数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 165-175

Cauchy 型の行列式，Pfaffian と Littlewood–Richardson 係数

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

組合せ論や表現論をはじめとして，数学の多くの分野（問題）で，行列式や Pfaffian の関係式，具体的な計算が最終的な解決への鍵となることが多い．このような関係式は

(A) 一般の行列に対して成り立つもの

(B) 特別な形の行列に対して成り立つもの

の 2 つに大きく分けることができる．

(A) に分類されるものとして，例えば行列式に関する Desnanot–Jacobi の公式（Dodgson の公式とも呼ばれる）がある．正方行列 A と，行の添字 $i_1, \cdots, i_r$, 列の添字 $j_1, \cdots, j_r$ が与えられたとき，A から 第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行，第 j_1 列，$\cdots$，第 j_r 列を取り除いて得られる部分行列を $A^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_r}$ と表す．このとき，

$$\det A^1_1 \cdot \det A^2_2 - \det A^1_2 \cdot \det A^2_1 = \det A \cdot \det A^{1,2}_{1,2}. \tag{1}$$

この Desnanot–Jacobi の公式は，可積分系の理論において基本的な関係式の 1 つである．

一方，(B) に分類されるものとしては，Vandermonde の行列式

$$\det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

が有名である．また，表現論や対称関数の理論では，Cauchy の行列式 [C]

$$\det\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)} \tag{2}$$

や Schur の Pfaffian [S]

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j-x_i}{x_j+x_i}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n}\frac{x_j-x_i}{x_j+x_i} \tag{3}$$

が重要な役割を果たしている．

この報告では，Cauchy の行列式，Schur の Pfaffian の一般化（Cauchy 型の行列式，Pfaffian）を考える．このような Cauchy の行列式，Schur の Pfaffian の一般化や変種はこれまでに [I, IW2, LLT, O1, O2, St, Su] などでいくつか与えられてきたが，ここで扱う一般化は成分に Vandermonde 型の行列式を含むものである．

主結果を述べるために，記号を用意する．n 個の変数からなるベクトル $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ に対して，

$$V^{p,q}(\vec{x};\vec{a})=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & a_1 & a_1x_1 & \cdots & a_1x_1^{q-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{p-1} & a_n & a_nx_n & \cdots & a_nx_n^{q-1}\end{pmatrix}\quad (p+q=n),$$

$$W^{n}(\vec{x};\vec{a})=\begin{pmatrix}1+a_1x_1^{n-1} & x_1+a_1x_1^{n-2} & \cdots & x_1^{n-1}+a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+a_nx_n^{n-1} & x_n+a_nx_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+a_n\end{pmatrix}$$

とおく．例えば，$q=0$ のとき，$V^{n,0}(\vec{x};\vec{a})=\left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n}$ は Vandermonde 行列であり，$\det V^{n,0}(\vec{x};\vec{a})=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ となる．このとき，次の 4 つの行列式，Pfaffian の分解公式が成り立つ．

定理 1.1. (石川-岡田-田川-Zeng [IOTZ])

(a) n を正整数，p, q を非負整数とする．6 組の変数

$$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n),\quad \vec{y}=(y_1,\cdots,y_n),\quad \vec{z}=(z_1,\cdots,z_{p+q}),$$
$$\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n),\quad \vec{b}=(b_1,\cdots,b_n),\quad \vec{c}=(c_1,\cdots,c_{p+q})$$

に対して，

$$\det\left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i,y_j,\vec{z};a_i,b_j,\vec{c})}{y_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j-x_i)}\det V^{p,q}(\vec{z};\vec{c})^{n-1}\det V^{n+p,n+q}(\vec{x},\vec{y},\vec{z};\vec{a},\vec{b},\vec{c}).\qquad(4)$$

(b) n を正整数，p を非負整数とする．6 組の変数

$$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n),\quad \vec{y}=(y_1,\cdots,y_n),\quad \vec{z}=(z_1,\cdots,z_p),$$
$$\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n),\quad \vec{b}=(b_1,\cdots,b_n),\quad \vec{c}=(c_1,\cdots,c_p)$$

に対して，

$$\det\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i,y_j,\vec{z};a_i,b_j,\vec{c})}{(y_j-x_i)(1-x_iy_j)}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=\frac{(-1)^n}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j-x_i)(1-x_iy_j)}$$
$$\times\det W^{p}(\vec{z};\vec{c})^{n-1}\det W^{2n+p}(\vec{x},\vec{y},\vec{z};\vec{a},\vec{b},\vec{c}).\qquad(5)$$

