数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 65-69

The Witt system W_{10} and a reconstruction of the Hall-Janko graph

中空　大幸 (Hiroyuki Nakasora)

岡山大学, 千葉大学
(Okayama University, Chiba University)

1 Introduction

この研究は千葉大学の堀口直之氏と北詰正顕教授との共同研究で論文は現在準備中である。今回の報告の主な結果はタイトルにあるように Hall-Janko グラフの再構成である。このグラフは M. Hall によって、散在型単純群 J_2 の存在証明に使われてそのグラフの構成には文献「群とデザイン」[4] によるとコンピュータが用いられたようである。広く知られている理論的な構成法は M. Suzuki [7] によって鈴木系列の 1 部として与えられている。

この Hall-Janko グラフを考えるようになったいきさつとして新しいコードとデザインの構成 (Chigira, Harada and Kitazume [2]) および直交ラテン方陣の存在問題に関する話 [5], [6] を挙げる。[5] の中で次のような Witt system W_{10} と Hall-Janko グラフの関係を与えた。

$\Gamma=(V,E)$ を Hall-Janko グラフとして、C を Γ のサイズ 10 の coclique とする。そして、結合構造 $D=(C,V\setminus C)$ を次のように定義する。$p\in C$, $B\in V\setminus C$ に対して、

$$(p,B)\in E \Leftrightarrow pIB$$

とする。ここで、pIB は点 p とブロック B が結合関係にあるという。すると、次の命題を得る。

Proposition 1.1. D は *Witt system* 3-$(10,4,1)$ *design* W_{10} の各ブロックを 3 回ずつ繰り返したデザインである。

ここで、ATLAS [3] で分類されている $J_2:2$ の極大部分群の 1 つであり 10 点の安定部分群である $3.\mathrm{Aut}(A_6)=3.A_6:2^2=3.S_6:2$ (A_6 : 6 次交代群, S_6 : 6 次対称群) が Proposition 1.1 で得られた Hall-Janko グラフの内部構造に対応していることがわかる。よって、$3.S_6:2$ からの構成を試みた次第である。

2 Hall-Janko グラフの再構成

まず、Hall-Janko グラフの頂点と Witt system W_{10} のブロックとの対応についての観察について述べる。$\Gamma = (V, E)$ を Hall-Janko グラフとして、$D = (X, \mathcal{B})$ を Witt system 3-(10, 4, 1) design $(X, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2, 3$ の各ブロックを 3 回ずつ繰り返したデザインとする。ここで、$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_3$ (as a set) である。Proposition 1.1 より、$V = X \cup \mathcal{B}$ に対して、

考察 (1)　X はグラフ Γ においてサイズ 10 の coclique である。

考察 (2)　$x \in X$, $B \in \mathcal{B}$ に対して、グラフ Γ において $(x, B) \in E \Leftrightarrow$ デザイン D において xIB である。

以上のことが容易に考察できる。よって、90 個のブロックの集合 $\mathcal{B}$ の中のグラフ Γ における隣接条件について考察する。

まず、任意の異なる 2 つのブロック $B, B' \in \mathcal{B}$ に対して、$|B \cap B'| = 0, 1, 2, 4$ である。(ここで $|B \cap B'| = 4$ は B と B' が repeated blocks であることを意味している。) そして、直接的な計算より $|B \cap B'|$ の各値に対して、グラフ Γ における隣接条件は次のように与えられる。

考察 (3)

1. $|B \cap B'| = 0$ のとき、B は 3 つのブロック $\{B', B'', B'''\}$ (B' とその repeated blocks 2 個) のうち 2 つのブロックと隣接する。
2. $|B \cap B'| = 1$ のとき、B と B' は隣接しない。
3. $|B \cap B'| = 2$ のとき、B は 3 つのブロック $\{B', B'', B'''\}$ (B' とその repeated blocks 2 個) のうち 1 つまたは 2 つのブロックと隣接する。
4. $|B \cap B'| = 4$ のとき、B と B' は隣接する。

