

組合せ論におけるカテゴリー論的方法

Categorical methods in combinatorics

Tomoyuki YOSHIDA (Hokkaido Univ)

2005/10/04 16:40-17:30

1 はじめに

組合せ論へのカテゴリー論の応用についての研究はごくわずかである。実際組合せ論 (MSC 05) の論文を MathSciNet で検索しても、その中にカテゴリー論 (MSC 18) を関連分野として含んでいるものはわずか 71 件しかない。しかも大部分はグラフのカテゴリーのような言葉に対してだけにカテゴリーの分類番号を当てはめたものであり、カテゴリー論の応用と呼べるものは数えるほどである。また符号理論 (MSC 94B) とカテゴリー論 (18) が同時に分類番号になっている論文はひとつもなかった。ただ、符号理論の分野で「category」の言葉が出てくるのは 20 件あった。すべてを調べたわけではないが、「category」が一般の単語として表れているのがほとんどであった。

意外なことに、数え上げの組合せ論 (05A) への応用が 14 件しかない。この分野には Joyal の species の理論 (カテゴリー論的母関数の理論) が含まれているはずなのである。こうなると、AMS Review の論文への分類番号の割り当てについて、やや不安を感じる。

ここでは組合せ論の 4 つの分野へのカテゴリー論の応用について、私自身のものを含めたいくつかの研究を簡単に紹介し、将来の展望を述べたい。カテゴリー論の予備知識 (カテゴリー, ファンクター, 自然変換, 随伴関手, アーベル圏など) は、代数の教科書にあるようなごく基本的なもので間に合う。本格的にカテゴリーの勉強を試用とするなら MacLane の本 (邦

2. グラフ理論

訳『圏論の基礎』)が良い。トポス理論 (Johnstone や MacLane–Moerdijk の本) を学ぶための予備知識もほぼそろろう。

トポスとは、いわば「一般化された集合」のカテゴリーである。とくに各 Hom-set $\text{Hom}(X, Y)$ が有限集合であるような局所有限トポスが離散数学で有用と思う。トポスの定義は省略するが、例えばファンクターカテゴリー $[\mathcal{C}, \text{Set}]$ がそうである。また有限カテゴリーからのファンクターカテゴリー $[\mathcal{C}, \text{set}]$ は局所有限トポスである。これより、有限 G -集合のカテゴリー set^G 、有向グラフのカテゴリー、根つき森のカテゴリーは、いずれも局所有限トポスとなる。離散数学を有限集合のカテゴリー set の理論とすれば、局所有限トポス上で離散数学を展開することが考えられる。これこそが目指すものである。

2 グラフ理論

グラフ理論から例をあげよう。早期の結果として Lovasz の同型判定定理がある。有向グラフは多重辺やループがあっても良い。有向グラフ G から H への準同型とは、頂点を頂点に、有向辺を有向辺に写す写像であって、有向辺の始点と終点を保つものである。 G から H への準同型写像の集合を $\text{Hom}(G, H)$ とする。

定理. 有向グラフ G, H が同型であるための必要十分条件は、 $|\text{Hom}(X, G)| = |\text{Hom}(X, H)|$ がすべての有向グラフ X に対して成り立つことである。

(証明) G_1, \dots, G_n を同型でないグラフの集合で、 G, H を含み、部分グラフに関して閉じているとする。このとき

$$H = (|\text{Hom}(G_i, G_j)|), \quad L := (|\text{Epi}(G_i, G_j)|), \quad U := (|\text{Sub}(G_i, G_j)|)$$

(Epi は全射グラフ準同型, $\text{Sub}(G_i, G_j)$ は G_i に同型な G_j の部分グラフの集合) で n 次正方行列を定義すれば,

$$H = LU$$

である。グラフを頂点の個数の順に並べておいたら、 L は下三角行列で対角成分は $|\text{Aut}(G_i)|$, U は上三角行列で対角成分は 1.

$$\therefore \det(H) = \det(L) \det(U) = \prod_i |\text{Aut}(G_i)| \neq 0.$$

3. 組合せ論におけるカテゴリー

行列式の簡単な性質から $G_i \neq G_j$ なら $i \neq j$, したがってある k があって $|\text{Hom}(G_k, G_i)| \neq |\text{Hom}(G_k, G_j)|$. これより定理がしたがう. (証終)

この定理は, 多重辺やループのない有向グラフでも成り立つ. 単純グラフでも成り立つ. 定理に表れる X の範囲は, G と H の部分グラフになりうる連結なグラフとして良い.