(c) n を正整数，p, q, r, s を非負整数とする．7 組の変数

$$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_{2n}),\quad \vec{a}=(a_1,\cdots,a_{2n}),\quad \vec{b}=(b_1,\cdots,b_{2n}),$$
$$\vec{z}=(z_1,\cdots,z_{p+q}),\quad \vec{c}=(c_1,\cdots,c_{p+q}),$$
$$\vec{w}=(w_1,\cdots,w_{r+s}),\quad \vec{d}=(d_1,\cdots,d_{r+s})$$

に対して,

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{z};a_i,a_j,\overrightarrow{c})\det V^{r+1,s+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{w};b_i,b_j,\overrightarrow{d})}{x_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)}\det V^{p,q}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det V^{r,s}(\overrightarrow{w};\overrightarrow{d})^{n-1}$$
$$\times\det V^{n+p,n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\det V^{n+r,n+s}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w};\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}). \tag{6}$$

(d) n を正整数, p,q を非負整数とする. 7 組の変数

$$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_{2n}),\quad \overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_{2n}),\quad \overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_{2n}),$$
$$\overrightarrow{z}=(z_1,\cdots,z_p),\quad \overrightarrow{c}=(c_1,\cdots,c_p),$$
$$\overrightarrow{w}=(w_1,\cdots,w_q),\quad \overrightarrow{d}=(d_1,\cdots,d_q)$$

に対して,

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i,x_j,\overrightarrow{z};a_i,a_j,\overrightarrow{c})\det W^{q+2}(x_i,x_j,\overrightarrow{w};b_i,b_j,\overrightarrow{d})}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\det W^{p}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det W^{q}(\overrightarrow{w};\overrightarrow{d})^{n-1}$$
$$\times\det W^{2n+p}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\det W^{2n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w};\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}). \tag{7}$$

これらの公式は, 筆者 [O3] によって予想され, その後石川 雅雄, 田川 裕之, Jiang Zeng との共同研究によって完全な証明が与えられた.

この報告では, §2 でこの定理の証明の概略を説明し, §3 で特殊化・応用などを簡単に解説する.

2 主定理の証明

この節では, 主定理 1.1 の証明の概略を与える. (詳しい証明は, [IOTZ] を参照されたい.) 定理 1.1 の 4 つの等式を独立に証明することもできるが, ここで, 次の 2 つのステップに分けて証明する.

第 1 段階 Desnanot–Jacobi の公式 (1) の Pfaffian 版を用いて, (5) を証明する.

第 2 段階 斉次版を導入することによって, (5) から残りの (4), (6), (7) を導く.

2.1 第 1 段階 : (5) の証明

等式 (5) を n に関する帰納法で証明する. 帰納法を進めるために, Desnanot–Jacobi の公式 (1) の Pfaffian 版を用いる.

補題 2.1. ([Kn, IW2] を見よ) A が交代行列であるとき,

$$\mathrm{Pf}\,A^{1,2}_{1,2}\cdot\mathrm{Pf}\,A^{3,4}_{3,4}-\mathrm{Pf}\,A^{1,3}_{1,3}\cdot\mathrm{Pf}\,A^{2,4}_{2,4}+\mathrm{Pf}\,A^{1,4}_{1,4}\cdot\mathrm{Pf}\,A^{2,3}_{2,3}=\mathrm{Pf}\,A\cdot\mathrm{Pf}\,A^{1,2,3,4}_{1,2,3,4}. \tag{8}$$

定理 1.1 (4) の証明. まず，$n=1$ のときは，証明すべきことはない．次に，$n=2$ のときは，$\det V^{p,q}$ と $\det V^{p-1,q}$, $\det V^{q,p}$ の間の次の関係式を用いると，$p+q+r+s$ に関する帰納法によって容易に証明できる．

補題 2.2. (1) $p \geq q$ かつ $p \geq 1$ のとき，

$$\det V^{p,q}(\vec{x};\vec{a}) = \prod_{i=1}^{p+q-1}(x_{p+q}-x_i)\cdot \det V^{p-1,q}(x_1,\cdots,x_{p+q-1};a'_1,\cdots,a'_{p+q-1}).$$