次に、6 次対称群 S_6 から Witt system 3-(10, 4, 1) design の構成法を与える[1]。ここで、群 G に対して $I(G)$ を G の involution 全体の集合とする。

Proposition 2.1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。そして、結合構造 $D' = (X, \mathcal{B}')$ を次のように定義する。

(1) $X = \{\{i, j, k\} \cup \{l, m, n\} : \{i, j, k\} \cup \{l, m, n\} = \Omega\}$. ($\Omega$ の互いに排反する 3 点部分集合による 10 個の *partitions*)
(2) $\mathcal{B}' = I(S_6) \setminus I(A_6)$.
(3) $T \in X$ と $\rho \in \mathcal{B}'$ に対して、$TI\rho \Leftrightarrow T^\rho = T$.

すると、D' は *Witt system* 3-(10, 4, 1) *design* である。

[1] 本質的には、Cameron-Lint [1] のテキストの第 6 章の構成法と同等である。

Proposition 2.1 から、$\mathcal{B}'$ を Hall-Janko グラフの頂点集合 $\mathcal{B}_i$ $(i=1,2,3)$ に対応させることにより、考察 (1) と (2) をみたすように Hall-Janko グラフの隣接条件を与えることができる。よって、$\mathcal{B}=I(3.S_6)\setminus I(3.A_6)$ とおいた時の考察 (3) をみたす隣接条件について考える。

$\sigma,\tau\in I(3.S_6)\setminus I(3.A_6)$ に対して、$\sigma,\tau\in 3.S_6$ の S_6 における image を $\bar\sigma,\bar\tau\in S_6$ とする。そして、σ を一つ固定したとき $\bar\sigma=(12)$ とおいてその $3.S_6$-orbit を考える。すると、次のような情報が得られる。

case	τ の型	$\lvert\sigma\tau\rvert$	τ の個数	$\lvert B\cap B'\rvert$
(0)	$\bar\tau=\bar\sigma,\ \tau\neq\sigma$	1	2	4
(1)	$\bar\tau=(13)$	3	24	1
(2)	$\bar\tau=(34)$	2	6	2
$(2)'$	$\bar\tau=(34)$	6	12	2
(3)	$\bar\tau=(12)(34)(56)$	2	3	0
$(3)'$	$\bar\tau=(12)(34)(56)$	6	6	0
(4)	$\bar\tau=(13)(24)(56)$	4	12	2
$(4)'$	$\bar\tau=(13)(24)(56)$	12	24	2

これらの情報から 90 個のブロックの集合 $\mathcal{B}$ の中の Hall-Janko グラフ Γ における隣接条件について述べる。まず、Γ は強正則グラフでありその valency は 36 である。考察 (2) より、$\sigma\in\mathcal{B}$ は他の $\mathcal{B}$ の頂点と隣接するのは 32 個である。考察 (3) より、case (0) の 2 個と case $(3)'$ の 6 個は σ と結ばれる実例がある。グラフの頂点上の可移性からこの場合は σ の取り方によらず隣接する。case (1) は考察 (3) 2. より、隣接しない。case $(4)'$ のとき隣接すると仮定する。すると τ の個数は 24 なのでこれですべての隣接条件を与えたことになる。しかし、これは考察 (3) 3. より σ と一つとだけ結ばれる例があることに矛盾する。よって、残る可能性は一つだけであり case $(2)'$ と case (4) のとき隣接する。以上より、次の主結果を得る。

Theorem 2.2. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ とする。$X=\{\{i,j,k\}\cup\{l,m,n\}:\{i,j,k\}\cup\{l,m,n\}=\Omega\}$, $\mathcal{B}=I(3.S_6)\setminus I(3.A_6)$ とおき、$\rho\in\mathcal{B}$ の S_6 における *image* を $\bar\rho\in S_6$ とする。そして、グラフ $\Gamma=(X\cup\mathcal{B},E)$ を次のように定義する。