Lovasz の定理にカテゴリーの言葉は表れないが, 定理の主張から米田の補題が導かれる.

$$X \cong Y \iff \text{Hom}(-, X) \cong \text{Hom}(-, Y).$$

つまり Lovasz の定理は, 有向グラフのカテゴリーでの米田の補題の強化版である. Lovasz の定理の証明で本質的なのは, 有向グラフのカテゴリーにおいて, 一意的全単射分解が成り立ち全射自己準同型写像が同型写像になることある. 実際, これの条件を満たす局所有限カテゴリー (例えば set へのファンクターカテゴリー) において同型判定定理が成り立つ. 有限 G -集合 set^G での同型判定定理は Burnside によって得られている: 有限 G -集合 X と Y について

$$X \cong_G Y \iff |X^H| = |Y^H| \quad (\forall H \leq G).$$

ここで X^H は H -固定点集合 ($X^H \cong \text{Map}_G(G/H, X)$) に注意).

3 組合せ論におけるカテゴリー

最初にやるべきことは, 組合せ構造間の「射」を定義することである. これによって組合せ構造のカテゴリー, グラフのカテゴリー, 符号のカテゴリーなどが得られる.

例えば, Assumus による符号のカテゴリーがある (1998). $F := \mathbf{F}_q$ とする. F 上の線形符号の間の準同型写像 $f: C \rightarrow D$ がを

$$|f(u)| \leq |u| \quad (\forall u \in C)$$

(縮小写像) を満たす線形写像として定義する. ここで $|u| := \#\{i \mid u_i \neq 0\}$ は重みである. 例えば $C \subseteq D$ が D の部分符号なら, 包含写像 $C \hookrightarrow D$ は準同型写像である. Assumus はこのカテゴリーを用いて, 直既約符号などを考察している.

3. 組合せ論におけるカテゴリー

別の定義もある。 M を有限集合, $F^M := \{u = (u_i)_{i \in M} \mid u_i \in F\}$ と置く。 C が F^M の部分空間のとき (M, C) (通常は単に C) を符号と呼ぶ。 ふたつの符号の間の準同型写像 $f: (M, C) \rightarrow (N, D)$ とは, 写像 $f: M \rightarrow N$ であって

$$(u_i) \in C \implies \left(\sum_{i \in f^{-1}(j)} u_i \right) \in D$$

を満たすものである。 同じことだが, 写像 $f: M \rightarrow N$ によって誘導される線形写像を $\tilde{f}: F^M \rightarrow F^N$ としたとき $\tilde{f}(C) \subseteq D$ を満たすものとしても良い。 こちらの意味での符号の準同型は Assumus の意味での準同型にもなっている。 直既約符号を考えるならどちらの準同型を使っても良い。

カテゴリー \mathcal{C} が, 強い意味での Krull-Schmidt カテゴリーであるとは, 任意の対象 X が直既約部分対象の直和に一意的に分解されることを言う: $X = n_1 I_1 + \dots + n_m I_m$. 分解の一意性より $\text{Aut}(X) \cong \prod (\text{Aut}(I_\alpha) \times S_{n_\alpha})$ である。 例えば有限 G -集合のカテゴリーがそのような例になっている。 有限 G -集合は軌道分解を持つからである。 上で定義した符号のカテゴリーも強い意味での Krull-Schmidt カテゴリーになっている。 指数関数等式

$$\sum_{X \in \mathcal{C}/\cong} \frac{t^X}{|\text{Aut}(X)|} = \exp \left(\sum_{I \in \mathcal{I}/\cong} \frac{t^I}{|\text{Aut}(I)|} \right)$$

により, 直既約対象の数え上げができる。 ここで \mathcal{I} は直既約対象のなす部分カテゴリーである。 また t^X は計算規則として $t^0 = 1$, $t^{X+Y} = t^X t^Y$ を満たすとする。