ここで，

$$a'_i = \frac{a_i - a_{p+q}}{x_i - x_{p+q}} \quad (1 \leq i \leq p+q-1)$$

とおいた．

(2) 非負整数 p, q に対して，

$$\det V^{p,q}(\vec{x};\vec{a}) = (-1)^{pq}\prod_{i=1}^{p+q} a_i \cdot \det V^{q,p}(\vec{x};\vec{a}^{-1}).$$

ここで，$\vec{a}^{-1} = (a_1^{-1},\cdots,a_{p+q}^{-1})$ である．

$n \geq 3$ とする．交代行列

$$A = \left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i,x_j,\vec{z};a_i,a_j,\vec{c})\det V^{r+1,s+1}(x_i,x_j,\vec{w};b_i,b_j,\vec{d})}{x_j - x_i}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$

に対して，Pfaffian 版 Desnanot–Jacobi の公式 (1) を適用する．すると，帰納法の仮定を用いることにより，$n=2$ の場合の等式 (5) において，$\vec{z}$, $\vec{c}$, $\vec{w}$, $\vec{d}$ をそれぞれ

$$(\vec{x}^{(1,2,3,4)},\vec{z}),\quad (\vec{a}^{(1,2,3,4)},\vec{c}),\quad (\vec{x}^{(1,2,3,4)},\vec{w}),\quad (\vec{b}^{(1,2,3,4)},\vec{d}),$$

（ここで，$\vec{x}^{(1,2,3,4)}$ は $\vec{x}$ から x_1,x_2,x_3,x_4 を取り除いたベクトルを表す）で置き換えた等式に帰着される．これはすでに $n=2$ の場合に証明されているので，(5) の証明が完成する．

2.2 第 2 段階：斉次版と (4), (6), (7) の証明

第 1 段階で示した (5) から残りの (4), (6), (7) を導くために，拡張された Vandermonde 行列 $V^{p,q}$ の斉次版を導入する．n 個の変数からなるベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，

$$U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x} & \vec{a}\\ \vec{y} & \vec{b}\end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_1x_1^{p-1} & a_1x_1^{p-2}y_1 & \cdots & a_1y_1^{p-1} & b_1x_1^{q-1} & b_1x_1^{q-2}y_1 & \cdots & b_1y_1^{q-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nx_n^{p-1} & a_nx_n^{p-2}y_n & \cdots & a_ny_n^{p-1} & b_nx_n^{q-1} & b_nx_n^{q-2}y_n & \cdots & b_ny_n^{q-1}\end{pmatrix}$$

とおく．すると，$\det U^{p,q}$ と $\det V^{p,q}$, $\det W^n$ との間には，次のような関係式が成り立つ．

補題 2.3.

$$U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x} & \vec{a}\\ \vec{y} & \vec{b}\end{array}\right)=\prod_{k=1}^{p+q}a_kx_k^{p-1}\cdot V^{p,q}\left(\vec{x}^{-1}\vec{y};\vec{a}^{-1}\vec{b}\,\vec{x}^{q-p}\right), \tag{9}$$

$$V^{p,q}(\vec{x};\vec{a})=U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c}\vec{1} & \vec{1}\\ \vec{x} & \vec{a}\end{array}\right), \tag{10}$$

$$\det U^{n,n}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x} & \vec{1}+\vec{a}\,\vec{x}\\ \vec{1}+\vec{x}^2 & \vec{x}+\vec{a}\end{array}\right)=(-1)^{n(n-1)/2}\det W^{2n}(\vec{x};\vec{a}), \tag{11}$$

$$\det U^{n,n+1}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x} & \vec{1}+\vec{a}\,\vec{x}^2\\ \vec{1}+\vec{x}^2 & \vec{1}+\vec{a}\end{array}\right)=(-1)^{n(n-1)/2}\det W^{2n+1}(\vec{x};\vec{a}). \tag{12}$$

ここで，$\vec{1}=(1,\cdots,1)$ であり，ベクトル $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ と整数 k,l に対して，

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),\quad \vec{x}\,\vec{y}=(x_1y_1,\dots,x_ny_n),$$
$$\vec{x}^k=(x_1^k,\dots,x_n^k),\quad \vec{x}^k\vec{y}^l=(x_1^ky_1^l,\dots,x_n^ky_n^l)$$

