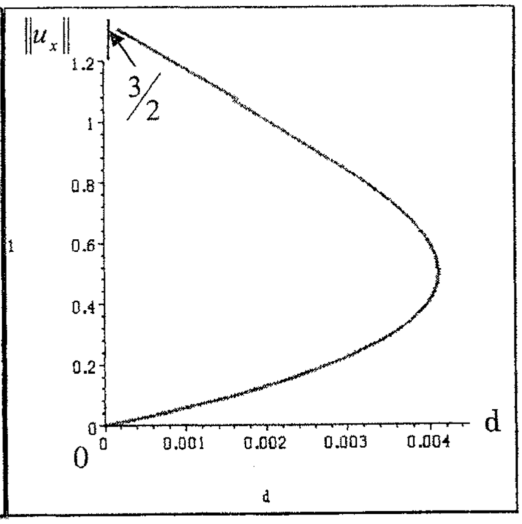
$d = d_+(k;\sigma)$ *for* $k \in (\ell_1, 1)$. $d_+(\ell_1;\sigma) = 0$,

$d_+(k;\sigma)$は，$\ell_1 < k < k_\sigma$のとき単調増加，$k = k_\sigma$のとき最大値d_σ,

$k_\sigma < k < 1$のとき単調減少，$d_+(k;\sigma) \to 0$ *as* $k \uparrow 1$.



$d-k$平面



$d-\|u_x\|$平面

(4) $\sigma > 1$の場合：次の 2 つの曲線の和集合である．

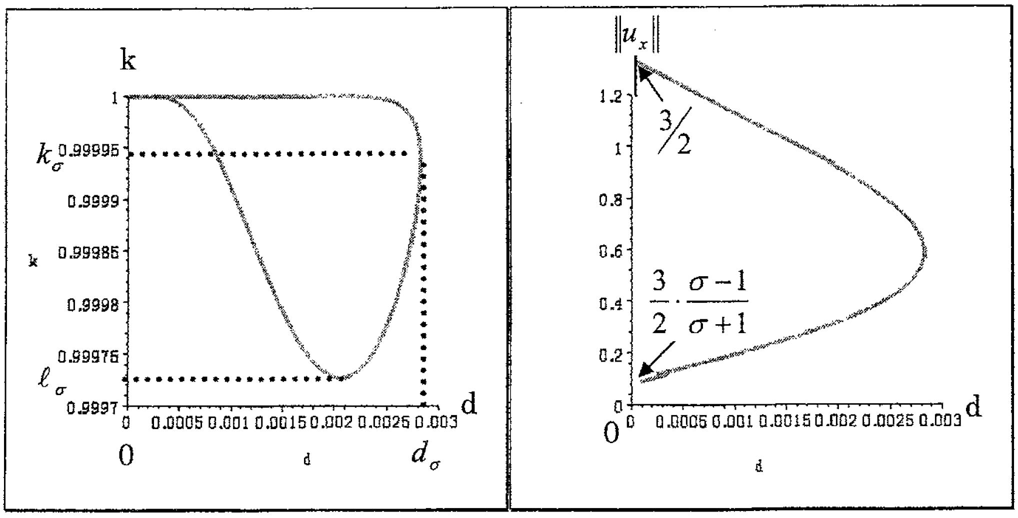
- $d = d_+(k;\sigma)$ *for* $k \in (\ell_\sigma, 1)$． $d_+(\ell_\sigma;\sigma) = d_-(\ell_\sigma;\sigma) > 0$，

  $d_+(k;\sigma)$は，$\ell_\sigma < k < k_\sigma$のとき単調増加，$k = k_\sigma$のとき最大値$d_\sigma$，

  $k_\sigma < k < 1$のとき単調減少，$d_+(k;\sigma) \to 0$ *as* $k \uparrow 1$．

- $d = d_-(k;\sigma)$ *for* $k \in (\ell_\sigma, 1)$． $d_-(\ell_\sigma;\sigma) = d_+(\ell_\sigma;\sigma) > 0$，

  $d_-(k;\sigma)$は単調減少，$d_-(k;\sigma) \to 0$ *as* $k \uparrow 1$．



$d-k$平面　　　　$d-\|u_x\|$平面

ただし，

$$
\begin{aligned}
d_\pm &= \frac{\sigma\{K(k)(2-k^2) - 3E(k)\} \pm \sqrt{D_\sigma}}{4K(k)^3(1-k^2+k^4)(1+\sigma)}, \\
D_\sigma &= \left((3-3k^2)K(k)^2 + (6k^2-12)E(k)K(k) + 9E(k)^2\right)\sigma^2 + (1-k^2+k^4)K(k)^2, \\
\ell_\sigma &:= \textit{the unique solution of } D_\sigma = 0 \textit{ in } k \in (0,1), \\
k_\sigma &:= \textit{the unique solution of} \\
&\quad \left((-3k^6+9k^4-9k^2+3)\sigma^2 + k^8 - 6k^6 + 13k^4 - 12k^2 + 4\right)K(k)^4 \\
&\quad + \left((18k^6-72k^4+90k^2-36)\sigma^2 - 4k^8 + 16k^6 - 24k^4 + 20k^2 - 8\right)E(k)K(k)^3 \\
&\quad + \left((-36k^6+126k^4-180k^2+90)\sigma^2 + 4k^8 - 8k^6 + 12k^4 - 8k^2 + 4\right)E(k)^2K(k)^2 \\
&\quad + \left((24k^6-90k^4+126k^2-84)\sigma^2\right)E(k)^3K(k) \\
&\quad + \left((27k^4-27k^2+27)\sigma^2\right)E(k)^4 = 0 \textit{ in } k \in (0,1), \\
d_\sigma &:= d_+(k_\sigma;\sigma).
\end{aligned}
$$

高木[3]は，2 次分岐が起こらないとするならば，上図の $d-\|u_x\|$ 平面における分岐図のような状況であろうと予想していた. 定理２より２次分岐は起こらず，予想通りであったということを示すことができる. 正確に述べると，解の個数に関する次の結果をを得る.

【定理 3】方程式(S)の解の個数は次の通りである.

(1) $0<\sigma<5/6$ の場合：

- $d>\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}$ のとき，解は存在しない.
- $0<d\le\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}$ のとき，解はただ１つ存在する.

(2) $5/6<\sigma<1$ の場合：

- $\mathrm{d}>\mathrm{d}_\sigma$ のとき，解は存在しない.
- $d=d_\sigma$ のとき，解はただ１つ存在する.
- $\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\le d<d_\sigma$ のとき，解はちょうど 2 個存在する.
- $0<d<\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}$ のとき，解はただ１つ存在する.

(3) $\sigma=1$ の場合：

- $d>d_\sigma$ のとき，解は存在しない.
- $d=d_\sigma$ のとき，解はただ１つ存在する.
- $0<d<d_\sigma$ のとき，解はちょうど 2 個存在する.

(4) $\sigma>1$ の場合：

- $d>d_\sigma$ のとき，解は存在しない.
- $d=d_\sigma$ のとき，解はただ１つ存在する.
- $0<d<d_\sigma$ のとき，解はちょうど 2 個存在する.

ただし，d_σ は定理２の中で定義されたものである.

参考文献

[1] A.Gierer and H.Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik (Berlin), 12 (1972), 30-39.

[2] Y.Lou, W.-M.Ni and S.Yotsutani, On a limiting system in the Lotka-Voltera competition with cross diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.

[3] I.Takagi, Point-condensation for a reaction-diffusion system, J. Differential Equations 61 (1986), 208-249.