●四色問題 (Pavlović 1995). グラフの彩色問題とグラフのカテゴリーの関係は深い。 例えばグラフ G について, 頂点の n 色による彩色と, 完全グラフへのグラフ準同型写像 $G \rightarrow K_n$ とは一対一に対応している。 平面グラフに関する四色問題は, 平面グラフの辺の 3 彩色可能性に同値であり, それは無限群 $\langle r, b, g \mid r^2 = b^2 = g^2 = 1 \rangle$ の有限集合への作用の性質でも言い表せる。 カテゴリー論的には, グラフ上の coalgebra の存在と書き換えられる。 このような見地から四色問題の別証明が可能かどうかは分からない。

●種 (species) の理論 (Joyal 1981). これは母関数の理論のカテゴリー化として有名である。 bij を有限集合と全単射のなすカテゴリーとする。 種

3. 組合せ論におけるカテゴリー

(species) とはファンクター $M : \mathbf{bij} \rightarrow \mathbf{set}$ のことである。 M による $[n] := \{0, 1, \dots, n-1\}$ の像を単に $M(n)$ と書く。種 M の母関数を

$$M(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|M(n)|}{n!} t^n$$

が対応している。逆にこのような形の母関数から種が構成できる。したがって、母関数同士の演算 (四則, 合成など) を種同士の演算として表せる。この分野は大きな分野に成長しつつある。ただ、 \mathbf{bij} はきわめて良くないカテゴリーである。実際、対称群 S_n ($n = 0, 1, \dots$) の直和集合 $\coprod S_n$ (groupoid になる) をカテゴリーと見なしたものである。種は、悪いカテゴリーの「表現」なので、考える意味はあるかもしれない。

●ブロックデザインの理論 (Y 1987). これは、カテゴリー論的な扱いが割と容易である。 (X, B) を (v, b, r, k, λ) -デザインとする。その結合行列を A は次を満たす:

$$AJ = rJ, JA = kJ, A^t A = nI + \lambda J \quad (n := r - \lambda).$$

フラグの集合を $F := \{(x, \beta) \in X \times B \mid x \in \beta\}$ とすれば、スパン $[X \leftarrow F \rightarrow B]$ が得られる。

Y から X への有限集合の間のスパンと $X \times Y$ 型の行列とは

$$[X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} Y] \longleftrightarrow [l^{-1}(x) \cap r^{-1}(y)]_{x,y}$$

によって対応している。スパンのカテゴリーにおける合成はファイバー積で与えられる:

$$[X \leftarrow A \rightarrow Y] \circ [Y \leftarrow \rightarrow Z] := [X \leftarrow A \times_Y B \rightarrow Z].$$

これが行列の積に対応している。

したがってスパンの言葉を使ってブロックデザインの定義などを書き換えることができる。そこで \mathcal{C} を局所有限カテゴリーで \mathbf{set} への忘却ファンクター U を持つものとする。このとき \mathcal{C} におけるブロックデザイン $[X \leftarrow F \rightarrow B]$ とは、 \mathcal{C} におけるスパンで、 U で写したときふつうのブロックデザインになるようなものとする。例えば、 \mathbf{set}^G におけるブロックデザインとは、群 G が作用するブロックデザインと同じ概念である。

有限群 G が採用するブロックデザイン $[X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} B]$ に対する Fisher 型不等式がどうなるか考えてみよう。簡単のため Hecke カテゴリー

4. 将来への展望

$\text{Hec}(G, \mathcal{O})$ に写して考える. これは G -行列 $A = (|l^{-1}(x) \cap r^{-1}(\beta)|)_{x \in X, \beta \in B}$ を考えることである. ただし A は単なる行列としては $A^t A = (r - \lambda)I + \lambda J$ を満たすが, この等式は G -行列としては成り立たないことに注意しておく. それでも $\text{Hec}(G, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Hec}(1, \mathcal{O})$ (行列のカテゴリー) は同型射を reflect する. したがって, $\det(A^t A) = rkn^{v-1} \in \mathcal{O}^\times$ なら, A は G -行列として右逆元を持つ. すなわち $\mathcal{O}G$ -加群として $\mathcal{O}X | \mathcal{O}B$ である. これはまさに Fisher の不等式である. とくに P を G の p -部分群, F を標数 p の体として, この関係を Brauer 準同型

$$\text{Hec}(G, F) \rightarrow \text{Hec}(N_G(P), F); X \mapsto X^P$$

で飛ばして, 次の不等式を得る.

$$F[X^P] | F[B^P], \quad |X^P/N_G(P)| \leq |B^P N_G(P)|$$

4 将来への展望

やりたいことはたくさんある. いくつかあげておく.