である．

このとき，(9) を用いると，上で証明した等式 (5) は次のように斉次化される．

定理 2.4. n を正整数，p,q,r,s を非負整数とするとき，

$$\operatorname{Pf}\left(\frac{\det U^{p+1,q+1}\left(\begin{array}{c|c}x_i,x_j,\vec{\xi} & a_i,a_j,\vec{\alpha}\\ y_i,y_j,\vec{\eta} & b_i,b_j,\vec{\beta}\end{array}\right)\det U^{r+1,s+1}\left(\begin{array}{c|c}x_i,x_j,\vec{\zeta} & c_i,c_j,\vec{\gamma}\\ y_i,y_j,\vec{\omega} & d_i,d_j,\vec{\delta}\end{array}\right)}{\det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}}\right)_{1\le i<j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}\det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}}\det U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c}\vec{\xi} & \vec{\alpha}\\ \vec{\eta} & \vec{\beta}\end{array}\right)^{n-1}\det U^{r,s}\left(\begin{array}{c|c}\vec{\zeta} & \vec{\gamma}\\ \vec{\omega} & \vec{\delta}\end{array}\right)^{n-1}$$
$$\times\det U^{n+p,n+q}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x},\vec{\xi} & \vec{a},\vec{\alpha}\\ \vec{y},\vec{\eta} & \vec{b},\vec{\beta}\end{array}\right)\det U^{n+r,n+s}\left(\begin{array}{c|c}\vec{x},\vec{\zeta} & \vec{c},\vec{\gamma}\\ \vec{y},\vec{\omega} & \vec{d},\vec{\delta}\end{array}\right).$$

この定理において，$r=s=0$ とし，

$$c_1=\cdots=c_n=1,\qquad c_{n+1}=\cdots=c_{2n}=0,$$
$$d_1=\cdots=d_n=0,\qquad d_{n+1}=\cdots=d_{2n}=1.$$

と代入する．このとき，

$$\det U^{1,1}\left(\begin{array}{c|c}x_i,x_j & c_i,c_j\\ y_i,y_j & d_i,d_j\end{array}\right)=\begin{cases}0 & (1\le i,j\le n \text{ または } n+1\le i,j\le 2n \text{ のとき})\\ 1 & (1\le i\le n \text{ かつ } n+1\le j\le 2n \text{ のとき})\\ -1 & (n+1\le i\le 2n \text{ かつ } 1\le j\le n \text{ のとき})\end{cases}$$

となるから，n 次正方行列 X に対して，

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O & X \\ -{}^tX & O \end{pmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}\det X$$

が成り立つことを用いると，(4) の斉次版が得られる．つまり，

系 2.5. n を正整数，p, q を非負整数とするとき，. n 個の変数からなるベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ と $p+q$ 個の変数からなるベクトル $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ に対して，

$$\det\left(\frac{\det U^{p+1,q+1}\left(\begin{array}{c|c} x_i, z_j, \vec{\xi} & a_i, c_j, \vec{\alpha} \\ y_i, w_j, \vec{\eta} & b_i, d_j, \vec{\beta} \end{array}\right)}{\det\begin{pmatrix} x_i & z_j \\ y_i & w_j \end{pmatrix}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{1\le i,j\le n}\det\begin{pmatrix} x_i & z_j \\ y_i & w_j \end{pmatrix}} \det U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c} \vec{\xi} & \vec{\alpha} \\ \vec{\eta} & \vec{\beta} \end{array}\right)^{n-1} \det U^{n+p,n+q}\left(\begin{array}{c|c} \vec{x}, \vec{z}, \vec{\xi} & \vec{a}, \vec{c}, \vec{\alpha} \\ \vec{y}, \vec{w}, \vec{\eta} & \vec{b}, \vec{d}, \vec{\beta} \end{array}\right).$$

定理 1.1 (4), (6), (7) の証明. (4) は，系 2.5 と (10) から従う．また，(6), (7) はそれぞれ系 2.5，定理 2.4 と (11), (12) から従う．

3 特殊化と応用

3.1 Cauchy の行列式，Schur の Pfaffian へ

まず，主定理 1.1 の等式 (4), (5) が，それぞれ Cauchy の行列式 (2)，Schur の Pfaffian (3) の一般化となっていることを説明する．