(1) X の異なる 2 点は隣接しない。
(2) $T\in X$ と $\rho\in\mathcal{B}$ に対して、$(T,\rho)\in E\Leftrightarrow T^\rho=T$.
(3) $\rho,\nu\in\mathcal{B}$ に対して、

$$(\rho,\nu)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}\bar\rho=\bar\nu\ \text{または、}\\ |\rho\nu|=4,6\end{cases}$$

すると、Γ は *Hall-Janko* グラフである。

この証明はコンピュータ (計算ソフト MAGMA) を用いて確認した。理論的な証明は (決して無理ではなく) 少々複雑と思い我々は得ていない。そのコンピュータを用いた証明の過程において群 $3.S_6$ を Hexacode [1, Definition 11.6] の自己同型群として与えたが、Theorem 2.2 の系として Hexacode から Hall-Janko グラフの構成ができたことも報告する。

Corollary 2.3. $\mathcal{H}$ を 有限体 $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ 上の *Hexacode* として、$h \in \mathcal{H}$ に対して $Supp(h) \subseteq \Omega$ とする。$S_1 = \{x \in \mathcal{H} : wt(x) = 4\}$, さらに $u, v, w \in S_1$ に対して、$S_2 = \{(u, v, w) : u + v + w = 0, Supp(u) \cup Supp(v) \cup Supp(w) = \Omega\}$ とおく。そして、頂点集合 $X \cup S_1 \cup S_2$ をもつグラフ Γ を次の (1) から (6) のように定義する。

(1) X の異なる 2 点は隣接しない。

(2) $\{i, j, k\} \cup \{l, m, n\} \in X$, $x \in S_1$ に対して、$\{i, j, k\} \subset Supp(x)$ または $\{l, m, n\} \subset Supp(x)$ のとき隣接する。

(3) $\{i, j, k\} \cup \{l, m, n\} \in X$, $(u, v, w) \in S_2$ に対して、$|\{i, j, k\} \cap Supp(u)| = |\{i, j, k\} \cap Supp(v)| = |\{i, j, k\} \cap Supp(w)| = 2$ のとき隣接する。

(4) $x, y \in S_1$ に対して、 $Supp(x) = Supp(y)$ または $wt(x + y) = 6$ のとき隣接する。

(5) $x \in S_1$, $(u, v, w) \in S_2$ に対して、次の 3 つの場合のうちどれか一つをみたすとき隣接する。

- $\omega x \in (u, v, w)$,
- $\omega^2 x \in (u, v, w)$,
- $wt(x + u) = wt(x + v) = wt(x + w) = 4$.

(6) $(u, v, w), (u', v', w') \in S_2$ に対して、次の 4 つの場合のうちどれか一つをみたすとき隣接する。

- $(u, v, w) = (\omega u', \omega v', \omega w')$,
- $(u, v, w) = (\omega^2 u', \omega^2 v', \omega^2 w')$,
- $(u, v, w) \cap (\omega u', \omega v', \omega w')$ は空集合ではない、
- $(u, v, w) \cap (\omega^2 u', \omega^2 v', \omega^2 w')$ は空集合ではない。

すると、Γ は *Hall-Janko* グラフである。

参考文献

[1] P. J. Cameron and J. H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links,* London Mathematical Society Student Texts 22, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[2] N. Chigira, M. Harada, M. Kitazume, Some self-dual codes invariant under the Hall-Janko group, preprint.

[3] J .H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *ATLAS of finite groups,* Oxford University Press, Eynsham, 1985.

[4] 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店, 1974.

[5] 中空大幸, Hall-Janko グラフとデザイン, 数理解析研究所講究録, 巻号 1440, 13-17, (2004).

[6] H. Nakasora, Mutually orthogonal Latin squares and Self-complementary designs, *Math. J. Okayama Univ.*, to appear.

[7] M. Suzuki, A simple group of order, 448,345,497,600, *1969, Theory of Finite Groups* (Symposium, Harvard Univ, Cambridge, Mass,1968), 113-119, Benjamin, New York.