(1) 符号理論関係では, 群作用のもとの体積公式や限界式, Assumus-Mattoson 型の定理の同変版がほしい. 長さ 72 の極值的重偶自己双対符号 C_{72} は長いこと存在するか問題になってきたが, とくに位数 3 の半正則自己同形を持つものを考えたい. 残念ながら, MacWilliams 型恒等式と同変版からは矛盾が出ない. 体積公式はまだ得られていないが, それから存在 (あるいは非存在) が言えるぎりぎりの所である.

(2) 有限群のカテゴリー grp はよいカテゴリーではない. 有限重群のカテゴリーの方が, 直和と直積を持ち, 分配法則なども成り立つのでいくらかよいカテゴリーである. このようなよくないカテゴリーは, その表現のカテゴリー, つまりファンクターカテゴリー $\text{grp}^\wedge := [\text{grp}^{\text{op}}, \text{set}]$ を通して研究するのが定跡である. このカテゴリーを, 半単体的複体 (有限全順序集合のカテゴリーの表現) や層のように調べるのがひとつの方針である. もともやりたいのは grp^\wedge の適当な reflective な部分カテゴリーについて, 体積公式を示すことである. そこでの有限単純群の役割にも興味がある.

(3) カテゴリー論でめざましいのは高次元カテゴリー論の結び目理論や位相的量子場の理論や量子群の理論への応用であろう. 各 Hom-set $\text{Hom}(X, Y)$ 自身がカテゴリーの構造を持つようなカテゴリーを 2-カテ

4. 将来への展望

ゴリーという。例えば、カテゴリー全体のなすカテゴリー \mathbf{Cat} や、環を対象とし両側加群を Home-set とするカテゴリーがそのようなものである。bull-back を持つカテゴリー \mathcal{C} からできるスパンのカテゴリー $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ も 2-カテゴリーである。このような見地からすると、ブロックデザイン (X, B) はファンクターと考えられる。例えば X 上のベクトル空間 $(V_x)_{x \in X}$ に対し、 $(W_\beta)_{\beta \in B}$ を対応させる。ここで $W_\beta := \bigoplus_{x \in \beta} V_x$ である。

References

- J.Kosłowski; A.Melton, "Categorical Perspectives", Birkhäuser 2001.
- Hell; Nesetril, "Graphs and Homomorphisms", Oxford 2004.
- P.T.Johnstone, "Sketches of an Elephant", vol 1, 2, Oxford 2002.
- P.T.Johnstone, "Topos Theory", Academic Press 1977.
- S.MacLane, "Categories for the Working Mathematician", Springer, 1998.
- S.Mac Lane; I.Moerdijk, "Sheaves in Geometry and Logic", Springer 1992.
- S.Carmody; M.Leeming; R.F.C.Walters, The Todd-Coxeter Procedure and Left Kan Extensions. J. Symb. Comput. **19**, 459-488 (1995)
- D.Pavlović, A categorical setting for 4-colour theorem, JPAA 1995.
- Y.Shiromoto; Y, Singleton bound for code over $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, KuJM, 2001.
- T.Yosida, Generalized Burnside ring, Hokaido Math.J., 1990.
- T.Yosida, On Burnside rings of finite groups and finite categories, ASPM 1987.
- T.Yosida, Fisher's inequality for block designs with group action, J.Fac.Science Univ.Tokyo 1987.
- T.Yosida, McWilliams identities for linear codes with group action, Kumamoto J.Math., 1993.
- T.Yosida, Exponential formulas for fgtps and locally finite toposes. ICU, 1997.
- T.Yosida, A note on Plethysm Composition. 2002.