分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対応する Schur 関数を

$$s_\lambda(\vec{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

と表すことにする．また，正整数 r に対して，分割 $\delta(r)$ を

$$\delta(r) = (r, r-1, \cdots, 2, 1)$$

とおいて定める．($r=0$ のときは $\delta(0)=\emptyset$ であるとする．) このとき，行列式の列を並べかえることにより，

$$\det V^{p,q}(\vec{x}^2; \vec{x}) = \begin{cases} (-1)^{q(2p-q-1)/2}\Delta(\vec{x})s_{\delta(p-q-1)}(\vec{x}) & (p>q \text{ のとき}) \\ (-1)^{p(p-1)/2}\Delta(\vec{x})s_{\delta(q-p)}(\vec{x}) & (p\le q \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることがわかる．よって，(4), (5) において，

$$x_i \to x_i^2, \quad y_i \to y_i^2, \quad z_i \to z_i^2, w_i \to w_i^2 \quad a_i \to x_i, \quad b_i \to y_i, \quad c_i \to z_i, \quad d_i \to w_i$$

と置き換えることにより，次の等式が得られる：

$$\det\left(\frac{s_{\delta(k)}(x_i,y_j,\vec{z})}{x_i+y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i+y_j)} s_{\delta(k)}(\vec{z})^{n-1} s_{\delta(k)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}), \tag{13}$$

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j-x_i}{x_j+x_i} s_{\delta(k)}(x_i,x_j\vec{z}) s_{\delta(l)}(x_i,x_j,\vec{w})\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n}\frac{x_j-x_i}{x_j+x_i} s_{\delta(k)}(\vec{z})^{n-1} s_{\delta(l)}(\vec{w})^{n-1} s_{\delta(k)}(\vec{x},\vec{z}) s_{\delta(l)}(\vec{x},\vec{w}). \tag{14}$$

特に，等式 (13) において $k=0$，(14) において $k=l=0$ とすることにより，Cauchy の公式 (2)，Schur の Pfaffian (3) が復元される．

3.2 定理 1.1 の原形

次に，主定理 1.1 において，p, q などが小さい場合を考える．例えば，(4) において $p=q=0$，(5) において $p=q=r=s=0$ とすると，

$$\det\left(\frac{b_j-a_i}{y_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j-x_i)} \det V^{n,n}(\vec{x},\vec{y};\vec{a},\vec{b}),$$

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{x_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)} \det V^{n,n}(\vec{x};\vec{a}) \det V^{n,n}(\vec{x};\vec{b})$$

となる．これらの等式，および，(6) で $p=0$，(7) で $p=q=0$ としたものが，定理 1.1 の原形であり，長方形の Young 図形に対応する古典群の既約表現のテンソル積や制限の分解を与える指標の関係式を導く際に用いられた．([O1] を見よ.) また，これらの等式や，(6) で $p=1$ としたものは，対称性をもつ交代符号行列の数え上げで重要な役割を果たしている．([O2], [O5] を見よ.)

3.3 長方形の Young 図形に対する Littlewood–Richardson 係数

主定理 1.1 の等式 (4), (5) を用いることによって，長方形の Young 図形に対する Littlewood–Richardson 係数を調べることができる．ここで，Littlewood–Richardson 係数 $\mathrm{LR}_{\mu,\nu}^{\lambda}$ は，Schur 関数の積を Schur 関数で展開したときの係数として現れるものである：

$$s_\mu(x_1,\cdots,x_n)s_\nu(x_1,\cdots,x_n) = \sum_\lambda \mathrm{LR}_{\mu,\nu}^{\lambda}\, s_\lambda(x_1,\cdots,x_n).$$

以下，$a\times b$ の長方形の Young 図形（に対応する分割）を $\square(a,b)$ と表す：

$$\square(a,b) = (b^a) = (\underbrace{b,\cdots,b}_{a\text{ 個}}).$$

また，分割 $\lambda \subset \square(n,e)$ に対して，

$$\lambda^\dagger = \lambda^\dagger(n,e) = (e-\lambda_n, e-\lambda_{n-1}, \cdots, e-\lambda_1)$$

とおく．

等式 (4) において，

$$a_i = x_i^{e+p+n}, \quad b_i = y_i^{e+p+n}$$

と特殊化し，(5) において，

$$a_i = x_i^{e+p+n}, \quad b_i = x_i^{f+r+n}, \quad c_i = z_i^{e+p+n}, \quad d_i = w_i^{f+r+n}$$

と特殊化したものを考える．このとき，Schur 関数の定義から，

$$\det V^{p,q}(\vec{x}; \vec{x}^k) = \begin{cases} \Delta(\vec{x}) s_{\square(q,k-p)}(\vec{x}) & (k \geq p \text{ のとき}) \\ 0 & (k < p \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるから，長方形の Young 図形に対応する Schur 関数に対して次の等式が得られる：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta(\vec{x})\Delta(\vec{y})} \det \left(s_{\square(q+1,e+n-1)}(x_i, y_j, \vec{z})\right)_{1\leq i,j\leq n} \\ &\quad = (-1)^{n(n+1)/2} s_{\square(q,e+n)}(\vec{z})^{n-1} s_{\square(q+n,e)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta(\vec{x})} \mathrm{Pf}\left((x_j - x_i) s_{\square(q+1,e+n-1)}(x_i, x_j, \vec{z}) s_{\square(s+1,f+n-1)}(x_i, x_j, \vec{w})\right)_{1\leq i,j\leq 2n} \\ &\quad = s_{\square(q,e+n)}(\vec{z})^{n-1} s_{\square(s,f+n)}(\vec{w})^{n-1} s_{\square(n+q,e)}(\vec{x}, \vec{z}) s_{\square(n+s,f)}(\vec{x}, \vec{w}). \end{aligned} \tag{16}$$

Cauchy–Binet の公式，または石川–若山の小行列の和公式 [IW1] を用いて，(15), (16) の両辺を $\vec{x}$ に関する Schur 関数で展開したときの係数を比較すると，Littlewood–Richardson 係数に関する次の結果が得られる．(議論の詳細は，[IOTZ, Section 7], [O3] を参照されたい.)

命題 3.1. n を正整数とし，e, f を非負整数とする．

(1) 分割 μ, ν に対して，

$$\mathrm{LR}_{\mu,\nu}^{\square(n,e)} = \begin{cases} 1 & (\nu = \mu^\dagger(n,e) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) 長さ $2n$ 以下の分割 λ に対して，

$$\begin{aligned} &\mathrm{LR}_{\square(n,e),\square(n,f)}^{\lambda} \\ &\quad = \begin{cases} 1 & (\lambda_{n+1} \leq \min(e,f),\ \lambda_i + \lambda_{2n+1-i} = e+f\ (1 \leq i \leq n) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

定理 3.2. n を正整数とし，e, f を非負整数とする．λ を長さ $2n$ 以下の分割，μ を $\mu \subset \square(n,e)$ となる分割とする．このとき，

(1) λ が条件

$$\lambda_n \geq f \quad \text{かつ} \quad \lambda_{n+1} \leq \min(e, f) \tag{17}$$

をみたさなければ，$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\Box(n,f)} = 0$ である．

(2) λ が条件 (17) をみたすとき，分割 α, β を

$$\alpha_i = \lambda_i - f, \quad \beta_i = e - \lambda_{2n+1-i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

と定義すると，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\Box(n,f)} = \mathrm{LR}^{\beta}_{\alpha,\mu^{\dagger}(n,e)}.$$

特に，$\alpha \subset \beta$ でなければ，$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\Box(n,f)} = 0$ である．

3.4 Sundquist の等式の一般化

T. Sundquist [Su] は，次の等式を示している：

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{a_j - a_i}{1 - x_i x_j}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{1 \leq i < j \leq 2n}(1 - x_i x_j)} \sum_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n} (-1)^{(|\lambda|+|\mu|)/2} \det V^{n,n}_{\lambda,\mu}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{a}). \tag{18}$$

ここで，$\mathcal{P}_n$ は，Frobenius 記法で $\lambda = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r | \alpha_1 + 1, \cdots, \alpha_r + 1)$ の形に表される長さ n 以下の分割全体のなす集合であり，$V^{p,q}_{\lambda,\mu}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{a})$ は

$$(x_i^{\lambda_p}, x_i^{\lambda_{p-1}+1}, x_i^{\lambda_{p-2}+2}, \cdots, x_i^{\lambda_1+p-1}, a_i x_i^{\mu_q}, a_i x_i^{\mu_{q-1}+1}, a_i x_i^{\mu_{q-2}+2}, \cdots, a_i x_i^{\mu_1+q-1}).$$

を第 i 行とする n 次正方行列である．

定理 2.4 を用いると，この等式 (18) の一般化が得られる．非負整数 p, q に対して，

$$F^{p,q}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{a}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_p, \mu \in \mathcal{P}_q} (-1)^{(|\lambda|+|\mu|)/2} \det V^{p,q}_{\lambda,\mu}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{a})$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned} F^{p,q}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{a}) &= (-1)^{\binom{p}{2}+\binom{q}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} x_i^{p-1} \cdot \det V^{p,q}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}^{-1}; \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}^{q-p}), \\ &= (-1)^{\binom{p}{2}+\binom{q}{2}} \det U^{p,q}\left(\begin{array}{c|c} \overrightarrow{x} & \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{1} + \overrightarrow{x}^2 & \overrightarrow{a} \end{array}\right). \end{aligned}$$

と表されることがわかる（[IOTZ, Proposition 4.3]）ので，定理 2.4 と系 2.5 から，次の定理が得られる．

定理 3.3. (a) n を正整数，p, q を非負整数とするとき，

$$\begin{aligned} &\det\left(\frac{F^{p+1,q+1}(x_i, y_j, \overrightarrow{z}; a_i, b_j, \overrightarrow{c})}{(y_j - x_i)(1 - x_i y_j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j - x_i)(1 - x_i y_j)} F^{p,q}(\overrightarrow{z}; \overrightarrow{c})^{n-1} F^{n+p,n+q}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}; \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}). \end{aligned} \tag{19}$$

(b) n を正整数，p, q, r, s を非負整数とするとき，

$$\operatorname{Pf}\left(\frac{F^{p+1,q+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{z};a_i,a_j,\overrightarrow{c})F^{r+1,s+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{w};b_i,b_j,\overrightarrow{d})}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}F^{p,q}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}F^{r,s}(\overrightarrow{w};\overrightarrow{d})^{n-1}$$
$$\times F^{n+p,n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})F^{n+r,n+s}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w};\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}). \quad (20)$$

特に，(20) において，$p=q=r=s=0$ とおき，$b_i=x_i$ $(1\le i\le n)$ を代入すると，Sundquist の等式 (18) が得られる．

参考文献

[C] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions altertées et sur les sommes alternées, Exercices Anal. et Phys. Math. **2** (1841), 151–159.

[I] M. Ishikawa, Minor summation formula and a proof of Stanley's open problem, `arXiv:math.CO/0408204`.

[IOTZ] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng, Generalizations of Cauchy's determinant and Schur's Pfaffian, to appear in Adv. Appl. Math., `arXiv:math.CO/0411280`.

[IW1] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formulas of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.

[IW2] M. Ishikawa and M. Wakayama, Applications of the minor summation formula III: Plücker relations, lattice pathes and Pfaffians, to appear in J. Combin. Theory Ser. A, `arXiv:math.CO/0312358`.

[Kn] D. Knuth, Overlapping Pfaffians, Electron. J. Combin. **3** (2) ("The Foata Festschrift") (1996), 151–163.

[Kr1] C. Krattenthaler, Advanced determinant calculus, Sem. Lothar. Combin. **42** (1999), B42q.

[Kr2] C. Krattenthaler, Advanced determinant calculus, a complement, Linear Algebra Appl. **411** (2005), 68-166.

[LLT] D. Laksov, A. Lascoux and A. Thorup, On Giambelli's theorem on complete correlations, Acta Math. **162** (1989), 143–199.

[M] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.)," Oxford Univ. Press, 1995.

[O1] S. Okada, Applications of minor-summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Alg. **205** (1998), 337–367.

[O2] S. Okada, Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups, to appear in J. Algebraic Combin., `arXiv:math.CO/0408234`.

[O3] 岡田 聡一, Cauchy 型の行列式, Pfaffian とその応用,「組合せ論的表現論の諸相」数理解析研究所講究録 **1382** (2004), 198–215.

[O4] S. Okada, An elliptic generalization of Schur's Pfaffian identity, to appear in Adv. Math., `arXiv:math.CA/0412038`.

[O5] 岡田 聡一, 交代符号行列の数え上げと Cauchy 型行列式, Pfaffian, 第 49 回代数学シンポジウム報告集 (2004), 158–174.

[S] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternirenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutuionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[St] J. R. Stembridge, Non-intersecting paths, Pfaffians and plane partitions, Adv. Math. **83** (1990), 96–131.

[Su] T. Sundquist, Two variable Pfaffian identities and symmetric functions, J. Algebraic Combin. **5** (1996), 135–148.